平成14年度　長崎大学２次試験前期日程 (数学問題)
平成14年2月25日

- 教育・工学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$ 数II・III・B(120分)
- 経済・水産・環境科学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{5}$ 数II・B(80分)
- 医学部は，$\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$ 数II・III・B(100分)
- 歯・薬学部は $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ 数II・III(100分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ m を定数とするとき，関数 $f(x) = x(x^2 - 5x + m)$ $(x > 0)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $x > 0$ の範囲で関数 $f(x)$ が次の条件 (i)，(ii) を満たすような最小の整数 m を求めよ．

(i) $f(x) > 0$　　　　(ii) 極大値および極小値をもつ

(2) m を (1) で求めた整数とするするとき，関数 $f(x)$ の $\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 3$ における増減表をつくれ．

(3) m を (1) で求めた整数とするとき，関数 $\log_a f(x)$ の $\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 3$ における最大値を求めよ．ただし，$a > 0$，$a \neq 1$ とする．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 平面上の点 $\mathrm{C}(c,\ 0)$ を通る直線 $l_1 : y = m(x - c)$ を考える．ただし，c，m は定数で，$c > 0$，$m > 0$ とする．直線 l_1 上で x 軸より上側に点 A，x 軸上で点 C より右側に点 B をとるとき，次の問いに答えよ．

(1) 原点 O を通り，$\angle\mathrm{ACB}$ の 2 等分線と平行な直線 l_2 の方程式を求めよ．

(2) 2 直線 l_1，l_2 の交点 P の座標と線分 CP の長さを求めよ．

(3) 直線 l_1 の傾き m が 1 から $\sqrt{3}$ まで変化するとき，点 P が描く曲線の長さを求めよ．

3 平面上に，4点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(0,\ 1)$ を頂点とする正方形と，2つの放物線 $C_1 : y = px^2$ および $C_2 : y = -q(x-1)^2 + 1$ がある．ただし，p，q は定数で，$p > 1$，$q > 1$ とする．C_1 と C_2 が正方形の内部で接しているとき，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ の値を求めよ．

(2) 放物線 C_1 の上側にある正方形の部分の面積を S_1，放物線 C_2 の下側にある正方形の部分の面積を S_2 とするとき，$S = S_1 + S_2$ を p を用いて表せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{p\to\infty} S$ を求めよ．

(4) S が最大となる p の値と最大値を求めよ．

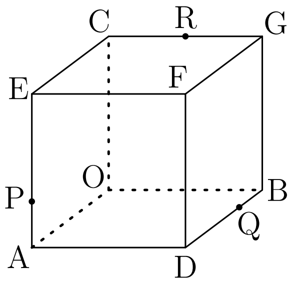
4 関数 $f(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ について考える．$\alpha > 1$ のとき，次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(t) = \alpha$ を満たす正の解を T とする．T を α を用いて表せ．

(2) $x = f(t)$，$y = f'(t)$ とするとき，次の定積分 I の値を α を用いて表せ．

$$I = \int_1^\alpha y\,dx$$

5 右図のような1辺の長さが1の立方体 OADB-CEFG がある．辺 AE および辺 BD を $x : (1-x)$ に内分する点をそれぞれ P，Q とする．また辺 CG を $t : (1-t)$ に内分する点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ．ただし，x および t の範囲は $0 < x < 1$，$0 < t < 1$ である．



(1) $\triangle$PQR の重心を S とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 直線 OS が $\triangle$PQR に垂直となるとき，t を x を用いて表せ．

(3) (2) の場合の $\triangle$PQR の面積を $f(x)$ とするとき，$f(x)$ が最小となる x の値と最小値を求めよ．

(4) $f(x)$ が最小となるとき，四面体 OPQR の体積を求めよ．

6 複素数平面上の点 z が $|z+1| = |2z-1|$ を満たして動くとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 z はどのような図形を描くか．

(2) $z-1$ の偏角を θ とするとき，$|z^2 - 4z|$ を $\cos\theta$ を用いて表せ．

(3) $|z^2 - 4z|$ が最大となる z の値と最大値を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $g(x) = x^2 - 5x + m$ とおくと　$g(x) = \left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + m - \dfrac{25}{4}$

