令和６年度　宮崎大学２次試験前期日程 (数学問題)
工 (物質環境化学を除く)・医 (医)・農・教育 (中学数学・中学社会・理科・技術・家庭・初等教育・特別支援・社会システム) 学部
令和６年２月25日

- 工学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部　$\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ $\boxed{10}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 教育 (小主免理系・中主免理系) 学部　$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{7}$ 必答，
  $\boxed{1}$ (**計算過程も記述**) $\boxed{11}$ から 1 問選択．数 I・II・III・A・B (90 分)
- 教育 (小主免理系・中主免理系を除く) 学部・農学部　$\boxed{3}$ $\boxed{12}$ $\boxed{13}$
  数 I・II・A・B (90 分)

$\boxed{1}$ 次の空欄 $\boxed{\text{あ}}$ ～ $\boxed{\text{お}}$ を適切な数または数式で埋めよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(1) 関数 $f(x) = x\sin(1-x)$ の導関数は，$f'(x) = \boxed{\text{あ}}$ である．

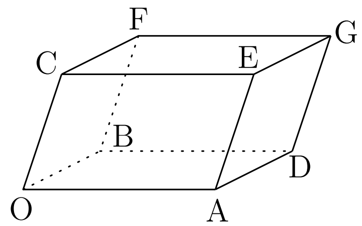
(2) 関数 $f(x) = e^{\frac{x}{1+x}}$ の導関数は，$f'(x) = \boxed{\text{い}}$ である．

(3) 関数 $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$ の不定積分は，$\displaystyle\int f(x)\,dx = \boxed{\text{う}} + C$ である．ただし，C は積分定数とする．

(4) 関数 $f(x) = x^2\log x$ の不定積分は，$\displaystyle\int f(x)\,dx = \boxed{\text{え}} + C$ である．ただし，C は積分定数とする．

(5) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\frac{x}{4}\,dx$ の値は，$\boxed{\text{お}}$ である．

$\boxed{2}$ 右図のように，3 組の向かい合った面がそれぞれ平行である六面体を平行六面体という．座標空間の 4 点 O(0, 0, 0)，A(4, −2, 6)，B(2, −6, 4)，C(7, −1, −5) に対して，四角形 OADB，OAEC，OBFC，CEGF がすべて平行四辺形となるように，4 点 D，E，F，G をとる．立体 OADB-CEGF は平行六面体となる．このとき，次の各問に答えよ．



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ をそれぞれ成分表示せよ．

(3) 平行六面体 OADB-CEGF の体積を求めよ．

3 AとBの2人が，赤玉3個，白玉9個の合計12個の玉が入った袋から，次のようにして，最大6回玉を取り出すゲームを行う．

- 1回目はAが1個，2回目はBが1個，3回目はAが2個，4回目はBが2個，5回目はAが3個，6回目はBが3個，袋から玉を取り出す．ただし，複数個の玉を取り出すときは，同時に取り出すとする．
- AとBのどちらかが赤玉を取り出したならば，その時点でゲームを終了する．

このとき，次の各問に答えよ．

(1) 毎回，取り出した玉を戻すとする．このとき，3回目でAが赤玉を取り出してゲームが終了する確率を求めよ．

(2) 毎回，取り出した玉を袋に戻さないとする．このとき，Aが赤玉を取り出してゲームが終了する確率を求めよ．

4 座標平面上に2点A(4, 1)，B(8, 4)と，円 $x^2+y^2=1$ 上を動く点Pがある．△ABPの重心をGとするとき，次の各問に答えよ．

(1) 点Gの軌跡を求めよ．

(2) △ABGの面積の最小値を求めよ．

5 関数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ および座標平面上の曲線 $C: y=f(x)$ について，次の各問に答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第2次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ を求めよ．

(3) $f(x) \leqq 0$ となる x の値の範囲を $a \leqq x \leqq b$ とするとき，a と b の値を求めよ．さらに，定積分 $I=\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x^2+1}\,dx$ の値を，$x=\tan\theta$ とおくことにより求めよ．

(4) 関数 $f(x)$ の増減，極値，曲線 C の凹凸，変曲点および漸近線を調べて，曲線 C の概形をかけ．

(5) 曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

$\boxed{6}$ $a,\ b,\ c$ を整数とし，

$$
\begin{aligned}
P &= a+b+c \\
Q &= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \\
R &= a^3+b^3+c^3-3abc
\end{aligned}
$$

