

## 平成16年度 長崎大学2次試験前期日程(数学問題)

平成16年2月25日

- 教育学部 [2] [3] [4] [5] 数II・III・B (120分)
- 工学部 [2] [4] [5] [6] 数II・III・B (120分)
- 経済・水産・環境科学部 [3] [4] 数II・B (80分)
- 医学部 [2] [3] [5] 数II・III・B (100分)
- 歯・薬学部 [1] [2] [6] 数II・III (100分)

[1]  $a$  を実数とし、3次方程式  $4x^3 - 3x - a = 0$  が3つの異なる実数解をもつとする。次の問いに答えよ。

- (1)  $a$  はどのような範囲にあるか。
- (2) 3つの解はいずれも  $-1$  と  $1$  の間にあることを示せ。
- (3) 三角関数の加法定理および2倍角の公式を用いて、3倍角の公式  $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$  を導け。
- (4) 上の方程式の3つの解のうち、最も大きなものを  $\cos\theta$  ( $0^\circ < \theta < 180^\circ$ ) と表す。このとき、残りの2つの解は  $\cos(\theta + 120^\circ)$  と  $\cos(\theta - 120^\circ)$  であることを示し、それらの大小を調べよ。

[2]  $n$  を自然数とするとき、放物線  $y = x^2 \cdots$  ① と直線  $y = x + n(n-1) \cdots$  ② で囲まれた領域を  $D_n$  で表す。ただし  $D_n$  は境界も含むものとする。 $D_n$  の点  $(x, y)$  で  $x, y$  がともに整数となる点の個数を  $a_n$  とおく。次の問いに答えよ。

- (1) ① と ② の交点の座標を求めよ。
- (2)  $a_1, a_2, a_3 - a_2$  を求めよ。
- (3)  $a_{n+1} - a_n$  を  $n$  の式で表せ。

[3] 関数  $f(x) = x^3 + 3x^2 \cos\theta + x \sin^2\theta + 2$  は極大値、極小値をもつとする。ここで  $\theta$  の範囲は  $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $\theta$  の値の範囲を求めよ。
- (2) 関数  $f(x)$  の極大値、極小値に対応する  $y = f(x)$  のグラフ上の2点を通る直線の傾きを  $m$  とおく。 $m$  を  $\theta$  の関数として表せ。
- (3) 傾き  $m$  のとりうる値の範囲を求めよ。

4 方程式  $4x^3 + (12 - 2a)x^2 + (9 - 6a)x + 27 = 0$  は1つの実数解と2つの虚数解をもつ。ただし  $a$  は実数の定数とする。次の問いに答えよ。

- (1) この方程式の左辺は  $x + 3$  を因数にもつことを示し、実数解と  $a$  の値の範囲を求めよ。
- (2) 2つの虚数解を  $r(\cos \theta \pm i \sin \theta)$  ( $r > 0, 0^\circ < \theta < 180^\circ$ ) と表す。  $r$  を求め、 $\cos \theta, \sin \theta$  を  $a$  で表せ。
- (3) 複素数平面内で3つの解の表す点が正三角形をなすとする。  $\theta$  と  $a$  の値を求めよ。

5  $xy$ -平面において、直角双曲線  $C: y = \frac{1}{x}$  と直線  $l: x + y = k$  を考え、 $C$  と  $l$  の2つの交点を  $A, B$  とする。ここで  $k$  は2より大きな定数である。次の問いに答えよ。

- (1) 点  $A, B$  の  $x$  座標をそれぞれ  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) とする。点  $A$  における曲線  $C$  の法線の方程式を、 $\alpha$  を用いて表せ。
- (2) 2点  $A, B$  において、曲線  $C$  に接する円の中心の座標と半径を、 $k$  を用いて表せ。
- (3) 曲線  $C$  と直線  $l$  で囲まれた部分の面積を、 $k$  を用いて表せ。