条件 (i) により，$x > 0$ において，$g(x) > 0$ であるから

$$m - \frac{25}{4} > 0 \quad \text{すなわち} \quad m > \frac{25}{4} \quad \cdots ①$$

$f(x) = x(x^2 - 5x + m) = x^3 - 5x^2 + mx$ より　$f'(x) = 3x^2 - 10x + m$

条件 (ii) より，2 次方程式 $f'(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつから

$$D/4 = (-5)^2 - 3{\cdot}m > 0 \quad \text{ゆえに} \quad m < \frac{25}{3}$$

このとき，$f'(x) = 0$ の解を α，β とすると，$\alpha > 0$，$\beta > 0$ であるから

$$\alpha + \beta = \frac{10}{3}, \quad \alpha\beta = \frac{m}{3} > 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < m < \frac{25}{3} \quad \cdots ②$$

①，② の共通範囲を求めると　$\dfrac{25}{4} < m < \dfrac{25}{3}$

よって，上式を満たす最小の整数 m は　$\boldsymbol{m = 7}$

(2) (1) の結果から　$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x$

これを微分して　$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7 = (x - 1)(3x - 7)$

したがって，$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{7}{3}$	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{19}{8}$	$\nearrow$	極大 3	$\searrow$	極小 $\frac{49}{27}$	$\nearrow$	3

(3) **$a > 1$ のとき　最大値 $\log_a 3$ ($x = 1$ または 3 のとき)**

$0 < a < 1$ のとき　最大値 $\log_a \dfrac{49}{27}$ $\left(x = \dfrac{7}{3} \text{のとき}\right)$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) l_1 と x 軸のなす角を θ とすると　$m = \tan\theta$

このとき，l_2 の傾きを k とすると　$k = \tan\dfrac{\theta}{2}$

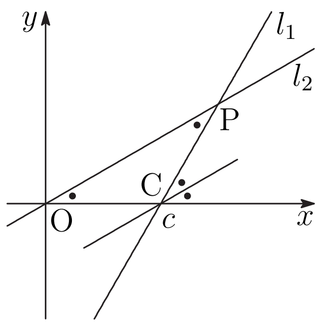
2 倍角の公式により　$\tan\theta = \dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$

したがって　$\dfrac{2k}{1-k^2} = m$　整理すると　$mk^2+2k-m=0$

$k>0$ に注意してこれを解くと　$k = \dfrac{-1+\sqrt{1+m^2}}{m}$

よって，l_2 の方程式は　$\boldsymbol{y = \left(\dfrac{-1+\sqrt{1+m^2}}{m}\right)x}$

(2) 右の図から，$\triangle$OCP は OC $=$ CP $= c$ の二等辺三角形であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = (c\cos\theta,\ c\sin\theta)$$

このとき　$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}$

$\sin\theta = \dfrac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}} = (c,\ 0) + \left(\frac{c}{\sqrt{1+m^2}},\ \frac{cm}{\sqrt{1+m^2}}\right)\\ &= \left(c+\frac{c}{\sqrt{1+m^2}},\ \frac{cm}{\sqrt{1+m^2}}\right)\end{aligned}$$

よって　$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{c+\dfrac{c}{\sqrt{1+m^2}},\ \dfrac{cm}{\sqrt{1+m^2}}}\right)$，CP $= \boldsymbol{c}$

(3) (2) の結果から，P は，C を中心とする半径 c の円周上にある．

$$m=1 \text{ のとき}\quad \theta = \frac{\pi}{4},\quad m=\sqrt{3} \text{ のとき}\quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

よって，点 P が描く曲線の長さは　$c\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right) = \boldsymbol{\dfrac{\pi c}{12}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=px^2$，$g(x)=-q(x-1)^2+1$ とおくと

$$f'(x)=2px,\quad g'(x)=-2q(x-1)$$

C_1 と C_2 の接点の x 座標を t とすると　$f(t)=g(t)$，$f'(t)=g'(t)$

したがって　$pt^2=-q(t-1)^2+1$，$2pt=-2q(t-1)$

第 1 式から　$(p+q)t^2-2qt=1-q\quad\cdots①$

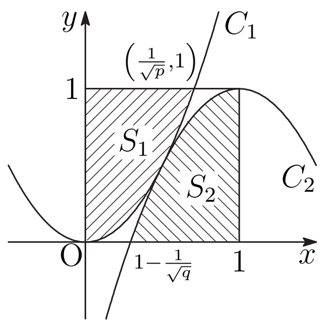
第 2 式から　$(p+q)t=q\quad\cdots②$

① $\times(p+q)$ より　$\{(p+q)t\}^2-2q\cdot(p+q)t=(p+q)(1-q)$

② をこれに代入して　$q^2-2q\cdot q=(p+q)(1-q)$

整理すると　$p+q=pq$　よって　$\boldsymbol{\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1}$

