

平成 15 年度 長崎大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

平成 15 年 2 月 25 日

- 教育・工学部 [1] [2] [3] [6] 数 II・III・B (120 分)
- 経済・水産・環境科学部 [2] [5] 数 II・B (80 分)
- 医学部 [2] [4] [5] 数 II・III・B (100 分)
- 歯・薬学部 [1] [2] [3] 数 II・III (100 分)

[1] 定数 a, b と関数 $f(x)$ が $\int_2^x f(t) dt = (x-a)(x^2+x+b)$ をみたすとする. 次の問いに答えなさい.

- (1) $y = f(x)$ のグラフが点 $(-1, 4)$ を通るとき, 方程式 $f(x) = 0$ の解を求めなさい.
- (2) 定数 a が負のとき, $y = f(x)$ のグラフは, a の値に関係なく定点を通ることを示し, その定点の座標を求めなさい.

[2] 放物線 $C: y = x(x-a)$ について, 次の問いに答えなさい. ただし, $a > 0$ とする.

- (1) 放物線 C と直線 $y = -x + a$ とで囲まれる図形の面積を求めなさい.
- (2) $a = 2$ のとき, 直線 $y = kx$ によって (1) の図形の面積が二等分されるように k の値を定めなさい.
- (3) 放物線 C と点 $(0, 1)$ を通る直線とで囲まれる図形の面積が最小となるとき, 直線の方程式およびその図形の面積を求めなさい.

[3] 関数 $f(x) = x^x (x > 0)$ について, 次の問いに答えなさい.

- (1) 関数 $f(x)$ の最小値を求めなさい.
- (2) 関数 $y = f(x)$ の接線で原点を通るものは 1 本しかないことを示し, その接線の方程式を求めなさい.

4 右の図は、関数

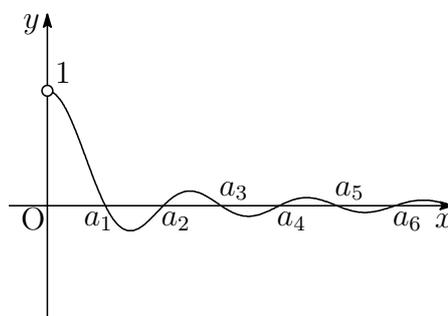
$$y = \frac{\sin x}{x} \quad (x > 0)$$

のグラフの概形である．このグラフと x 軸との交点の x 座標を左から順に、 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ とおく．

$a_n \leq x \leq a_{n+1}$ において、このグラフを x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を

V_n とすると、 $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ は収束する．

次の問いに答えよ．



(1) a_n の値を求め、 V_n を $\frac{\sin 2x}{x}$ の定積分で表しなさい．

(2) $V_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ となることを示しなさい．

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} V_n \leq 1$ となることを示しなさい．

5 整式 $f(x) = x^3 + ax^2 + 3bx + 3$ において、定数 a, b は整数とする．この整式が整数 n を用いて $f(x) = (x - n)(x^2 + px + q)$ と因数分解されるとき、次の問いに答えなさい．

(1) p, q が整数であることを示し、整数 n の値を求めなさい．

(2) 2次方程式 $x^2 + px + q = 0$ が虚数解をもつように、 a, b, n, p, q の値を定めなさい．

6 平面上に $\triangle ABC$ と点 P があり,

$$\alpha\vec{PA} + \beta\vec{PB} + \gamma\vec{PC} = \vec{0}$$
$$\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = 1$$

の関係が成り立っている。次の問いに答えなさい。

- (1) 点 P は $\triangle ABC$ の周または内部にあることを示しなさい。
- (2) $\triangle ABC$ が辺の長さ 1 の正三角形であるとき、その内心を I として、 $|\vec{IP}|^2$ を β, γ で表しなさい。
- (3) (2) において、点 P が点 I を中心とする $\triangle ABC$ の内接円上にあるための必要十分条件は

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{1}{4}$$

であることを示しなさい。

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad \int_2^x f(t) dt = (x-a)(x^2+x+b) \quad \dots (*)$$

上式に $x=2$ を代入すると $(2-a)(6+b)=0$

したがって $a=2$ または $b=-6$ \dots ①

(*) の両辺を x で微分すると

$$f(x) = 3x^2 + 2(1-a)x - a + b$$

$f(-1) = 4$ であるから

$$3 - 2(1-a) - a + b = 4 \quad \text{ゆえに} \quad a + b = 3 \quad \dots \text{②}$$

$$\text{①, ② より} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} a = 9 \\ b = -6 \end{cases}$$