6 2以上の自然数  $n$  に対して、関数  $f(x) = \log x - \sqrt[n]{x}$  を考える。次の問いに答えよ。

- (1)  $xf'(x), x^2f''(x)$  を求めよ。
- (2)  $x > 0$  において、 $f'(x) > 0$  なる  $x$  の範囲および  $f''(x) < 0$  なる  $x$  の範囲をそれぞれ求めよ。
- (3) 関数  $f(x)$  の増減、曲線  $y = f(x)$  の凹凸を調べ、関数  $f(x)$  の極大値と曲線  $y = f(x)$  の変曲点がそれぞれ1つずつあることを示せ。
- (4) 上問(3)の極大値を与える  $x$  の値を  $a_n$ 、変曲点の  $x$  座標を  $b_n$  とするとき、極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$  を求めよ。なお  $\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{1/h} = e$  (自然対数の底) であることは用いてよい。

## 解答例

- 1 (1) 関数  $y = 4x^3 - 3x$  について

$$\begin{aligned} y' &= 12x^2 - 3 \\ &= 3(2x + 1)(2x - 1) \end{aligned}$$

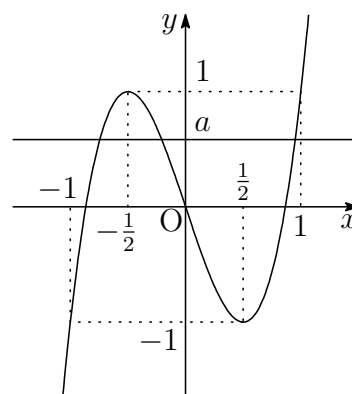
$y$  の増減表は右のようになる.

よって,  $y = 4x^3 - 3x$  のグラフは, 右の図のようになる.

求める  $a$  の値の範囲は, このグラフと直線  $y = a$  が異なる 3 個の共有点をもつ範囲であるから

$$-1 < a < 1$$

$x$	...	$-\frac{1}{2}$	...	$\frac{1}{2}$	...
$y'$	+	0	-	0	+
$y$	↗	1	↘	-1	↗



- (2) 方程式  $4x^3 - 3x - a = 0$  の解は,  $y = 4x^3 - 3x$  のグラフと直線  $y = a$  の共有点の  $x$  座標であるから,  $-1 < a < 1$  のとき, (1) の図から, 3 つの解はいずれも  $-1$  と  $1$  の間にある.

$$\begin{aligned} (3) \quad \cos 3\theta &= \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta \\ &= (2 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \sin \theta \\ &= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta \\ &= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta \\ &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \end{aligned}$$

$$(4) \cos \theta \text{ は, } 4x^3 - 3x - a = 0 \text{ の解であるから } 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta - a = 0$$

$$(3) \text{ の結果から } \cos 3\theta - a = 0$$

$$\text{上式から } \cos(3\theta \pm 360^\circ) - a = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \cos 3(\theta \pm 120^\circ) - a = 0$$

$$\text{したがって} \quad 4 \cos^3(\theta \pm 120^\circ) - 3 \cos(\theta \pm 120^\circ) - a = 0$$

よって,  $\cos(\theta \pm 120^\circ)$  は, 3 次方程式  $4x^3 - 3x - a = 0$  の解である.

最も大きい解  $\cos \theta$  は, (1) の図から  $\frac{1}{2} < \cos \theta < 1$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$  より,  $0^\circ < \theta < 60^\circ$  であるから

$$\begin{aligned} &\cos(\theta - 120^\circ) - \cos(\theta + 120^\circ) \\ &= \cos \theta \cos 120^\circ + \sin \theta \sin 120^\circ - (\cos \theta \cos 120^\circ - \sin \theta \sin 120^\circ) \\ &= 2 \sin \theta \sin 120^\circ = \sqrt{3} \sin \theta > 0 \end{aligned}$$