(2) C_1 と正方形の交点の x 座標は　$x=0,\ \dfrac{1}{\sqrt{p}}$



C_2 と正方形の交点の x 座標は　$x=1-\dfrac{1}{\sqrt{q}},\ 1$

したがって　$S_1=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{p}}}(1-px^2)\,dx$

$$=\left[\,x-\frac{1}{3}px^3\,\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{p}}}=\frac{2}{3\sqrt{p}}$$

$$S_2=\int_{1-\frac{1}{\sqrt{q}}}^{1}\{-q(x-1)^2+1\}\,dx$$

$$=\left[\,-\frac{q}{3}(x-1)^3+x\,\right]_{1-\frac{1}{\sqrt{q}}}^{1}=\frac{2}{3\sqrt{q}}$$

$$S=S_1+S_2=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}+\frac{1}{\sqrt{q}}\right)\quad\cdots(*)$$

上式および (1) の結果から

$$S=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}+\sqrt{\frac{1}{q}}\right)=\boldsymbol{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}+\sqrt{1-\frac{1}{p}}\right)}$$

(3) (2) の結果から　$\displaystyle\lim_{p\to\infty}S=\lim_{p\to\infty}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}+\sqrt{1-\frac{1}{p}}\right)=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$

(4) (1) の結果から

$$\left(\frac{1}{\sqrt{p}}+\frac{1}{\sqrt{q}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{p}}-\frac{1}{\sqrt{q}}\right)^2=2$$

$\dfrac{1}{\sqrt{p}}+\dfrac{1}{\sqrt{q}}$ は，上式より，$p=q=2$ のとき，最大値 $\sqrt{2}$ をとる．

$(*)$ より，S は，$\boldsymbol{p=2}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(t)=\alpha$ より，$\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}=\alpha$ であるから，$e^{2t}-2\alpha e^t+1=0$ を解いて

$$e^t=\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-1} \quad \text{すなわち} \quad t=\log(\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-1})$$

条件により，$\alpha>1$ であるから

$$\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}>1$$
$$\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}=\frac{1}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}<1$$

よって，$f(t)=\alpha$ を満たす正の解 T は　$\boldsymbol{T=\log(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})}$

(2) $x=f(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ より　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$

x	$1\longrightarrow\alpha$
t	$0\longrightarrow T$

また，$y=f'(t)$ より　$y=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}I&=\int_1^\alpha y\,dx=\int_0^T\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)dt\\&=\frac{1}{4}\int_0^T(e^{2t}+e^{-2t}-2)dt\\&=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-2t}-2t\right]_0^T=\frac{1}{8}(e^{2T}-e^{-2T})-\frac{1}{2}T\end{aligned}$$

ここで，(1) の結果から

$$e^T=\alpha+\sqrt{\alpha^2-1},\quad e^{-T}=\frac{1}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}=\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}$$
$$\begin{aligned}e^{2T}-e^{-2T}&=(e^T+e^{-T})(e^T-e^{-T})\\&=2\alpha\cdot2\sqrt{\alpha^2-1}=4\alpha\sqrt{\alpha^2-1}\end{aligned}$$

よって　$I=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}-\log(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})\}}$

別解 (1) の結果から，$0 \leqq t \leqq T$ のとき，$y = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} > 0$

また　$x^2 - y^2 = \left(\dfrac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = 1$　ゆえに　$y = \sqrt{x^2 - 1}$

ここで　$\{\log(x + \sqrt{x^2 - 1}\,)\}' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

$$(x\sqrt{x^2 - 1}\,)' = \sqrt{x^2 - 1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = 2\sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

