# 平成16年度　長崎大学２次試験前期日程 (数学問題)
# 平成16年2月25日

- 教育学部は，$\boxed{2}$ ～ $\boxed{5}$ 数II・III・B(120分)
- 工学部は，$\boxed{2}$ , $\boxed{4}$ , $\boxed{5}$ , $\boxed{6}$ 数II・III・B(120分)
- 経済・水産・環境科学部は，$\boxed{3}$ , $\boxed{4}$ 数II・B(80分)
- 医学部は，$\boxed{2}$ , $\boxed{3}$ , $\boxed{5}$ 数II・III・B(100分)
- 歯・薬学部は，$\boxed{1}$ , $\boxed{2}$ , $\boxed{6}$ 数II・III(100分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ $a$ を実数とし，3次方程式 $4x^3 - 3x - a = 0$ が3つの異なる実数解をもつとする．次の問いに答えよ．

(1) $a$ はどのような範囲にあるか．

(2) 3つの解はいずれも $-1$ と $1$ の間にあることを示せ．

(3) 三角関数の加法定理および2倍角の公式を用いて，3倍角の公式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ を導け．

(4) 上の方程式の3つの解のうち，最も大きなものを $\cos\theta$ $(0° < \theta < 180°)$ と表す．このとき，残りの2つの解は $\cos(\theta + 120°)$ と $\cos(\theta - 120°)$ であることを示し，それらの大小を調べよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $n$ を自然数とするとき，放物線 $y = x^2 \cdots$ ① と直線 $y = x + n(n-1) \cdots$ ② で囲まれた領域を $D_n$ で表す．ただし $D_n$ は境界も含むものとする．$D_n$ の点 $(x,\ y)$ で $x$，$y$ がともに整数となる点の個数を $a_n$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) ① と ② の交点の座標を求めよ．

(2) $a_1$，$a_2$，$a_3 - a_2$ を求めよ．

(3) $a_{n+1} - a_n$ を $n$ の式で表せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $f(x) = x^3 + 3x^2\cos\theta + x\sin^2\theta + 2$ は極大値，極小値をもつとする．ここで $\theta$ の範囲は $-90° \leqq \theta \leqq 90°$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $\theta$ の値の範囲を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の極大値，極小値に対応する $y = f(x)$ のグラフ上の2点を通る直線の傾きを $m$ とおく．$m$ を $\theta$ の関数として表せ．

(3) 傾き $m$ のとりうる値の範囲を求めよ．

**4** 方程式 $4x^3+(12-2a)x^2+(9-6a)x+27=0$ は $1$ つの実数解と $2$ つの虚数解をもつ．ただし $a$ は実数の定数とする．次の問いに答えよ．

(1) この方程式の左辺は $x+3$ を因数にもつことを示し，実数解と $a$ の値の範囲を求めよ．

(2) $2$ つの虚数解を $r(\cos\theta \pm \sin\theta)$ $(r>0,\ 0^\circ<\theta<180^\circ)$ と表す．$r$ を求め，$\cos\theta$，$\sin\theta$ を $a$ で表せ．

(3) 複素数平面内で $3$ つの解の表す点が正三角形をなすとする．$\theta$ と $a$ の値を求めよ．

**5** $xy$-平面において，直角双曲線 $C : y=\dfrac{1}{x}$ と直線 $l : x+y=k$ を考え，$C$ と $l$ の $2$ つの交点を A，B とする．ここで $k$ は $2$ より大きな定数である．次の問いに答えよ．

(1) 点 A，B の $x$ 座標をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$ とする．点 A における曲線 $C$ の法線の方程式を，$\alpha$ を用いて表せ．

(2) $2$ 点 A，B において，曲線 $C$ に接する円の中心の座標と半径を，$k$ を用いて表せ．

(3) 曲線 $C$ と直線 $l$ で囲まれた部分の面積を，$k$ を用いて表せ．

**6** $2$ 以上の自然数 $n$ に対して，関数 $f(x)=\log x-\sqrt[n]{x}$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) $xf'(x)$，$x^2f''(x)$ を求めよ．

(2) $x>0$ において，$f'(x)>0$ なる $x$ の範囲および $f''(x)<0$ なる $x$ の範囲をそれぞれ求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ の増減，曲線 $y=f(x)$ の凹凸を調べ，関数 $f(x)$ の極大値と曲線 $y=f(x)$ の変曲点がそれぞれ $1$ つずつあることを示せ．

