平成 13 年度　長崎大学２次試験前期日程 (数学問題)
平成 13 年 2 月 25 日

- 教育・工学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$ 数 II・III・B(120 分)
- 経済・環境科学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{5}$ 数 II・B(80 分)
- 医学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ 数 II・III・B(100 分)
- 歯・薬学部は $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ 数 II・III(100 分)
- 水産学部は $\boxed{1}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ 数 II・III・B(100 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3kx$ (k は定数) を考える．次の問いに答えよ．

(1) $y = f(x)$ が極大値，極小値をもつような k の値の範囲を求めよ．

(2) $y = f(x)$ の極大値と極小値の差が 4 となる k の値を求めよ．

(3) (2) の場合について $y = f(x)$ のグラフをかけ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 放物線 $y = x^2$ について，傾きが $\sqrt{3}$ の接線 l の方程式およびその接点 P の座標を求めよ．

(2) y 軸上に中心をもち，P において l に接する円の方程式を求めよ．

(3) (1) の放物線と (2) の円の下の弧とによって囲まれた部分の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 三角関数の加法定理を用いて $\cos A - \cos B$ を積の形になおせ．

(2) $\cos 3\theta < \cos 2\theta$ を満たす θ の値の範囲を求めよ．($0° \leqq \theta < 360°$)

(3) $y = \cos 2\theta$，$y = \cos 3\theta$ のグラフをかけ．ただし，2 つのグラフの交点の y 座標は求めなくてよい．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 曲線 $y = \dfrac{1}{x+1}$ と x 軸および 2 直線 $x = k$，$x = 2k$ (ただし $k > 0$) で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を $V(k)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $V(k)$ を求めよ．

(2) $V(k)$ の最大値とそのときの k の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ xyz 空間に点 A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1)，D(1, 1, 1) をとる．点 A，B，C，D を頂点とする四面体 T について，次の問いに答えよ．

(1) z 軸上の点 $(0,\ 0,\ a)$ を通り z 軸に垂直な平面で T を切ったときの切り口の頂点 P，Q，R，S の座標を，a を用いて表せ．ただし，a は $0 < a < 1$ なる定数とし，P，Q，R，S はそれぞれ線分 AC，AD，BD，BC 上にあるものとする．

(2) (1) における切り口の面積 $S(a)$ と，その最大値，およびそのときの a の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 複素数 $z = x + yi$ (x, y は実数) について，次の問いに答えよ．

(1) z^4 が 0 でない実数であるとき，z の偏角 α を求めよ．($0^\circ \leqq \alpha < 360^\circ$)

(2) $(z-1)^3$ が純虚数であるとき，$z-1$ の偏角 β を求めよ．($0^\circ \leqq \beta < 360^\circ$)

(3) $x > 0$，$y > 0$ で z^4 が実数，$(z-1)^3$ が純虚数となるときの z^4 をすべて求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3kx$ を微分すると

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 3k = 3(x^2 - 4x + k)$$

$f'(x) = 0$ とすると　$x^2 - 4x + k = 0$　$\cdots$①

2 次方程式 ① の判別式を D とすると

$$D/4 = (-2)^2 - 1 \cdot k = 4 - k > 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{k < 4}$$

(2) $f'(x) = 0$ の解を α，β とすると $(\alpha < \beta)$

$$\alpha + \beta = 4, \quad \alpha\beta = k,$$
$$\beta - \alpha = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{4^2 - 4k} = 2\sqrt{4 - k}$$

また　$f(x) = \dfrac{1}{3}(x - 2)f'(x) + (2k - 8)x + 2k$

$f(\alpha)$ が最大値，$f(\beta)$ が最小値であるから

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= (2k - 8)(\alpha - \beta) = 2(4 - k)(\beta - \alpha) \\ &= 2(4 - k) \cdot 2\sqrt{4 - k} = 4(\sqrt{4 - k}\,)^3 \end{aligned}$$

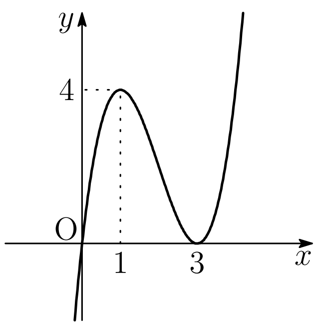
$f(\alpha) - f(\beta) = 4$ であるから　$4(\sqrt{4 - k}\,)^3 = 4$　よって　$\boldsymbol{k = 3}$

(3) $k = 3$ のとき　$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x - 3)^2$

$$f'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$$

したがって，$f(x)$ の増減表および $y = f(x)$ のグラフは，次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$