とおく．このとき，次の各問に答えよ．

(1) P が 3 の倍数ならば，Q は 3 の倍数となることを示せ．

(2) Q が 3 の倍数ならば，P は 3 の倍数となることを示せ．

(3) R が 3 の倍数ならば，R は 9 の倍数でもあることを示せ．

$\boxed{7}$ $0 \leqq \theta < \pi$ とする．$t = \cos\theta$ とするとき，次の各問に答えよ．

(1) $\cos 4\theta$ を t の式で表せ．

(2) $\cos 4\theta = \cos\theta$ を満たすような t の値をすべて求めよ．

(3) $\sin^2 \dfrac{2}{5}\pi + \sin^2 \dfrac{4}{5}\pi$ の値を求めよ．

$\boxed{8}$ 1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，△ABC の重心を G，線分 BC を 1 : 3 に内分する点を D とする．また，直線 AB 上にあり，$\overrightarrow{\mathrm{GD}} \perp \overrightarrow{\mathrm{GE}}$ を満たす点を E とする．このとき，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ として，次の各問に答えよ．

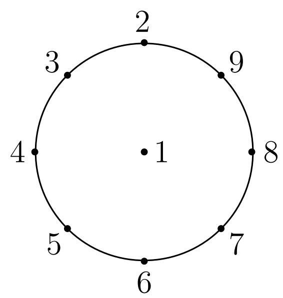
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{GD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{GE}}$ のそれぞれを，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．また，$|\overrightarrow{\mathrm{GD}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{GE}}|$ の値をそれぞれ求めよ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\vec{b}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\vec{c}$ の値をそれぞれ求めよ．

(4) P を平面 ABC 上の点とする．また，点 P は，直線 GD で平面 ABC を 2 つに分けたときに，点 E と同じ側にあるとする．△DGP の面積が 1 のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GE}}$ の値を求めよ．

9 平面上に固定された円があり，円周上に点が8つ，円周を8等分するようにとられている．さらに，右図のように，番号1は円の中心を表し，番号2〜9はそれぞれ，円周上の点を表すとする．1から9までの番号が1つずつ書かれた9枚のカードがあり，A，B，Cの3人が，司会者のもとで次のゲームを行う．



司会者は，9枚のカードから無作為に3枚をとってAに渡し，続いて，残り6枚のカードから無作為に3枚をとってBに渡し，続いて，残った3枚のカードをCに渡す．Aは，受け取ったカードに書かれた番号が表す3点のうちのどの2点も線分で結ぶ．BもCも，Aと同じことを行う．このようにして，3人それぞれが図形を作る．

このとき，次の各問に答えよ．

(1) Aの作る図形が三角形でない確率を求めよ．

(2) 3人の作る図形がいずれも三角形である確率を求めよ．

(3) このゲームを4回行ったとき，次の6つの条件 ①〜⑥ がすべて満たされるとする．ただし，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{9}$ はそれぞれ，1〜9の番号が書かれたカードを表す．

① ある回で誰かに線分で結ばれたことのある2点は，他のどの回においても誰にも結ばれない

② Aの作る図形は4回とも三角形ではない

③ 1回目に，Bは $\boxed{3}$ を受け取る

④ 2回目に，Bは $\boxed{2}$ と $\boxed{4}$ を，Cは $\boxed{5}$ と $\boxed{6}$ を受け取る

⑤ 3回目に，Bは $\boxed{2}$ と $\boxed{3}$ を，Cは $\boxed{6}$ と $\boxed{7}$ を受け取る

⑥ 4回目に，Cは $\boxed{2}$ と $\boxed{8}$ を受け取る

このとき，A，B，Cのそれぞれが各回でどの番号のカードを受け取ったかを答えよ．ただし，例えば，ある回でAが $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ ，Bが $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ ，Cが $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{9}$ を受け取ったときは，

A				B				C		
1	2	3		4	5	6		7	8	9

のように解答欄に記すとし，解答欄において番号の書かれていない部分のみを埋めよ．なお，受け取ったカードの組み合わせが正しければ，その番号の並び順は問わない．

10 関数 $f(x) = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}$ $(-1 < x < 1)$ および座標平面上の曲線 $C : y = f(x)$ について，次の各問に答えよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-1+0} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} f(x)$ を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ の増減，極値，曲線 C の凹凸，変曲点および漸近線を調べて，曲線 C の概形をかけ．

(4) 関係式 $y = f(x)$ について，x を y の式で表せ．また，$\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1}{e^y + e^{-y}}\right)$ を求めよ．

(5) 曲線 C と x 軸，直線 $x = 1$ および直線 $y = \alpha$ $(\alpha > 0)$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を $V(\alpha)$ とする．このとき，$V(\alpha)$ および $\displaystyle\lim_{\alpha\to\infty} V(\alpha)$ を求めよ．