(i) $a=2, b=1$ のとき $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

$$f(x) = 0 \text{ の解は} \quad x = -\frac{1}{3}, 1$$

(ii) $a=9, b=-6$ のとき $f(x) = 3x^2 - 16x - 15$

$$f(x) = 0 \text{ の解は} \quad x = \frac{8 \pm \sqrt{109}}{3}$$

(2) $a < 0$ であるから, ① より $b = -6$

したがって $y = 3x^2 + 2(1-a)x - a - 6$

これを a について整理すると

$$(2x+1)a + y - 3x^2 - 2x + 6 = 0$$

任意の a に対して, 上式をみたす点 (x, y) は

$$2x+1=0, \quad y-3x^2-2x+6=0$$

これを解いて $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$ ■

- 2 (1) 放物線 $C: y = x(x - a)$ と直線 $y = -x + a$ の共有点の x 座標は ($a > 0$)

$$x(x - a) = -x + a \quad \text{ゆえに} \quad (x + 1)(x - a) = 0$$

これを解いて $x = -1, a$

よって、求める面積を $S(a)$ とすると

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{-1}^a \{-x + a - x(x - a)\} dx \\ &= - \int_{-1}^a (x + 1)(x - a) dx = \frac{1}{6}(a + 1)^3 \end{aligned}$$

- (2) (1) の結果から $\frac{1}{2}S(2) = \frac{9}{4}$

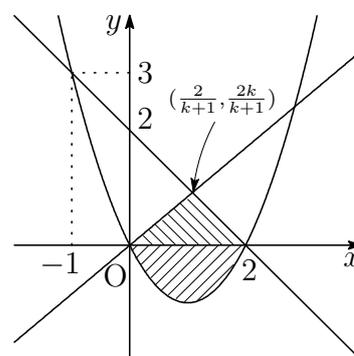
$$\text{また} \quad - \int_0^2 x(x - 2) dx = \frac{1}{6}(2 - 0)^3 = \frac{4}{3}$$

$\frac{1}{2}S(2) > \frac{4}{3}$ であるから、直線 $y = -x + 2 \cdots \textcircled{1}$ と直線 $y = kx \cdots \textcircled{2}$ の交点は、2点 $(-1, 3)$, $(2, 0)$ を結ぶ線分上にある。このとき、その交点の y 座標は、 $k \neq -1$ に注意して、 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ を解くと

$$y = \frac{2k}{k + 1}$$

したがって、求める k の値は

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2k}{k + 1} + \frac{4}{3} = \frac{9}{4} \quad \text{これを解いて} \quad k = \frac{11}{13}$$



- (3) 点 $(0, 1)$ を通る直線を $l: y = mx + 1$ とおく。 C と l の共有点の x 座標は

$$x(x - a) = mx + 1 \quad \text{整理すると} \quad x^2 - (m + a)x - 1 = 0$$

この方程式の解を α, β とすると ($\alpha < \beta$)、解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = m + a, \quad \alpha\beta = -1$$

C と l で囲まれた図形の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{mx + 1 - x(x - a)\} dx = - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6}\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}\{(m + a)^2 + 4\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

S が最小となるとき $m = -a$ 。このとき、 l の方程式および S は

$$y = -ax + 1, \quad S = \frac{4}{3}$$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$), 点 (p, q) を通る直線を l とする ($q > f(p)$).
放物線 $C: y = f(x)$ と l で囲まれた図形の面積 S が最小となるのは, l の傾きが $f'(p)$ のときである.

[証明] $f(x) = a(x-p)^2 + f'(p)(x-p) + f(p)$

l の傾きを m とすると $l: y = m(x-p) + q$

ここで, t に関する 2 次方程式

$$at^2 + \{f'(p) - m\}t + f(p) - q = 0$$

の異なる 2 つの実数解を α, β とすると ($\alpha < \beta$)

$$\alpha + \beta = \frac{m - f'(p)}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{f(p) - q}{a}$$

C と l の共有点の x 座標は

$$a(x-p)^2 + \{f'(p) - m\}(x-p) + f(p) - q = 0$$

これを解いて $x = \alpha + p, \beta + p$

C と l で囲まれた図形の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha+p}^{\beta+p} [m(x-p) + q - \{ax^2 + f'(p)(x-p) + f(p)\}] dx \\ &= \int_{\alpha+p}^{\beta+p} [a(x-p)^2 + \{f'(p) - m\}(x-p) + f(p) - q] dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} [at^2 + \{f'(p) - m\}t + f(p) - q] dt \\ &= -a \int_{\alpha}^{\beta} (t - \alpha)(t - \beta) dt = \frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

このとき $(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \frac{\{m - f'(p)\}^2}{a^2} + \frac{4\{q - f(p)\}}{a}$

S が最小となるのは, 上の 2 式から, $m = f'(p)$ のときである.

