平成15年度　長崎大学２次試験前期日程 (数学問題)
平成15年2月25日

- 教育・工学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{6}$ 数II・III・B(120分)
- 経済・水産・環境科学部は，$\boxed{2}$, $\boxed{5}$ 数II・B(80分)
- 医学部は，$\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ 数II・III・B(100分)
- 歯・薬学部は $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ 数II・III(100分)

1 定数 a，b と関数 $f(x)$ が $\displaystyle\int_2^x f(t)\,dt = (x-a)(x^2+x+b)$ をみたすとする．次の問いに答えなさい．

(1) $y = f(x)$ のグラフが点 $(-1,\ 4)$ を通るとき，方程式 $f(x) = 0$ の解を求めなさい．

(2) 定数 a が負のとき，$y = f(x)$ のグラフは，a の値に関係なく定点を通ることを示し，その定点の座標を求めなさい．

2 放物線 $C : y = x(x-a)$ について，次の問いに答えなさい．ただし，$a > 0$ とする．

(1) 放物線 C と直線 $y = -x + a$ とで囲まれる図形の面積を求めなさい．

(2) $a = 2$ のとき，直線 $y = kx$ によって (1) の図形の面積が二等分されるように k の値を定めなさい．

(3) 放物線 C と点 $(0,\ 1)$ を通る直線とで囲まれる図形の面積が最小となるとき，直線の方程式およびその図形の面積を求めなさい．

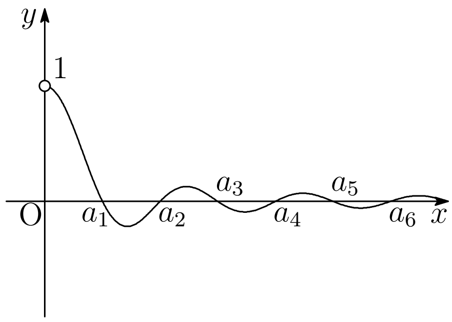
3 関数 $f(x) = x^x\ (x > 0)$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 関数 $f(x)$ の最小値を求めなさい．

(2) 関数 $y = f(x)$ の接線で原点を通るものは1本しかないことを示し，その接線の方程式を求めなさい．

4 右の図は，関数

$$y = \frac{\sin x}{x} \quad (x > 0)$$



のグラフの概形である．このグラフと x 軸との交点の x 座標を左から順に，a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_n，$\cdots$ とおく．
$a_n \leqq x \leqq a_{n+1}$ において，このグラフを x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_n とすると，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ は収束する．
次の問いに答えよ．

(1) a_n の値を求め，V_n を $\dfrac{\sin 2x}{x}$ の定積分で表しなさい．

(2) $V_n \leqq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ となることを示しなさい．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} V_n \leqq 1$ となることを示しなさい．

5 整式 $f(x) = x^3 + ax^2 + 3bx + 3$ において，定数 a，b は整数とする．この整式が整数 n を用いて $f(x) = (x-n)(x^2+px+q)$ と因数分解されるとき，次の問いに答えなさい．

(1) p，q が整数であることを示し，整数 n の値を求めなさい．

(2) 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ が虚数解をもつように，a，b，n，p，q の値を定めなさい．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 平面上に $\triangle\mathrm{ABC}$ と点 P があり，

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$$
$$\alpha \geqq 0,\ \beta \geqq 0,\ \gamma \geqq 0,\quad \alpha+\beta+\gamma=1$$

の関係が成り立っている．次の問いに答えなさい．

(1) 点 P は $\triangle\mathrm{ABC}$ の周または内部にあることを示しなさい．

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ が辺の長さ 1 の正三角形であるとき，その内心を I として，$|\overrightarrow{\mathrm{IP}}|^2$ を β，γ で表しなさい．

(3) (2) において，点 P が点 I を中心とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の内接円上にあるための必要十分条件は

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{1}{4}$$

であることを示しなさい．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $$\int_2^x f(t)\,dt = (x-a)(x^2+x+b) \qquad \cdots (*)$$

上式に $x=2$ を代入すると　　$(2-a)(6+b)=0$

したがって　　$a=2$　または　$b=-6$　　$\cdots$①

$(*)$ の両辺を x で微分すると

$$f(x)=3x^2+2(1-a)x-a+b$$

$f(-1)=4$ であるから

$$3-2(1-a)-a+b=4 \quad \text{ゆえに} \quad a+b=3 \quad \cdots ②$$

①，② より $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$ または $\begin{cases} a=9 \\ b=-6 \end{cases}$