11 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を

$$(2+\sqrt{3})^n = a_n + \sqrt{3}b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たす自然数の数列とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) すべての自然数 n に対して，$(2-\sqrt{3})^n = a_n - \sqrt{3}b_n$ が成り立つことを示せ．

(2) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = \dfrac{a_n}{b_n} - \sqrt{3}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ により定める．このとき，すべての自然数 n に対して，$c_n > c_{n+1}$ が成り立つことを示せ．

12 次の各問に答えよ．

(1) a，b，c を整数とする．$a+b+c$ が 3 の倍数ならば，$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ は 3 の倍数となることを示せ．

(2) x についての方程式 $(\log_2 x)(\log_{32} x)+\log_4 x+\dfrac{3}{10}=0$ を解け．

(3) 座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(4,\ 1)$，$\mathrm{B}(8,\ 4)$ と，円 $x^2+y^2=1$ を動く点 P がある．このとき，$\triangle\mathrm{ABP}$ の重心 G の軌跡を求めよ．

13 座標平面上に放物線 $C_1 : y=\dfrac{1}{2}x^2$ がある．また，C_1 上の点 $\mathrm{A}\left(\sqrt{3},\ \dfrac{3}{2}\right)$ における C_1 の接線を l とする．さらに，点 A において l と接し，点 $\mathrm{B}(\sqrt{3},\ 0)$ を通る円を C_2 とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 直線 l の方程式を求めよ．

(2) 円 C_2 の中心 D の座標を求めよ．

(3) 曲線 C_1，C_2 および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x) = x\sin(1-x)$ を微分すると

$$f'(x) = (x)'\sin(1-x) + x\{\sin(1-x)\}' \\ = \sin(1-x) - x\cos(1-x)$$

(あ) $\boldsymbol{\sin(1-x) - x\cos(1-x)}$

(2) $f(x) = e^{\frac{x}{1+x}}$ を微分すると

$$f'(x) = e^{\frac{x}{1+x}}\left(\frac{x}{1+x}\right)' = e^{\frac{x}{1+x}}\cdot\frac{(x)'(1+x) - x(1+x)'}{(1+x)^2} = \frac{e^{\frac{x}{1+x}}}{(1+x)^2}$$

(い) $\boldsymbol{\dfrac{e^{\frac{x}{1+x}}}{(1+x)^2}}$

(3) $\{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\}' = \dfrac{3}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}(1+x^2)' = 3x\sqrt{1+x^2} = 3f(x)$ より

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

(う) $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

(4) $(x^3\log x)' = 3x^2\log x + x^3\cdot\dfrac{1}{x} = 3x^2\log x + x^2$ より

$$3f(x) = 3x^2\log x = (x^3\log x)' - x^2 = \left(x^3\log x - \frac{x^3}{3}\right)'$$

よって $\displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{x^3}{3}\log x - \frac{x^3}{9} + C$

(え) $\boldsymbol{\dfrac{x^3}{3}\log x - \dfrac{x^3}{9}}$

(5) $$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\frac{x}{4}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)dx \\ = \frac{1}{2}\left[\,x + 2\sin\frac{x}{2}\,\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}$$

(お) $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{2}}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (4, -2,\ 6)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (2, -6,\ 4)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (7, -1, -5)$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} &= 4\cdot 2 + (-2)\cdot(-6) + 6\cdot 4 = \mathbf{44}\\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= 4\cdot 7 + (-2)\cdot(-1) + 6\cdot(-5) = \mathbf{0}\\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= 2\cdot 7 + (-6)\cdot(-1) + 4\cdot(-5) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

(2) 立体 OADB-CEGF は平行六面体であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (4, -2,\ 6) + (2, -6,\ 4) = \mathbf{(6, -8, 10)}\\ \overrightarrow{\mathrm{OE}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = (4, -2,\ 6) + (7, -1, -5) = \mathbf{(11, -3,\ 1)}\\ \overrightarrow{\mathrm{OF}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = (2, -6,\ 4) + (7, -1, -5) = \mathbf{(9, -7, -1)}\\ \overrightarrow{\mathrm{OG}} &= \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{DG}} = (6, -8,\ 10) + (7, -1, -5) = \mathbf{(13, -9,\ 5)}\end{aligned}$$

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$ をそれぞれ求めると

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 &= 4^2 + (-2)^2 + 6^2 = 56,\\ |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 &= 2^2 + (-6)^2 + 4^2 = 56\\ |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 &= 7^2 + (-1)^2 + (-5)^2 = 75\end{aligned}$$

平行四辺形 OADB の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S &= \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}\\ &= \sqrt{56\cdot 56 - 44^2} = \sqrt{(56+44)(56-44)}\\ &= \sqrt{100\cdot 12} = 20\sqrt{3}\end{aligned}$$