また, $a < 0, q < f(p)$ のときも同様に, $m = f'(p)$ のときである. ■

- 3 (1) $f(x) = x^x$ の両辺の対数をとると

$$\log f(x) = \log x^x = x \log x$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \log x + 1 \quad \text{ゆえに} \quad f'(x) = x^x(\log x + 1)$$

したがって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	(0)	...	e^{-1}	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\searrow	$e^{-\frac{1}{e}}$	\nearrow

よって $x = e^{-1}$ のとき最小値 $e^{-\frac{1}{e}}$ をとる。

- (2) $y = x^x$ 上の点 (t, t^t) における接線の方程式は $(t > 0)$

$$y - t^t = t^t(\log t + 1)(x - t) \quad \dots (*)$$

これが原点を通るから

$$-t^t = t^t(\log t + 1)(-t) \quad \text{ゆえに} \quad \log t - \frac{1}{t} + 1 = 0 \quad \dots (**)$$

ここで、 $g(t) = \log t + 1 - \frac{1}{t}$ とおくと $g'(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} > 0$

$g(t)$ は単調増加であるから、 $g(t) = 0$ をみたす t は、ただ1つ存在する。

また、 $g(1) = 0$ であるから、(**) をみたすのは $t = 1$

これを (*) に代入して $y = x$

補足 (*) が原点を通ることから、 $h(t) = t \log t + t - 1$ とすると $h'(t) = \log t + 2$ したがって、 $h(t)$ の増減表は次のようになる。

t	(0)	...	e^{-2}	...
$h'(t)$		-	0	+
$h(t)$	(-1)	\searrow	$-e^{-2} - 1$	\nearrow

また $\lim_{t \rightarrow +0} h(t) = -1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$

したがって、 $h(t) = 0$ をみたすのは $t = 1$ だけ1つである。

しかし、 $\lim_{t \rightarrow +0} t \log t = 0$ を示す必要がある (長崎大学 2007 年一般前期 5) の補足を参照¹⁾。 ■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki_2007.pdf

4 (1) $\frac{\sin x}{x} = 0$ より $x = n\pi$ (n は整数) したがって $a_n = n\pi$

$$\begin{aligned} \frac{V_n}{\pi} &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left(\frac{1}{x}\right)' \sin^2 x dx \\ &= - \left[\frac{1}{x} \sin^2 x \right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{x} (\sin^2 x)' dx \\ &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{2 \sin x \cos x}{x} dx = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin 2x}{x} dx \end{aligned}$$

よって $V_n = \pi \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin 2x}{x} dx$

(2) $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$ において, $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \leq \frac{1}{x^2}$ であるから

$$\begin{aligned} V_n &= \pi \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx \\ &\leq \pi \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{x^2} dx = \pi \left[-\frac{1}{x} \right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

別解 $n\pi \leq x \leq (n + \frac{1}{2})\pi$ のとき $\frac{\sin 2x}{x} \leq \frac{\sin 2x}{n\pi}$

$(n + \frac{1}{2})\pi \leq x \leq (n+1)\pi$ のとき $\frac{\sin 2x}{x} \leq \frac{\sin 2x}{(n+1)\pi}$

(1) の結果を用いると

$$\begin{aligned} V_n &= \pi \int_{n\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin 2x}{x} dx + \pi \int_{(n+\frac{1}{2})\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin 2x}{x} dx \\ &\leq \pi \int_{n\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin 2x}{n\pi} dx + \pi \int_{(n+\frac{1}{2})\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin 2x}{(n+1)\pi} dx \\ &= \frac{1}{n} \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_{n\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} + \frac{1}{n+1} \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_{(n+\frac{1}{2})\pi}^{(n+1)\pi} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\sum_{k=1}^n V_k \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