(i) $a=2$，$b=1$ のとき　$f(x)=3x^2-2x-1$

$f(x)=0$ の解は　　$\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{3},\ 1}$

(ii) $a=9$，$b=-6$ のとき　$f(x)=3x^2-16x-15$

$f(x)=0$ の解は　　$\boldsymbol{x=\dfrac{8\pm\sqrt{109}}{3}}$

(2) $a<0$ であるから，① より　$b=-6$

したがって　$y=3x^2+2(1-a)x-a-6$

これを a について整理すると

$$(2x+1)a+y-3x^2-2x+6=0$$

任意の a に対して，上式をみたす点 $(x,\ y)$ は

$$2x+1=0, \quad y-3x^2-2x+6=0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{25}{4}\right)}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 放物線 $C: y=x(x-a)$ と直線 $y=-x+a$ の共有点の x 座標は $(a>0)$

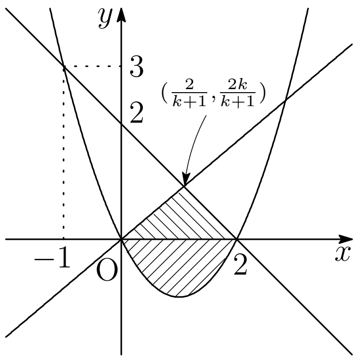
$$x(x-a)=-x+a \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x-a)=0$$

これを解いて　　$x=-1,\ a$

よって，求める面積を $S(a)$ とすると

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{-1}^{a}\{-x+a-x(x-a)\}\,dx \\ &= -\int_{-1}^{a}(x+1)(x-a)\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{6}(a+1)^3} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から　　$\dfrac{1}{2}S(2)=\dfrac{9}{4}$



また　$-\displaystyle\int_0^2 x(x-2)\,dx=\frac{1}{6}(2-0)^3=\frac{4}{3}$

$\frac{1}{2}S(2)>\frac{4}{3}$ であるから，直線 $y=-x+2\cdots$① と直線 $y=kx\cdots$② の交点は，2 点 $(-1,\ 3)$，$(2,\ 0)$ を結ぶ線分上にある．このとき，その交点の y 座標は，$k\neq -1$ に注意して，①，② を解くと

$$y=\frac{2k}{k+1}$$

したがって，求める k の値は

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{2k}{k+1}+\frac{4}{3}=\frac{9}{4} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k=\frac{11}{13}}$$

(3) 点 $(0,\ 1)$ を通る直線を $l: y=mx+1$ とおく．C と l の共有点の x 座標は

$$x(x-a)=mx+1 \quad \text{整理すると} \quad x^2-(m+a)x-1=0$$

この方程式の解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=m+a, \quad \alpha\beta=-1$$

C と l で囲まれた図形の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta\{mx+1-x(x-a)\}\,dx = -\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}\{(m+a)^2+4\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

S が最小となるとき　$m=-a$．このとき，l の方程式および S は

$$\boldsymbol{y=-ax+1}, \quad S=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$，点 $(p,\ q)$ を通る直線を l とする $(q>f(p))$．放物線 $C:y=f(x)$ と l で囲まれた図形の面積 S が最小となるのは，l の傾きが $f'(p)$ のときである．

［証明］ $f(x)=a(x-p)^2+f'(p)(x-p)+f(p)$

l の傾きを m とすると　　$l:y=m(x-p)+q$

ここで，t に関する 2 次方程式

$$at^2+\{f'(p)-m\}t+f(p)-q=0$$

の異なる 2 つの実数解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$

$$\alpha+\beta=\frac{m-f'(p)}{a},\quad \alpha\beta=\frac{f(p)-q}{a}$$

C と l の共有点の x 座標は

$$a(x-p)^2+\{f'(p)-m\}(x-p)+f(p)-q=0$$

これを解いて　　$x=\alpha+p,\ \beta+p$

C と l で囲まれた図形の面積 S は

$$\begin{aligned}
S&=\int_{\alpha+p}^{\beta+p}\left[\,m(x-p)+q-\{ax^2+f'(p)(x-p)+f(p)\}\,\right]dx\\
&=\int_{\alpha+p}^{\beta+p}\left[\,a(x-p)^2+\{f'(p)-m\}(x-p)+f(p)-q\,\right]dx\\
&=-\int_{\alpha}^{\beta}\left[\,at^2+\{f'(p)-m\}t+f(p)-q\,\right]dt\\
&=-a\int_{\alpha}^{\beta}(t-\alpha)(t-\beta)\,dt=\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}$$