(1) の結果より，OA⊥OC，OB⊥OC であるから，求める体積は

$$S|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 20\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{3} = \mathbf{300}$$

別解 求める体積を V とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (28, -4, -20)$ より

$$V = |(\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 300$$

補足 $V = |(\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = |(\overrightarrow{\mathrm{OB}} \times \overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |(\overrightarrow{\mathrm{OC}} \times \overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ ■

3 (1) 1 回目，2 回目がともに白玉を取り出し，3 回目に赤玉を取り出す確率であるから

$$\frac{9}{12} \times \frac{9}{12} \times \left(1 - \frac{{}_9\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_2}\right) = \boldsymbol{\frac{45}{176}}$$

(2) A が赤玉を取り出してゲームが終了するのは 1 回目，3 回目，5 回目である．

(i) 1 回目に終了する確率は

$$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

(ii) 3 回目に終了する確率は

$$\frac{9}{12} \times \frac{8}{11} \times \left(1 - \frac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\right) = \frac{16}{55}$$

(iii) 5 回目に終了する確率は

$$\frac{9}{12} \times \frac{8}{11} \times \frac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2} \times \frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2} \times \left(1 - \frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}\right) = \frac{19}{220}$$

(i)〜(iii) は互いに排反であるから

$$\frac{1}{4} + \frac{16}{55} + \frac{19}{220} = \boldsymbol{\frac{69}{110}}$$

■

4 (1) 円 $x^2+y^2=1$ 上の点 P の座標を $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とする．
A(4, 1)，B(8, 4) より，△ABP の重心 G$(x,\ y)$ は

$$x=\frac{4+8+\cos\theta}{3},\quad y=\frac{1+4+\sin\theta}{3}$$

$x-4=\dfrac{\cos\theta}{3}$, $y-\dfrac{5}{3}=\dfrac{\sin\theta}{3}$ より，点 G の軌跡の方程式は

$$(x-4)^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

よって　G の軌跡は**中心 $\left(\boldsymbol{4,\ \frac{5}{3}}\right)$，半径 $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$ の円**

(2) 2 点 A(4, 1)，B(8, 4) を通る直線の方程式は

$$y-1=\frac{4-1}{8-4}(x-4)\quad すなわち\quad 3x-4y-8=0$$

点 $\left(4,\ \dfrac{5}{3}\right)$ から直線 AB までの距離を d とすると

$$d=\frac{\left|3\cdot 4-4\cdot\frac{5}{3}-8\right|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{8}{15}$$

$\mathrm{AB}=\sqrt{(8-4)^2+(4-1)^2}=5$ より，△ABG の面積の最小値は

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}\left(d-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot 5\left(\frac{8}{15}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{1}{5}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

■

5 (1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=1-\dfrac{2}{x^2+1}=1-2(x^2+1)^{-1}$ より

$$f'(x)=4x(x^2+1)^{-2}=\boldsymbol{\frac{4x}{(x^2+1)^2}}$$

$$\begin{aligned}f''(x)&=4(x^2+1)^{-2}+4x\cdot(-4x)(x^2+1)^{-3}\\&=\frac{4(x^2+1)-16x^2}{(x^2+1)^3}=\boldsymbol{\frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}}\end{aligned}$$

(2) $f(x)=1-\dfrac{2}{x^2+1}$ より　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\mathbf{1}$,　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\mathbf{1}$

(3) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2+1} \leqq 0$　これを解いて　$-1 \leqq x \leqq 1$

よって　$\boldsymbol{a = -1,\ b = 1}$

$x = \tan\theta$ より $(-1 \leqq x \leqq 1)$　$\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

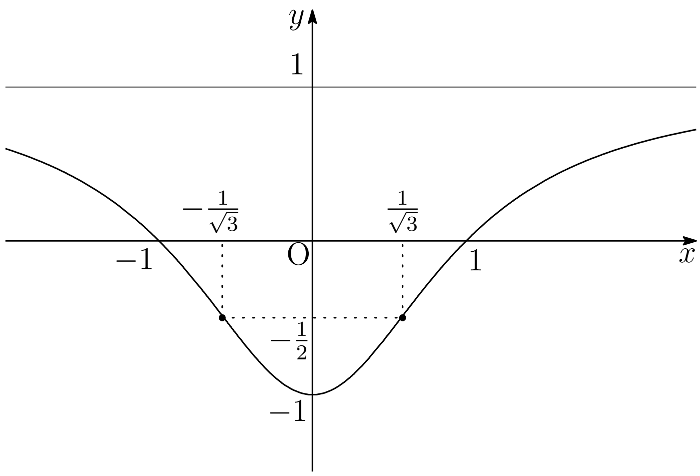
x	$-1 \longrightarrow 1$
θ	$-\frac{\pi}{4} \ \to \ \frac{\pi}{4}$