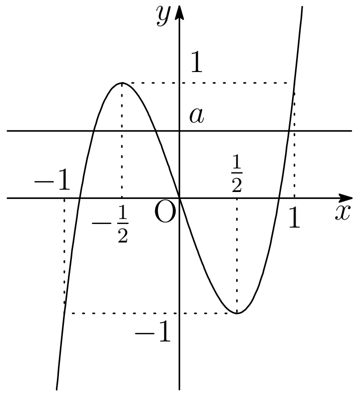
(4) 上問 (3) の極大値を与える $x$ の値を $a_n$，変曲点の $x$ 座標を $b_n$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$ を求めよ．なお $\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}=e$ (自然対数の底) であることは用いてよい．

# 正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 関数 $y=4x^3-3x$ について

$$y'=12x^2-3$$
$$=3(2x+1)(2x-1)$$

| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{1}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{1}{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ |




$y$ の増減表は右のようになる．
よって，$y=4x^3-3x$ のグラフは，右の図のようになる．
求める $a$ の値の範囲は，このグラフと直線 $y=a$ が異なる 3 個の共有点をもつ範囲であるから

$$\boldsymbol{-1<a<1}$$

(2) 方程式 $4x^3-3x-a=0$ の解は，$y=4x^3-3x$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の $x$ 座標であるから，$-1<a<1$ のとき，(1) の図から，3 つの解はいずれも $-1$ と $1$ の間にある．

(3)
$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos(2\theta+\theta)=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta\\ &=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta\sin\theta\\ &=2\cos^3\theta-\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta\\ &=2\cos^3\theta-\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta\\ &=4\cos^3\theta-3\cos\theta\end{aligned}$$

(4) $\cos\theta$ は，$4x^3-3x-a=0$ の解であるから　$4\cos^3\theta-3\cos\theta-a=0$

(3) の結果から　$\cos 3\theta-a=0$

上式から　$\cos(3\theta\pm 360^\circ)-a=0$　ゆえに　$\cos 3(\theta\pm 120^\circ)-a=0$

したがって　$4\cos^3(\theta\pm 120^\circ)-3\cos(\theta\pm 120^\circ)-a=0$

よって，$\cos(\theta\pm 120^\circ)$ は，3 次方程式 $4x^3-3x-a=0$ の解である．

最も大きい解 $\cos\theta$ は，(1) の図から　$\dfrac{1}{2}<\cos\theta<1$

$0^\circ<\theta<180$ より，$60^\circ<\theta<90^\circ$ であるから

$$\begin{aligned}&\cos(\theta-120^\circ)-\cos(\theta+120^\circ)\\ =&\cos\theta\cos 120^\circ+\sin\theta\sin 120^\circ-(\cos\theta\cos 120^\circ-\sin\theta\sin 120^\circ)\\ =&2\sin\theta\sin 120^\circ=\sqrt{3}\sin\theta>0\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\cos(\theta-120^\circ)>\cos(\theta+120^\circ)}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y = x^2$ と $y = x + n(n-1)$ から $y$ を消去すると

$$x^2 = x + n(n-1) \quad \text{ゆえに} \quad (x+n-1)(x-n) = 0$$

求める交点の座標は $\boldsymbol{(-n+1,\ (n-1)^2),\ (n,\ n^2)}$

(2) $n = 1$ のとき，② は　$y = x$

このとき，$D_n$ 内の格子点は

$$(0,\ 0),\ (1,\ 1)$$

よって　$\boldsymbol{a_1 = 2}$

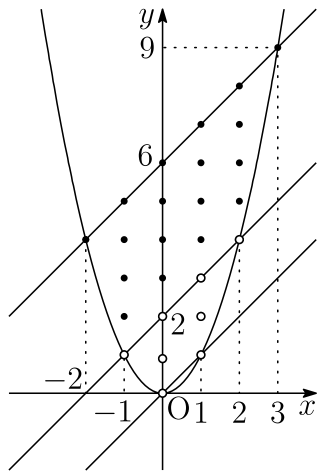
$n = 2$ のとき，② は　$y = x$

このとき，$D_n$ 内の格子点は

$(-1,\ 1)$，$(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(0,\ 2)$，

$(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(1,\ 3)$，$(2,\ 4)$

よって　$\boldsymbol{a_2 = 8}$




$n = 3$ のとき，直線 ② は　$y = x + 6$

$a_3 - a_2$ の個数は，$y = x^2$ と $y = x + 6$ の 2 つの交点 $(-2,\ 4)$，$(3,\ 9)$ および領域

$$-1 \leqq x \leqq 2, \quad x + 2 < y \leqq x + 6$$

内の格子点の個数であるから

$$a_3 - a_2 = 2 + 4 \times 4 = \mathbf{18}$$

(3) $a_{n+1} - a_n$ の個数は，$y = x^2$ と $y = x + (n+1)n$ の 2 つの交点 $(-n,\ n^2)$，$(n+1,\ (n+1)^2)$ および領域