このとき　　$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\dfrac{\{m-f'(p)\}^2}{a^2}+\dfrac{4\{q-f(p)\}}{a}$

S が最小となるのは，上の 2 式から，$m=f'(p)$ のときである．

また，$a<0$，$q<f(p)$ のときも同様に，$m=f'(p)$ のときである．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x) = \log x$ の両辺の対数をとると

$$\log f(x) = \log x^x = x \log x$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \log x + 1 \quad \text{ゆえに} \quad f'(x) = x^x(\log x + 1)$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	e^{-1}	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$e^{-\frac{1}{e}}$	$\nearrow$

よって　$x = e^{-1}$ のとき最小値 $\boldsymbol{e^{-\frac{1}{e}}}$ をとる．

(2) $y = x^x$ 上の点 $(t,\ t^t)$ における接線の方程式は $(t > 0)$

$$y - t^t = t^t(\log t + 1)(x - t) \quad \cdots (*)$$

これが原点を通るから

$$-t^t = t^t(\log t + 1) \quad \text{ゆえに} \quad \log t - \frac{1}{t} + 1 = 0 \quad \cdots (**)$$

ここで，$g(t) = \log t + 1 - \dfrac{1}{t}$ とおくと　$g'(t) = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t^2} > 0$

$g(t)$ は単調増加であるから，$g(t) = 0$ をみたす t は，ただ 1 つ存在する．

また，$g(1) = 0$ であるから，$(**)$ をみたすのは　　$t = 1$

これを $(*)$ に代入して　　$\boldsymbol{y = x}$

補足 $(*)$ が原点を通ることから，$h(t) = t\log t + t - 1$ とすると　$h'(t) = \log t + 2$
したがって，$h(t)$ の増減表は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	e^{-2}	$\cdots$
$h'(t)$		$-$	0	$+$
$h(t)$	(-1)	$\searrow$	$-e^{-2} - 1$	$\nearrow$

また　$\displaystyle\lim_{t\to+0} h(t) = -1,\ \lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$
したがって，$h(t) = 0$ をみたすのは $t = 1$ ただ 1 つである．
しかし，$\displaystyle\lim_{t\to+0} t\log t = 0$ を示す必要がある (長崎大学 2007 年一般前期 $\boxed{5}$ の補足を参照[1])．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki_2007.pdf

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\dfrac{\sin x}{x}=0$ より　$x=n\pi$ (n は整数)　したがって　$\boldsymbol{a_n=n\pi}$

$$\begin{aligned}\frac{V_n}{\pi}&=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx=-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left(\frac{1}{x}\right)'\sin^2x\,dx\\&=-\left[\frac{1}{x}\sin^2x\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi}+\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{x}(\sin^2x)'\,dx\\&=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{2\sin x\cos x}{x}\,dx=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin 2x}{x}\,dx\end{aligned}$$

よって　$$\boldsymbol{V_n=\pi\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin 2x}{x}\,dx}$$

(2) $n\pi\leqq x\leqq(n+1)\pi$ において，$\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\leqq\dfrac{1}{x^2}$ であるから

$$\begin{aligned}V_n&=\pi\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx\\&\leqq\pi\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{x^2}\,dx=\pi\left[-\frac{1}{x}\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

別解　$n\pi\leqq x\leqq\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ のとき　$\dfrac{\sin 2x}{x}\leqq\dfrac{\sin 2x}{n\pi}$

$\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\leqq x\leqq(n+1)\pi$ のとき　$\dfrac{\sin 2x}{x}\leqq\dfrac{\sin 2x}{(n+1)\pi}$

(1) の結果を用いると

$$\begin{aligned}V_n&=\pi\int_{n\pi}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{\sin 2x}{x}\,dx+\pi\int_{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin 2x}{x}\,dx\\&\leqq\pi\int_{n\pi}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{\sin 2x}{n\pi}\,dx+\pi\int_{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin 2x}{(n+1)\pi}\,dx\\&=\frac{1}{n}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{n\pi}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}+\frac{1}{n+1}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}^{(n+1)\pi}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n}V_k\leqq\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