よって  $\cos(\theta - 120^\circ) > \cos(\theta + 120^\circ)$  ■

- 2 (1)  $y = x^2$  と  $y = x + n(n-1)$  から  $y$  を消去すると

$$x^2 = x + n(n-1) \quad \text{ゆえに} \quad (x+n-1)(x-n) = 0$$

求める交点の座標は  $(-n+1, (n-1)^2), (n, n^2)$

- (2)  $n=1$  のとき, ②は  $y = x$

このとき,  $D_n$  内の格子点は

$$(0, 0), (1, 1)$$

よって  $a_1 = 2$

- $n=2$  のとき, ②は  $y = x+2$

このとき,  $D_n$  内の格子点は

$$(-1, 1), (0, 0), (0, 1), (0, 2),$$

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 4)$$

よって  $a_2 = 8$

- $n=3$  のとき, 直線②は  $y = x+6$

$a_3 - a_2$  の個数は,  $y = x^2$  と  $y = x+6$  の2つの交点  $(-2, 4), (3, 9)$  および領域

$$-2 \leq x \leq 3, \quad x+2 < y \leq x+6$$

内の格子点の個数であるから

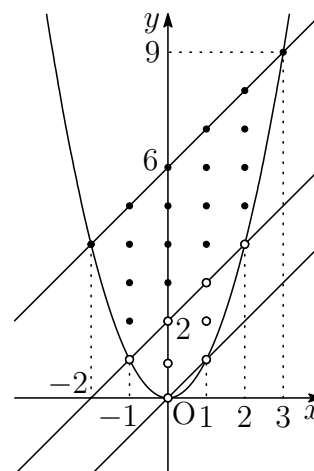
$$a_3 - a_2 = 2 + 4 \times 4 = 18$$

- (3)  $a_{n+1} - a_n$  の個数は,  $y = x^2$  と  $y = x + (n+1)n$  の2つの交点  $(-n, n^2), (n+1, (n+1)^2)$  および領域

$$-n \leq x \leq n+1, \quad x+n(n-1) < y \leq x+(n+1)n$$

内の格子点の個数であるから

$$a_{n+1} - a_n = 2 + 2n \times 2n = 4n^2 + 2$$



**3** (1)  $f(x) = x^3 + 3x^2 \cos \theta + x \sin^2 \theta + 2$  より

$$f'(x) = 3x^2 + 6x \cos \theta + \sin^2 \theta$$

$f(x)$  が極大値・極小値をもつのは、 $f'(x) = 0$  が異なる 2 つの実数解をもつときであるから、 $D/4 > 0$  より

$$(3 \cos \theta)^2 - 3 \sin^2 \theta > 0$$

$$3(1 - \sin^2 \theta) - \sin^2 \theta > 0$$

$$4 \sin^2 \theta - 3 < 0$$

$$(2 \sin \theta + \sqrt{3})(2 \sin \theta - \sqrt{3}) < 0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin \theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-90^\circ < \theta < 90^\circ \text{ より } \quad -60^\circ < \theta < 60^\circ$$

(2)  $f(x)$  を  $f'(x)$  で割ると

$$f(x) = \left( \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \cos \theta \right) f'(x) + \frac{2}{3}(4 \sin^2 \theta - 3)x + 2 - \frac{1}{3} \sin^2 \theta \cos \theta$$

$f(x)$  の極大値・極小値に対応するグラフ上の 2 点を通る直線の方程式は

$$y = \frac{2}{3}(4 \sin^2 \theta - 3)x + 2 - \frac{1}{3} \sin^2 \theta \cos \theta$$