$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$

接点 P の x 座標は　$2x=\sqrt{3}$　すなわち　$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，接点 P の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)}$

l は点 P を通り，傾き $\sqrt{3}$ の直線であるから

$$y-\frac{3}{4}=\sqrt{3}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=\sqrt{3}x-\frac{3}{4}}$$

(2) P を通り，l に垂直な直線は

$$y-\frac{3}{4}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\quad \text{すなわち}\quad y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{5}{4}$$

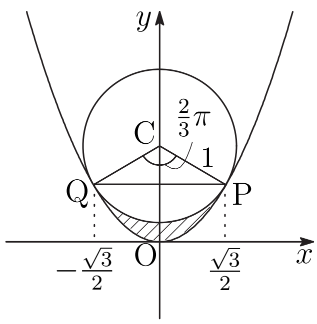
求める円の中心 C は，この直線と y 軸との交点であるから　$\mathrm{C}\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$

また，円の半径は　$\mathrm{CP}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2+\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{4}\right)^2}=1$

よって，求める円の方程式は　$\boldsymbol{x^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=1}$

(3) (2) で求めた円と放物線 $y=x^2$ と P 以外の接点を Q とすると　$\angle\mathrm{PCQ}=\dfrac{2}{3}\pi$

この角を中心角とする扇形から $\triangle\mathrm{PCQ}$ の部分を除いた面積を S_1 とすると



$$S_1=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\cdot 1^2\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

放物線 $y=x^2$ と線分 PQ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$S_2=\frac{1}{6}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^3=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，求める面積を S とすると

$$S=S_2-S_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\boldsymbol{\frac{3}{4}\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 加法定理により

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

上の 2 式の辺々を引くと

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$$

ここで，$\alpha+\beta = A$，$\alpha-\beta = B$ とおくと

$$\alpha = \frac{A+B}{2}, \quad \beta = \frac{A-B}{2}$$

よって　$\boldsymbol{\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}$

(2) (1) の結果から

$$\cos 3\theta - \cos 2\theta = -2\sin\frac{5}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2} < 0 \quad ゆえに \quad \sin\frac{5}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2} > 0 \quad \cdots(*)$$

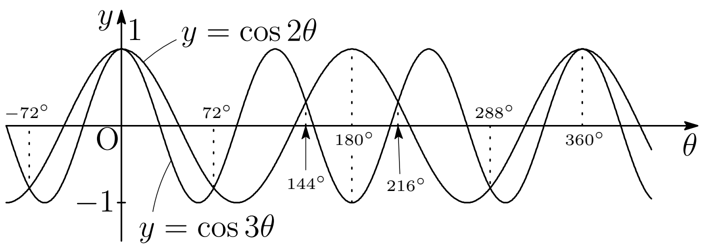
$(*)$ より，$\theta \neq 0^\circ$ であるから，$0^\circ < \theta < 360^\circ$ のとき　$\sin\frac{\theta}{2} > 0$

したがって，$0 < \frac{\theta}{2} < 900^\circ$ のとき，$\sin\frac{5}{2}\theta > 0$ を解くと

$$0^\circ < \frac{5}{2}\theta < 180^\circ, \quad 360^\circ < \frac{5}{2}\theta < 540^\circ, \quad 720^\circ < \frac{5}{2}\theta < 900^\circ$$

よって　$\boldsymbol{0^\circ < \theta < 72^\circ,\ 144^\circ < \theta < 216^\circ,\ 288^\circ < \theta < 360^\circ}$

(3)



$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $k>0$ より，求める体積 $V(k)$ は

$$V(k)=\pi\int_k^{2k}\left(\frac{1}{x+1}\right)^2dx=\pi\left[-\frac{1}{x+1}\right]_k^{2k}$$
$$=\pi\left(-\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{k+1}\right)=\boldsymbol{\frac{k\pi}{(k+1)(2k+1)}}$$

(2) $V(k)=\pi\left(-\dfrac{1}{2k+1}+\dfrac{1}{k+1}\right)$ を微分すると

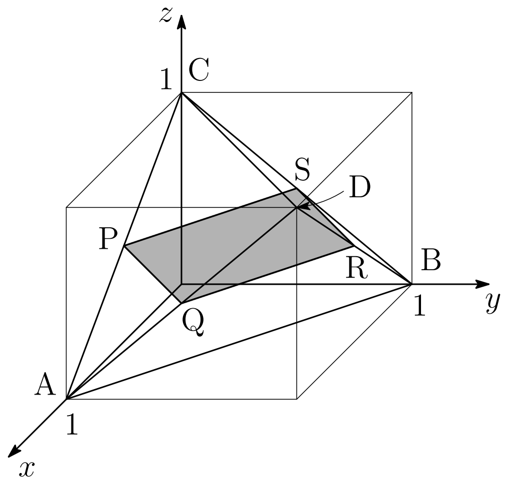
$$V'(k)=\pi\left\{\frac{2}{(2k+1)^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right\}$$
$$=\pi\frac{-2k^2+1}{(k+1)^2(2k+1)^2}=\frac{-\pi(\sqrt{2}k+1)(\sqrt{2}k-1)}{(k+1)^2(2k+1)^2}$$