よって　$$\sum_{n=1}^{\infty}V_n\leqq\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1)

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-n)(x^2+px+q) \\ &= x^3+(p-n)x^2+(q-pn)x-qn \end{aligned}$$

上式と $f(x)=x^3+ax^2+3bx+3$ の同じ次数の項の係数を比較して

$$p-n=a, \quad q-pn=3b, \quad -qn=3 \quad \cdots (*)$$

$(*)$ の第 1，2 式から　$p=n+a$，$q=n^2+an+3b$　$\cdots$ ①

n，a，b は整数であるから，p，q は整数である．

$(*)$ の第 3 式から　$n=\pm 1$，± 3

$n=\pm 3$ のとき，① より q は 3 の倍数となり，$-qn=3$ に反する．

よって　　$\boldsymbol{n=\pm 1}$

(2) $x^2+px+q=0$ が虚数解をもつから　$p^2-4q<0$　$\cdots$ ②

$n=\pm 1$，$-qn=3$ で ② をみたすのは　　$\boldsymbol{n=-1}$，$\boldsymbol{q=3}$

これらを $(*)$ の第 1，2 式に代入することにより

$$a=3b-2, \quad p=3(b-1) \quad \cdots (**)$$

$q=3$ および $(**)$ の第 2 式をを ② に代入すると

$$\{3(b-1)\}^2-4\cdot 3<0 \quad \text{ゆえに} \quad (b-1)^2<\frac{4}{3}$$

b は整数であるから　　$b=0$，1，2

これを $(**)$ に代入すると

$$\boldsymbol{(a,\ b,\ p)=(-2,\ 0,-3),\ (1,\ 1,\ 0),\ (4,\ 2,\ 3)}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) P に対して，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を満たす点 Q を線分 BC 上にとると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=k\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\\&=k\{(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}\}\\&=k(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+ks\overrightarrow{\mathrm{AC}}\qquad(0\leqq k\leqq 1,\ \ 0\leqq s\leqq 1)\end{aligned}$$

上式に $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-\overrightarrow{\mathrm{PA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ を代入すると

$$-\overrightarrow{\mathrm{PA}}=k(1-s)\{\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}}\}+ks\{\overrightarrow{\mathrm{PC}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}}\}$$

整理すると　$(1-k)\overrightarrow{\mathrm{PA}}+k(1-s)\overrightarrow{\mathrm{PB}}+ks\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$

ここで，$\alpha=1-k$，$\beta=k(1-s)$，$\gamma=ks$ とおくと，次式が成立する．

$$\begin{aligned}&\alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{PC}}=0\qquad\cdots(*)\\&\alpha\geqq 0,\ \ \beta\geqq 0,\ \ \gamma\geqq 0,\ \ \alpha+\beta+\gamma=1\end{aligned}$$

(2) $(*)$ より　$(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{0}$　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

正三角形においては，内心は重心は一致するから　$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{IP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\left(\beta-\dfrac{1}{3}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\gamma-\dfrac{1}{3}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{IP}}|^2&=\left(\beta-\frac{1}{3}\right)^2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+2\left(\beta-\frac{1}{3}\right)\left(\gamma-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\left(\gamma-\frac{1}{3}\right)^2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2\\&=\left(\beta-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\beta-\frac{1}{3}\right)\left(\gamma-\frac{1}{3}\right)+\left(\gamma-\frac{1}{3}\right)^2\\&=\boldsymbol{\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma-\beta-\gamma+\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

(3) △ABC の内接円の半径を r とすると

$$\frac{1}{2}(1+1+1)r = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\sin\frac{\pi}{3} \quad \text{ゆえに} \quad r = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

点 P が点 I を中心とする △ABC の内接円上にあるとき，$|\overrightarrow{\mathrm{IP}}| = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ であるから，(2) の結果より

$$\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma - \beta - \gamma + \frac{1}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

したがって　$\beta(\beta-1) + \gamma(\gamma-1) + \beta\gamma = -\dfrac{1}{4}$

$\alpha+\beta+\gamma=1$ より，$\beta - 1 = -\gamma - \alpha$，$\gamma - 1 = -\alpha - \beta$ であるから

$$\beta(-\gamma-\alpha) + \gamma(-\alpha-\beta) + \beta\gamma = -\frac{1}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{1}{4}$$