よって、この直線の傾き  $m$  は

$$m = \frac{2}{3}(4 \sin^2 \theta - 3)$$

(3) (1), (2) の結果から、 $m$  のとりうる値の範囲は

$$-2 \leq m < 0$$



4 (1)  $P(x) = 4x^3 + (12 - 2a)x^2 + (9 - 6a)x + 27$  とおくと

$$P(-3) = 4(-3)^3 + (12 - 2a)(-3)^2 + (9 - 6a)(-3) + 27 = 0$$

ゆえに,  $P(x) = 0$  は  $-3$  を実数解にもち

$$P(x) = (x + 3)(4x^2 - 2ax + 9)$$

となる. したがって,  $4x^2 - 2ax + 9 = 0 \cdots (*)$  の解が  $P(x) = 0$  の虚数解である. 2次方程式  $(*)$  の判別式  $D$  について  $D/4 < 0$  であるから

$$(-a)^2 - 4 \cdot 9 < 0 \quad \text{よって} \quad -6 < a < 6$$

(2) 2次方程式  $(*)$  の2つの虚数解が  $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ,  $r(\cos \theta - i \sin \theta)$  であるから ( $r > 0$ ,  $0^\circ < \theta < 180^\circ$ ), 解と係数の関係により

$$\begin{aligned} r(\cos \theta + i \sin \theta) + r(\cos \theta - i \sin \theta) &= -\frac{-2a}{4} \\ r(\cos \theta + i \sin \theta) \cdot r(\cos \theta - i \sin \theta) &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

整理すると  $r \cos \theta = \frac{a}{4}$ ,  $r^2 = \frac{9}{4}$  ゆえに  $r = \frac{3}{2}$ ,  $\cos \theta = \frac{a}{6}$   
 $0^\circ < \theta < 180^\circ$  より  $\sin \theta > 0$  であるから

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{36 - a^2}}{6}$$

(3) 3つの解を  $\alpha = \frac{3}{2}(\cos \theta + i \sin \theta)$ ,  $\beta = \frac{3}{2}(\cos \theta - i \sin \theta)$ ,  $\gamma = -3$  とおく.  
 このとき,  $-3 < \frac{3}{2} \cos \theta$  に注意すると

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) &= \gamma - \beta \\ 3i \sin \theta \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) &= -3 - \frac{3}{2}(\cos \theta - i \sin \theta) \\ -\frac{3\sqrt{3}}{2} \sin \theta + \frac{3}{2}i \sin \theta &= -3 - \frac{3}{2} \cos \theta + \frac{3}{2}i \sin \theta \end{aligned}$$

したがって  $-\frac{3\sqrt{3}}{2} \sin \theta = -3 - \frac{3}{2} \cos \theta$  整理すると  $\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta = 2$

ゆえに  $2 \sin(\theta - 30^\circ) = 2$   $0 < \theta < 180^\circ$  により  $\theta = 120^\circ$

(2) の結果  $\cos \theta = \frac{a}{6}$  より  $a = 6 \cos 120^\circ = -3$  ■

5 (1)  $y = \frac{1}{x}$  より,  $y' = -\frac{1}{x^2}$  であるから,  $x = \alpha$  のとき  $-\frac{1}{y'} = \alpha^2$

したがって,  $C$  上の点  $\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right)$  における法線の方程式は

$$y - \frac{1}{\alpha} = \alpha^2(x - \alpha) \quad \text{すなわち} \quad y = \alpha^2 x - \alpha^3 + \frac{1}{\alpha}$$

(2)  $y = \frac{1}{x}$  と  $x + y = k$  から,  $y$  を消去すると

$$\frac{1}{x} = k - x \quad \text{すなわち} \quad x^2 - kx + 1 = 0$$

上の方程式の解が  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) であるから, 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = k, \quad \alpha\beta = 1, \quad \beta - \alpha = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{k^2 - 4}$$