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

(4) (1)，(2) の結果から

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	変曲点	$\searrow$	極小	$\nearrow$	変曲点	$\nearrow$

極小値 $f(0) = \boldsymbol{-1}$，変曲点 $\left(\boldsymbol{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}}\right)$



(5) (3) の結果を利用すると

$$S = -\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{x^2+1} - 1\right) dx$$
$$= 2I - \int_{-1}^{1} dx = \boldsymbol{\pi - 2}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1)

$$\begin{aligned} Q &= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \\ &= (a+b+c)^2-3(ab+bc+ca) \\ &= P^2-3(ab+bc+ca) \end{aligned}$$

上式から

$$P\text{ が }3\text{ の倍数} \quad \Longrightarrow \quad Q\text{ は }3\text{ の倍数} \tag{A}$$

P が 3 の倍数のとき，Q は 3 の倍数である．

(2) $P^2 = Q+3(ab+bc+ca)$ より，Q が 3 の倍数のとき，P^2 は 3 の倍数であるから，P は 3 を因数にもつ．したがって

$$Q\text{ が }3\text{ の倍数} \quad \Longrightarrow \quad P\text{ は }3\text{ の倍数} \tag{B}$$

(3)

$$\begin{aligned} R &= a^3+b^3+c^3-3abc \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= PQ \end{aligned} \tag{$*$}$$

R が 3 の倍数ならば，$(*)$ より，P または Q が 3 の倍数．
このとき，(A)，(B) より，P，Q はともに 3 の倍数である．
よって，R が 3 の倍数ならば，R は 9 の倍数である． ■

$\boxed{7}$ (1) $t=\cos\theta$ より

$$\begin{aligned}\cos 4\theta &= 2\cos^2 2\theta - 1 = 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1\\ &= 2(4\cos^4\theta - 4\cos^2\theta + 1) - 1\\ &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1 = \boldsymbol{8t^4 - 8t^2 + 1}\end{aligned}$$

(2) $\cos 4\theta = \cos\theta$ に (1) の結果を代入すると

$$8t^4 - 8t^2 + 1 = t \quad \text{ゆえに} \quad (t-1)(2t+1)(4t^2+2t-1) = 0 \qquad (*)$$

よって $\boldsymbol{t = 1, -\frac{1}{2}, \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}}$

(3) $\frac{2}{5}\pi = \theta$ とおくと，$5\theta = 2\pi$ より，$\cos 4\theta = \cos(2\pi - \theta) = \cos\theta$

$0 < \cos\theta < 1$ より，(2) の結果から，$\cos\theta = t$ とおくと

$$t = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad 4t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$\begin{aligned}\sin^2\theta + \sin^2 2\theta &= \sin^2\theta(1 + 4\cos^2\theta) = (1-t^2)(1+4t^2)\\ &= \left(1 - \frac{1-2t}{4}\right)(2-2t)\\ &= \frac{1}{2}(3+2t)(1-t) = \frac{1}{2}(3 - t - 2t^2)\\ &= \frac{1}{2}\left(3 - t - \frac{1-2t}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{5}{4}}\end{aligned}$$

■

$\boxed{8}$ (1) G は △ABC の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\boldsymbol{\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})}$$

(2) △ABC は，1 辺の長さが 1 の正三角形であるから

$$|\vec{b}|=|\vec{c}|=1,\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\frac{\pi}{3}=1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

D は線分 BC を 1 : 3 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{4}(3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\frac{1}{4}(3\vec{b}+\vec{c})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{GD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{1}{4}(3\vec{b}+\vec{c})-\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})=\boldsymbol{\frac{1}{12}(5\vec{b}-\vec{c})}$$

E は線分 AB 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=k\vec{a}$ とすると (k は実数)

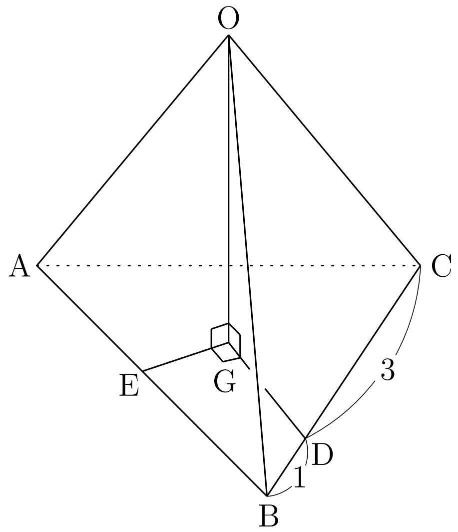
$$\overrightarrow{\mathrm{GE}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AG}}=k\vec{b}-\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{3}\{(3k-1)\vec{b}-\vec{c}\}$$