$$-n + 1 \leqq x \leqq n, \quad x + n(n-1) < y \leqq x + (n+1)n$$

内の格子点の個数であるから

$$a_{n+1} - a_n = 2 + 2n \times 2n = \boldsymbol{4n^2 + 2}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x) = x^3 + 3x^2\cos\theta + x\sin^2\theta + 2$ より

$$f'(x) = 3x^2 + 6x\cos\theta + \sin^2\theta$$

$f(x)$ が極大値・極小値をもつのは，$f'(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつときであるから，$D/4 > 0$ より

$$\begin{aligned}(3\cos\theta)^2 - 3\sin^2\theta &> 0\\ 3(1-\sin^2\theta) - \sin^2\theta &> 0\\ 4\sin^2\theta - 3 &< 0\\ (2\sin\theta+\sqrt{3})(2\sin\theta-\sqrt{3}) &< 0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin\theta &< \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$-90^\circ < \theta < 90^\circ$ より　　$\boldsymbol{-60^\circ < \theta < 60^\circ}$

(2) $f(x)$ を $f'(x)$ で割ると

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\cos\theta\right)f'(x) + \frac{2}{3}(4\sin^2\theta - 3)x + 2 - \frac{1}{3}\sin^2\theta\cos\theta$$

$f(x)$ の極大値・極小値に対応するグラフ上の 2 点を通る直線の方程式は

$$y = \frac{2}{3}(4\sin^2\theta - 3)x + 2 - \frac{1}{3}\sin^2\theta\cos\theta$$

よって，この直線の傾き $m$ は

$$\boldsymbol{m = \frac{2}{3}(4\sin^2\theta - 3)}$$

(3) (1)，(2) の結果から，$m$ のとりうる値の範囲は

$$\boldsymbol{-2 \leqq m < 0}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $P(x)=4x^3+(12-2a)x^2+(9-6a)x+27$ とおくと

$$P(-3)=4(-3)^3+(12-2a)(-3)^2+(9-6a)(-3)+27=0$$

ゆえに，$P(x)=0$ は $\boldsymbol{-3}$ を実数解にもち

$$\boldsymbol{P(x)=(x+3)(4x^2-2ax+9)}$$

となる．したがって，$4x^2-2ax+9=0\cdots(*)$ の解が $P(x)=0$ の虚数解である．2 次方程式 $(*)$ の判別式 $D$ について $D/4<0$ であるから

$$(-a)^2-4{\cdot}9<0 \quad よって \quad \boldsymbol{-6<a<6}$$

(2) 2 次方程式 $(*)$ の 2 つの虚数解が $r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$r(\cos\theta-i\sin\theta)$ であるから ($r>0$，$0^\circ<\theta<180^\circ$)，解と係数の関係により

$$r(\cos\theta+i\sin\theta)+r(\cos\theta-i\sin\theta)=-\frac{-2a}{4}$$
$$r(\cos\theta+i\sin\theta){\cdot}r(\cos\theta-i\sin\theta)=\frac{9}{4}$$

整理すると　$r\cos\theta=\dfrac{a}{4}$，　$r^2=\dfrac{9}{4}$　ゆえに　$\boldsymbol{r=\dfrac{3}{2}}$，$\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{a}{6}}$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ より $\sin\theta>0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{a}{6}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{36-a^2}}{6}}$$

(3) 3 つの解を $\alpha=\dfrac{3}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)$，$\beta=\dfrac{3}{2}(\cos\theta-i\sin\theta)$，$\gamma=-3$ とおく．このとき，$-3<\dfrac{3}{2}\cos\theta$ に注意すると

$$(\alpha-\beta)(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=\gamma-\beta$$
$$3i\sin\theta\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-3-\frac{3}{2}(\cos\theta-i\sin\theta)$$
$$-\frac{3\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{3}{2}i\sin\theta=-3-\frac{3}{2}\cos\theta+\frac{3}{2}i\sin\theta$$

しがって　$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\sin\theta=-3-\dfrac{3}{2}\cos\theta$　整理すると　$\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=2$

ゆえに　$2\sin(\theta-30^\circ)=2$　$0<\theta<180^\circ$ により　$\boldsymbol{\theta=120^\circ}$

(2) の結果 $\cos\theta=\dfrac{a}{6}$ より　$a=6\cos 120^\circ=\boldsymbol{-3}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $y=\dfrac{1}{x}$ より，$y'=-\dfrac{1}{x^2}$ であるから，$x=\alpha$ のとき　$-\dfrac{1}{y'}=\alpha^2$