(1) の結果から  $C$  の 2 点  $A, B$  におけるそれぞれの法線の方程式は

$$y = \alpha^2 x - \alpha^3 + \beta \cdots \textcircled{1}, \quad y = \beta^2 x - \beta^3 + \alpha \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より } (\alpha^2 - \beta^2)x - (\alpha^3 - \beta^3) - (\alpha - \beta) = 0$$

$$\text{したがって } (\alpha + \beta)x = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + 1$$

$$kx = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta + 1$$

$$kx = k^2 - 1 + 1$$

$$x = k$$

これを  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$  に代入して, 辺々を加えると

$$\begin{aligned} 2y &= (\alpha^2 + \beta^2)k - (\alpha^3 + \beta^3) + \alpha + \beta \\ &= \{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}k - (\alpha + \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + k \\ &= (k^2 - 2)k - k^3 + 3 \cdot 1 \cdot k + k = 2k \end{aligned}$$

したがって, 求める円の中心は  $(k, k)$

また, 点  $(k, k)$  と点  $(\alpha, \beta)$  の距離を  $r$  とすると  $\left(\beta = \frac{1}{\alpha}\right)$

$$\begin{aligned} r^2 &= (\alpha - k)^2 + (\beta - k)^2 \\ &= \alpha^2 + \beta^2 - 2k(\alpha + \beta) + 2k^2 \\ &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - 2k \cdot k + 2k^2 \\ &= k^2 - 2 \end{aligned}$$

よって, 求める円の半径は  $\sqrt{k^2 - 2}$

(3) 求める面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{\alpha}^{\beta} \left( -x + k - \frac{1}{x} \right) dx \\
 &= \left[ -\frac{1}{2}x^2 + kx - \log x \right]_{\alpha}^{\beta} \\
 &= -\frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2) + k(\beta - \alpha) - \log \frac{\beta}{\alpha} \\
 &= \left\{ -\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + k \right\} (\beta - \alpha) - \log \frac{\beta^2}{\alpha\beta} \\
 &= \frac{k}{2}\sqrt{k^2 - 4} - 2 \log \beta
 \end{aligned}$$

ここで 
$$\beta = \frac{(\alpha + \beta) + (\beta - \alpha)}{2} = \frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}$$

よって 
$$S = \frac{k}{2}\sqrt{k^2 - 4} - 2 \log \frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}$$
 ■

**6** (1)  $f(x) = \log x - \sqrt[n]{x} = \log x - x^{\frac{1}{n}}$  より

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} \\
 f''(x) &= -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} - 1 \right) x^{\frac{1}{n}-2}
 \end{aligned}$$

よって 
$$\begin{aligned}
 x f'(x) &= 1 - \frac{\sqrt[n]{x}}{n}, \\
 x^2 f''(x) &= -1 + \frac{n-1}{n^2} \sqrt[n]{x}
 \end{aligned}$$

(2)  $x > 0$  において  $f'(x) > 0$  となる  $x$  の範囲は, (1) の結果から

$$1 - \frac{\sqrt[n]{x}}{n} > 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < x < n^n$$

$x > 0$  において  $f''(x) < 0$  となる  $x$  の範囲は, (1) の結果から

$$-1 + \frac{n-1}{n^2} \sqrt[n]{x} < 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < x < \left( \frac{n^2}{n-1} \right)^n$$

$$(3) \quad n = \frac{n^2}{n} < \frac{n^2}{n-1} \text{ より } n^n < \left(\frac{n^2}{n-1}\right)^n$$

したがって、増減表は次のようになる。

$x$	(0)	...	$n^n$	...	$\left(\frac{n^2}{n-1}\right)^n$	...
$y'$		+	0	-	-	-
$y''$		-	-	-	0	+
$y$		↗	極大	↘	$f\left(\left(\frac{n^2}{n-1}\right)^n\right)$	↘

よって  $x = n^n$  のとき極大値  $n(\log n - 1)$

$$\text{変曲点} \left( \left(\frac{n^2}{n-1}\right)^n, n \log \frac{n^2}{n-1} - \frac{n^2}{n-1} \right)$$

(4) (3) の結果から、 $a_n = n^n$ ,  $b_n = \left(\frac{n^2}{n-1}\right)^n$  であるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n-1}\right)^n \frac{1}{n^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \\ &= e \cdot 1 = e \end{aligned}$$