$\overrightarrow{\mathrm{GD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{GE}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{GD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GE}}=0$ であるから

$$\begin{aligned}(5\vec{b}-\vec{c})\cdot\{(3k-1)\vec{b}-\vec{c}\}&=5(3k-1)|\vec{b}|^2-(3k+4)\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2\\&=5(3k-1)-\frac{1}{2}(3k+4)+1\\&=\frac{3}{2}(9k-4)=0\end{aligned}$$

これを解いて　$k=\dfrac{4}{9}$　すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{4}{9}\vec{b}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{GE}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{4}{9}\vec{b}-\dfrac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})=\boldsymbol{\dfrac{1}{9}(\vec{b}-3\vec{c})}$



$\overrightarrow{\mathrm{GD}} = \dfrac{1}{12}(5\vec{b} - \vec{c})$，$\overrightarrow{\mathrm{GE}} = \dfrac{1}{9}(\vec{b} - 3\vec{c})$ より

$$\begin{aligned}|5\vec{b} - \vec{c}|^2 &= 25|\vec{b}|^2 - 10\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2 \\ &= 25\cdot1^2 - 10\cdot\frac{1}{2} + 1^2 = 21, \\ |\vec{b} - 3\vec{c}|^2 &= |\vec{b}|^2 - 6\vec{b}\cdot\vec{c} + 9|\vec{c}|^2 \\ &= 1^2 - 6\cdot\frac{1}{2} + 9\cdot1^2 = 7\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{GD}}| = \dfrac{\sqrt{21}}{12}}$，$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{GE}}| = \dfrac{\sqrt{7}}{9}}$

(3) $\triangle$ABC は正三角形であるから，$\triangle$ABC の重心と外心は一致する．
O から平面 ABC に垂線 OH を引くと，$\triangle\mathrm{OAH} \equiv \triangle\mathrm{OBH} \equiv \triangle\mathrm{OCH}$ であるから，AH = BH = CH より，H は $\triangle$ABC の外心である．
G と H は一致するから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\vec{c}\quad \text{よって}\quad \overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\vec{c} = \mathbf{0}$$

(4) 点 P から直線 GE に垂線 PQ を引くと

$$\triangle\mathrm{DGP} = \triangle\mathrm{DGQ} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{GD}}||\overrightarrow{\mathrm{GQ}}| = 1\quad \text{ゆえに}\quad |\overrightarrow{\mathrm{GQ}}| = \frac{2}{|\overrightarrow{\mathrm{GD}}|}$$

$\overrightarrow{\mathrm{GQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{GE}}$ は同じ向きのベクトルであることに注意して

$$\overrightarrow{\mathrm{GQ}} = |\overrightarrow{\mathrm{GQ}}|\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{GE}}}{|\overrightarrow{\mathrm{GE}}|} = \frac{2}{|\overrightarrow{\mathrm{GD}}|}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{GE}}}{|\overrightarrow{\mathrm{GE}}|}$$

$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{GD}}$ は平行であるから，実数 ξ を用いて　$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \xi\overrightarrow{\mathrm{GD}}$

上の諸式から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OG}} + \overrightarrow{\mathrm{GQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QP}} = \overrightarrow{\mathrm{OG}} + \frac{2}{|\overrightarrow{\mathrm{GD}}|}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{GE}}}{|\overrightarrow{\mathrm{GE}}|} + \xi\overrightarrow{\mathrm{GD}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{GE}}$,　$\overrightarrow{\mathrm{GD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{GE}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GE}} &= \left(\overrightarrow{\mathrm{OG}} + \frac{2}{|\overrightarrow{\mathrm{GD}}|}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{GE}}}{|\overrightarrow{\mathrm{GE}}|} + \xi\overrightarrow{\mathrm{GD}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{GE}} = \frac{2|\overrightarrow{\mathrm{GE}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{GD}}|} \\ &= 2\cdot\frac{\sqrt{7}}{9}\bigg/\frac{\sqrt{21}}{12} = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{8\sqrt{3}}{9}}\end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) A の作る図形が三角形でないのは $\boxed{1}$ を含む 3 点が一直線上にある

$$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{6} \quad \boxed{1}\boxed{3}\boxed{7} \quad \boxed{1}\boxed{4}\boxed{8} \quad \boxed{1}\boxed{5}\boxed{9} \qquad (*)$$