したがって　$\{x\sqrt{x^2 - 1} - \log(x + \sqrt{x^2 - 1}\,)\}' = 2\sqrt{x^2 - 1}$

よって
$$\begin{aligned} I &= \int_1^\alpha y\,dx = \int_1^\alpha \sqrt{x^2 - 1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\Big[\, x\sqrt{x^2 - 1} - \log(x + \sqrt{x^2 - 1})\,\Big]_1^\alpha \\ &= \frac{1}{2}\{\alpha\sqrt{\alpha^2 - 1} - \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\,)\} \end{aligned}$$

5 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{a} + x\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \vec{b} + x\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \vec{c} + t\vec{b}$ であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OS}} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}}) \\ &= \frac{1}{3}\{(\vec{a} + x\vec{c}) + (\vec{b} + x\vec{a}) + (\vec{c} + t\vec{b})\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}\{(x+1)\vec{a} + (t+1)\vec{b} + (x+1)\vec{c}\}} \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = b + x\vec{a} - (\vec{a} + x\vec{c}) = (x-1)\vec{a} + \vec{b} - x\vec{c} \\ \overrightarrow{\mathrm{PR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = c + t\vec{b} - (\vec{a} + x\vec{c}) = -\vec{a} + t\vec{b} - (x-1)\vec{c} \end{aligned}$$

直線 OS が $\triangle$PQR に垂直なとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PR}}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OS}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 0$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}} = 0$ であるから

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

であることに注意して

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OS}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \frac{1}{3}\{(x+1)(x-1) + (t+1) - x(x+1)\} = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{OS}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}} &= \frac{1}{3}\{-(x+1) + t(t+1) - (x+1)(x-1)\} = 0 \end{aligned}$$

整理すると　$t = x$，$(x - t)(x + t + 1) = 0$

$0 < x < 1$，$0 < t < 1$ より，$x + t + 1 \neq 0$ であるから　$\boldsymbol{t = x}$

(3) (2) の結果から

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 = (x-1)^2 + 1 + x^2 = 2(x^2 - x + 1)$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2 = 1 + x^2 + (x-1)^2 = 2(x^2 - x + 1)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} = -(x-1)x + x + x(x-1) = x^2 - x + 1$$

したがって
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{4(x^2-x+1)^2 - (x^2-x+1)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2-x+1) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

よって，$f(x)$ は，$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{2}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{8}}$ をとる．

(4) (3) の結果から，$x = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \dfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OS}}|^2 = \frac{1}{4}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2) = \frac{3}{4} \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{\mathrm{OS}}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，求める体積は $\qquad \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3\sqrt{3}}{8} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\dfrac{3}{16}}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $|z+1|=|2z-1|$ の両辺を平方すると　$|z+1|^2=|2z-1|^2$

ゆえに　　$(z+1)(\overline{z}+1)=(2z-1)(2\overline{z}-1)$

整理すると　　$z\overline{z}-z-\overline{z}+1=1$

したがって　　$|z-1|^2=1$　すなわち　$|z-1|=1$

よって，**1 を中心とする半径 1 の円**である．

解説 $|z+1|=2|z-\frac{1}{2}|$ であるから　$|z+1|:|z-\frac{1}{2}|=2:1$

ゆえに，z は -1，$\frac{1}{2}$ を $2:1$ に内分および外分する 2 点を直径の両端とする円である (アポロニウスの円).

(2) (1) の結果から，$w=z-1=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと $(w\overline{w}=1)$

$$\begin{aligned}|z^2-4z|^2&=|(w+1)^2-4(w+1)|^2=|w^2-2w-3|^2\\&=(w^2-2w-3)(\overline{w}^2-2\overline{w}-3)\\&=-3(w^2+\overline{w}^2)+4(w+\overline{w})+14\\&=-3(w+\overline{w})^2+4(w+\overline{w})+20\end{aligned}$$

ここで，$w+\overline{w}=(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta-i\sin\theta)=2\cos\theta$ であるから

$$\begin{aligned}|z^2-4z|^2&=-3(2\cos\theta)^2+4\cdot 2\cos\theta+20\\&=\boldsymbol{-12\cos^2\theta+8\cos\theta+20}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　$|z^2-4z|^2=-12\left(\cos\theta-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{64}{3}$

ゆえに，$|z^2-4z|$ は $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき最大となる.

このとき，$\sin\theta=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$z=(1+\cos\theta)+i\sin\theta$ であるから，

$|z^2-4z|$ は，$\boldsymbol{z=\dfrac{4}{3}\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}i}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{8\sqrt{3}}{3}}$ をとる.