よって $\sum_{n=1}^{\infty} V_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$ ■

$$\boxed{5} \quad (1) \quad \begin{aligned} f(x) &= (x-n)(x^2+px+q) \\ &= x^3 + (p-n)x^2 + (q-pn)x - qn \end{aligned}$$

上式と $f(x) = x^3 + ax^2 + 3bx + 3$ の同じ次数の項の係数を比較して

$$p-n = a, \quad q-pn = 3b, \quad -qn = 3 \quad \cdots (*)$$

$$(*) \text{ の第 1, 2 式から } p = n + a, \quad q = n^2 + an + 3b \quad \cdots \textcircled{1}$$

n, a, b は整数であるから, p, q は整数である.

$$(*) \text{ の第 3 式から } n = \pm 1, \pm 3$$

$n = \pm 3$ のとき, $\textcircled{1}$ より q は 3 の倍数となり, $-qn = 3$ に反する.

$$\text{よって } n = \pm 1$$

$$(2) \quad x^2 + px + q = 0 \text{ が虚数解をもつから } p^2 - 4q < 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$n = \pm 1, \quad -qn = 3 \text{ で } \textcircled{2} \text{ をみたすのは } n = -1, \quad q = 3$$

これらを $(*)$ の第 1, 2 式に代入することにより

$$a = p + 1, \quad p = 3(b-1) \quad \cdots (**)$$

$q = 3$ および $(**)$ の第 2 式を $\textcircled{2}$ に代入すると

$$\{3(b-1)\}^2 - 4 \cdot 3 < 0 \quad \text{ゆえに } (b-1)^2 < \frac{4}{3}$$

b は整数であるから $b = 0, 1, 2$

これを $(**)$ に代入すると

$$(a, b, p) = (-2, 0, -3), (1, 1, 0), (4, 2, 3)$$



6 (1) P に対して、 $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AQ}$ を満たす点 Q を線分 BC 上にとると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= k\overrightarrow{AQ} \\ &= k\{(1-s)\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}\} \\ &= k(1-s)\overrightarrow{AB} + ks\overrightarrow{AC} \quad (0 \leq k \leq 1, 0 \leq s \leq 1)\end{aligned}$$

上式に $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA}$ を代入すると

$$-\overrightarrow{PA} = k(1-s)\{\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}\} + ks\{\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA}\}$$

$$\text{整理すると} \quad (1-k)\overrightarrow{PA} + k(1-s)\overrightarrow{PB} + ks\overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

ここで、 $\alpha = 1-k$, $\beta = k(1-s)$, $\gamma = ks$ とおくと、次式が成立する。

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} + \gamma\overrightarrow{PC} &= \vec{0} \quad \dots (*) \\ \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma &= 1\end{aligned}$$

(2) (*) より $(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ ゆえに $\overrightarrow{AP} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$

正三角形においては、内心は重心は一致するから $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$$\text{ゆえに} \quad \overrightarrow{IP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AI} = \left(\beta - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\gamma - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AC}$$

このとき、 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = 1$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}| \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{IP}|^2 &= \left(\beta - \frac{1}{3}\right)^2 |\overrightarrow{AB}|^2 + 2\left(\beta - \frac{1}{3}\right)\left(\gamma - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \left(\gamma - \frac{1}{3}\right)^2 |\overrightarrow{AB}|^2 \\ &= \left(\beta - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\beta - \frac{1}{3}\right)\left(\gamma - \frac{1}{3}\right) + \left(\gamma - \frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma - \beta - \gamma + \frac{1}{3}\end{aligned}$$

(3) $\triangle ABC$ の内接円の半径を r とすると

$$\frac{1}{2}(1+1+1)r = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \sin \frac{\pi}{3} \quad \text{ゆえに} \quad r = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

点 P が点 I を中心とする $\triangle ABC$ の内接円上にあるとき、 $|\vec{IP}| = \frac{\sqrt{3}}{6}$ であるから、(2) の結果より

$$\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma - \beta - \gamma + \frac{1}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

したがって $\beta(\beta - 1) + \gamma(\gamma - 1) + \beta\gamma = -\frac{1}{4}$

$\alpha + \beta + \gamma = 1$ より、 $\beta - 1 = -\gamma - \alpha$ 、 $\gamma - 1 = -\alpha - \beta$ であるから

$$\beta(-\gamma - \alpha) + \gamma(-\alpha - \beta) + \beta\gamma = -\frac{1}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{1}{4}$$