の 4 通りである．よって，求める確率は

$$\frac{4}{{}_9\mathrm{C}_3} = \frac{4}{3\cdot4\cdot7} = \mathbf{\frac{1}{21}}$$

(2) $\boxed{1}$ を含まない図形は三角形である．したがって，$\boxed{1}$ を含む人の図形が三角形であればよい．$\boxed{1}$ を含む A，B，C それぞれ場合において，(1) で求めた三角形でない確率が等しいことに注意して

$$1 - \frac{1}{21} \times 3 = \mathbf{\frac{6}{7}}$$

(3) 条件 ② から，A の作る 4 回の図形は，(∗) で示した 4 つの場合が 1 回ずつ起こる．(∗) を順に

α 1 | 2 | 6 β 1 | 3 | 7 γ 1 | 4 | 8 δ 1 | 5 | 9

とすると，B，C の条件により，A について

	B			C			A
1 回目	3						β 以外
2 回目	2	4		5	6		α，γ，δ 以外
3 回目	2	3		6	7		α，β 以外
4 回目				2	8		α，γ 以外

A は 2 回目に β，1 回目に α，3 回目に γ，4 回目に δ の順に決定する．

	A			B			C			残り
1 回目	1	2	6	3						(4，5，7，8，9)
2 回目	1	3	7	2	4		5	6		(8，9)
3 回目	1	4	8	2	3		6	7		(5，9)
4 回目	1	5	9				2	8		(3，4，6，7)

- 2 回目の B は 9 より，2 回目の C は 8
- 3 回目の B は 5 より，3 回目の C は 9
- 4 回目の C は 7 より，4 回目の B は 3，4，6
- 1 回目の B は 8，9 より，1 回目の C は 4，5，7

よって

	A			B			C		
1 回目	1	2	6	3	8	9	4	5	7
2 回目	1	3	7	2	4	9	5	6	8
3 回目	1	4	8	2	3	5	6	7	9
4 回目	1	5	9	3	4	6	2	7	8

■

10 (1) $f(x)=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{1}{2}\log(1+x)-\dfrac{1}{2}\log(1-x)$ より $(-1<x<1)$

$$f'(x)=\frac{1}{2(1+x)}+\frac{1}{2(1-x)}=\boldsymbol{\frac{1}{(1+x)(1-x)}}$$
$$f''(x)=-\frac{1}{2(1+x)^2}+\frac{1}{2(1-x)^2}=\boldsymbol{\frac{2x}{(1+x)^2(1-x)^2}}$$

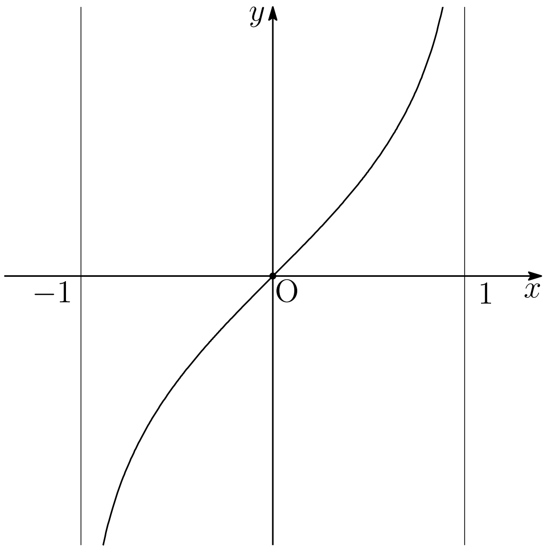
(2) $x\longrightarrow -1+0$ のとき $\dfrac{1+x}{1-x}\longrightarrow +0$ より $\displaystyle\lim_{x\to -1+0} f(x)=\boldsymbol{-\infty}$

$x\longrightarrow 1-0$ のとき $\dfrac{1+x}{1-x}\longrightarrow \infty$ より $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} f(x)=\boldsymbol{\infty}$

(3) (1)，(2) から，$f(x)$ の増減および凹凸は

x	(-1)	$\cdots$	0	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	変曲点	↗	

よって　変曲点 **(0，0)**，グラフの概形は次のようになる．



(4) $y = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}$ より　$2y = \log\dfrac{1+x}{1-x}$

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \quad \text{よって} \quad x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} = \boldsymbol{\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}}$$

また

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{e^y + e^{-y}}\right) = -\frac{(e^y + e^{-y})'}{(e^y + e^{-y})^2} = \boldsymbol{-\frac{e^y - e^{-y}}{(e^y + e^{-y})^2}}$$