したがって，$C$ 上の点 $\left(\alpha,\ \dfrac{1}{\alpha}\right)$ における法線の方程式は

$$y-\frac{1}{\alpha}=\alpha^2(x-\alpha)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=\alpha^2x-\alpha^3+\frac{1}{\alpha}}$$

(2) $y=\dfrac{1}{x}$ と $x+y=k$ から，$y$ を消去すると

$$\frac{1}{x}=k-x\quad \text{すなわち}\quad x^2-kx+1=0$$

上の方程式の解が $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=k,\quad \alpha\beta=1,\quad \beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{k^2-4}$$

(1) の結果から $C$ の 2 点 A，B におけるそれぞれの法線の方程式は

$$y=\alpha^2x-\alpha^3+\beta\cdots①,\quad y=\beta^2x-\beta^3+\alpha\cdots②$$

① − ② より　$(\alpha^2-\beta^2)x-(\alpha^3-\beta^3)-(\alpha-\beta)=0$

したがって　$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)x&=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+1\\ kx&=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+1\\ kx&=k^2-1+1\\ x&=k\end{aligned}$$

これを ①，② に代入して，辺々を加えると

$$\begin{aligned}2y&=(\alpha^2+\beta^2)k-(\alpha^3+\beta^3)+\alpha+\beta\\ &=\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}k-(\alpha+\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)+k\\ &=(k^2-2)k-k^3+3\cdot1\cdot k+k=2k\end{aligned}$$

したがって，求める円の中心は　$\boldsymbol{(k,\ k)}$

また，点 $(k,\ k)$ と点 $(\alpha,\ \beta)$ の距離を $r$ とすると $\left(\beta=\dfrac{1}{\alpha}\right)$

$$\begin{aligned}r^2&=(\alpha-k)^2+(\beta-k)^2\\ &=\alpha^2+\beta^2-2k(\alpha+\beta)+2k^2\\ &=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2k\cdot k+2k^2\\ &=k^2-2\end{aligned}$$

よって，求める円の半径は　$\boldsymbol{\sqrt{k^2-2}}$

(3) 求める面積を $S$ とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \int_\alpha^\beta \left(-x+k-\frac{1}{x}\right)dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}x^2+kx-\log x\right]_\alpha^\beta \\
&= -\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)+k(\beta-\alpha)-\log\frac{\beta}{\alpha} \\
&= \left\{-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+k\right\}(\beta-\alpha)-\log\frac{\beta^2}{\alpha\beta} \\
&= \frac{k}{2}\sqrt{k^2-4}-2\log\beta
\end{aligned}
$$

ここで　$\beta = \dfrac{(\alpha+\beta)+(\beta-\alpha)}{2} = \dfrac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$

よって　$S = \boldsymbol{\dfrac{k}{2}\sqrt{k^2-4}-2\log\dfrac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $f(x)=\log x-\sqrt[n]{x}=\log x-x^{\frac{1}{n}}$ より

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x}-\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} \\
f''(x) &= -\frac{1}{x^2}-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)x^{\frac{1}{n}-2}
\end{aligned}
$$

よって
$$
\boldsymbol{xf'(x)=1-\frac{\sqrt[n]{x}}{n},}
$$
$$
\boldsymbol{x^2f''(x)=-1+\frac{n-1}{n^2}\sqrt[n]{x}}
$$

(2) $x>0$ において $f'(x)>0$ となる $x$ の範囲は，(1) の結果から

$$
1-\frac{\sqrt[n]{x}}{n}>0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{0<x<n^n}
$$

$x>0$ において $f''(x)<0$ となる $x$ の範囲は，(1) の結果から

$$
-1+\frac{n-1}{n^2}\sqrt[n]{x}<0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{0<x<\left(\frac{n^2}{n-1}\right)^n}
$$

(3) $n=\dfrac{n^2}{n}<\dfrac{n^2}{n-1}$ より　$n^n<\left(\dfrac{n^2}{n-1}\right)^n$

したがって，増減表は次のようになる．

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $n^n$ | $\cdots$ | $\left(\frac{n^2}{n-1}\right)^n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $y''$ | | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | | ↗ | 極大 | ↘ | $f\left(\left(\frac{n^2}{n-1}\right)^n\right)$ | ↘ |

よって　　$\boldsymbol{x=n^n}$ **のとき極大値** $\boldsymbol{n(\log n-1)}$

**変曲点** $\boldsymbol{\left(\left(\dfrac{n^2}{n-1}\right)^n,\ n\log\dfrac{n^2}{n-1}-\dfrac{n^2}{n-1}\right)}$

(4) (3) の結果から，$a_n=n^n$，$b_n=\left(\dfrac{n^2}{n-1}\right)^n$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n-1}\right)^n\frac{1}{n^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\\&=e\cdot 1=\boldsymbol{e}\end{aligned}$$