$V(k)$ の増減表は，次のようになる．

k	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$V'(k)$		$+$	0	$-$
$V(k)$	(0)	$\nearrow$	$(3-2\sqrt{2}\,)\pi$	$\searrow$

よって　$\boldsymbol{k=\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{(3-2\sqrt{2}\,)\pi}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 4点P，Q，R，Sは，それぞれ線分AC，AD，BD，BCを$a:1-a$に内分する点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-a)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+a\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1-a)(1,\ 0,\ 0)+a(0,\ 0,\ 1)=(1-a,\ 0,\ a)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-a)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+a\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-a)(1,\ 0,\ 0)+a(1,\ 1,\ 1)=(1,\ a,\ a)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-a)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+a\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-a)(0,\ 1,\ 0)+a(1,\ 1,\ 1)=(a,\ 1,\ a)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(1-a)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+a\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1-a)(0,\ 1,\ 0)+a(0,\ 0,\ 1)=(0,\ 1-a,\ a)$$

よって　$\mathbf{P}(\mathbf{1}-\boldsymbol{a},\ \mathbf{0},\ \boldsymbol{a})$，$\mathbf{Q}(\mathbf{1},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a})$，$\mathbf{R}(\boldsymbol{a},\ \mathbf{1},\ \boldsymbol{a})$，$\mathbf{S}(\mathbf{0},\ \mathbf{1}-\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a})$

(2) (1)の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(a,\ a,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{SR}}=(a,\ a,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{PS}}=(a-1,\ 1-a,\ 0)$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PS}}=0$

したがって，切り口の面積$S(a)$は$(0<a<1)$

$$S(a)=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{PS}}|=\sqrt{2}a\cdot\sqrt{2}(1-a)$$
$$=-2a^2+2a=-2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

よって　$\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$のとき最大値$\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\arg z^4 = 4\arg z = 4\alpha$

z^4 が実数であるから，$\arg z^4 = 180° \times m$ 　(m は整数)

したがって　$4\alpha = 180° \times m$ 　ゆえに　$\alpha = 45° \times m$

$0° \leqq \alpha < 360°$ であるから

$$\boldsymbol{\alpha = 0°,\ 45°,\ 90°,\ 135°,\ 180°,\ 225°,\ 270°,\ 315°}$$

(2) $\arg(z-1)^3 = 3\arg(z-1) = 3\beta$

$(z-1)^3$ が純虚数であるから　$\arg(z-1)^3 = 90° \times (2n-1)$ 　(n は整数)

したがって　$3\beta = 90° \times (2n-1)$ 　ゆえに　$\beta = 30° \times (2n-1)$

$0° \leqq \beta < 360°$ であるから

$$\boldsymbol{\beta = 30°,\ 90°,\ 150°,\ 210°,\ 270°,\ 330°}$$

(3) $z = x + yi$ は $x > 0$，$y > 0$ であるから，(1) の結果より　$\arg z = 45°$

ゆえに，$z = x + xi$ $(x > 0)$ とおける．$z - 1 = (x-1) + xi$ であるから

$$\begin{aligned}(z-1)^3 &= \{(x-1)+xi\}^3\\ &= (x-1)^3 - 3(x-1)x^2 + \{3(x-1)^2x - x^3\}i\\ &= (-2x^3+3x-1) + (2x^3-6x^2+3x)i\\ &= -(x-1)(2x^2+2x-1) + x(2x^2-6x+3)i\end{aligned}$$

$(z-1)^3$ が純虚数であるから　$(x-1)(2x^2+2x-1) = 0$

$x > 0$ に注意して，これを解くと　$x = 1,\ \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

$x = 1$ のとき $z = \sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)$ であるから

$$z^4 = (\sqrt{2}\,)^4(\cos 180° + i\sin 180°) = \mathbf{-4}$$

$x = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ のとき $z = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}(\cos 45° + i\sin 45°)$ であるから

$$z^4 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^4(\cos 180° + i\sin 180°) = \boldsymbol{4\sqrt{3}-7}$$