(5) (4) の結果から

$$1 - x^2 = 1 - \left(\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}\right)^2 = \frac{4}{(e^y + e^{-y})^2} = \frac{4e^{2y}}{(e^{2y}+1)^2}$$

したがって

$$\begin{aligned} V(\alpha) &= \pi\int_0^{\alpha}(1-x^2)\,dy = \pi\int_0^{\alpha}\frac{4e^{2y}}{(e^{2y}+1)^2}\,dy \\ &= \pi\left[-\frac{2}{e^{2y}+1}\right]_0^{\alpha} = \boldsymbol{\pi\left(1 - \frac{2}{e^{2\alpha}+1}\right)} \end{aligned}$$

よって　$$\lim_{\alpha\to\infty} V(\alpha) = \lim_{\alpha\to\infty}\pi\left(1 - \frac{2}{e^{2\alpha}+1}\right) = \boldsymbol{\pi}$$ ■

11 (1) $(2+\sqrt{3})^n = a_n + \sqrt{3}b_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ より (a_n，b_n は自然数)

$$a_1 = 1,\quad b_1 = 1,$$
$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3})^{n+1} &= (2+\sqrt{3})(a_n+\sqrt{3}b_n)\\ &= (2a_n+3b_n)+(a_n+2b_n)\sqrt{3}\end{aligned}$$

したがって　$a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$，$b_{n+1} = a_n + 2b_n$

$(2-\sqrt{3})^n = x_n - \sqrt{3}y_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とすると (x_n，y_n は整数)

$$x_1 = 1,\quad y_1 = 1,$$
$$\begin{aligned}(2-\sqrt{3})^{n+1} &= (2-\sqrt{3})(x_n-\sqrt{3}y_n)\\ &= (2x_n+3y_n)-(x_n+2y_n)\sqrt{3}\end{aligned}$$

したがって　$x_{n+1} = 2x_n + 3y_n$，$y_{n+1} = x_n + 2y_n$

以上の結果から，$x_n = a_n$，$y_n = b_n$ であるから，すべての自然数 n に対して

$$(2-\sqrt{3})^n = a_n - \sqrt{3}b_n$$

が成り立つ．

(2) $c_n = \dfrac{a_n}{b_n} - \sqrt{3} = \dfrac{a_n-\sqrt{3}b_n}{b_n}$ より $(n=1,2,3,\cdots)$

$$\begin{aligned}\frac{c_{n+1}}{c_n} &= \frac{a_{n+1}-\sqrt{3}b_{n+1}}{b_{n+1}}\Big/\frac{a_n-\sqrt{3}b_n}{b_n}\\ &= \frac{a_{n+1}-\sqrt{3}b_{n+1}}{a_n-\sqrt{3}b_n}\cdot\frac{b_n}{b_{n+1}}\\ &= (2-\sqrt{3})\cdot\frac{b_n}{a_n+2b_n}\\ &< (2-\sqrt{3})\cdot\frac{b_n}{2b_n} = 1-\frac{\sqrt{3}}{2} < 1\end{aligned}$$

$c_n > 0$ より，すべての自然数 n に対して，次式が成立する．

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} < 1 \quad \text{よって} \quad c_n > c_{n+1}$$

■

$\boxed{\mathbf{12}}$ (1) $$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)$$

上式から，$a+b+c$ は 3 の倍数 ($a,\ b,\ c$ は整数) より，題意は成立する．

(2) $$(\log_2 x)(\log_{32} x)+\log_4 x+\frac{3}{10}=0$$

$t=\log_2 x$ とおくと，$\log_{32} x=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 32}=\dfrac{t}{5}$，$\log_4 x=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 4}=\dfrac{t}{2}$ より

$$t\cdot\frac{t}{5}+\frac{t}{2}+\frac{3}{10}=0 \quad \text{整理すると} \quad 2t^2+5t+3=0$$

したがって　$(t+1)(2t+3)=0$　これを解いて　$t=-1,-\dfrac{3}{2}$

$x=2^t$ より　$x=2^{-1},\ 2^{-\frac{3}{2}}$　よって　$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}}$

(3) $\boxed{4}$ (1) を参照．

■

13 (1) $y=\dfrac{1}{2}x^2$ を微分すると　$y'=x$

l は点 $\mathrm{A}\left(\sqrt{3},\ \dfrac{3}{2}\right)$ を通り，傾き $\sqrt{3}$ の直線であるから

$$y-\frac{3}{2}=\sqrt{3}(x-\sqrt{3})\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=\sqrt{3}x-\frac{3}{2}}$$

(2) 点 $\mathrm{A}\left(\sqrt{3},\ \dfrac{3}{2}\right)$ を通り，l に垂直な直線を m とすると

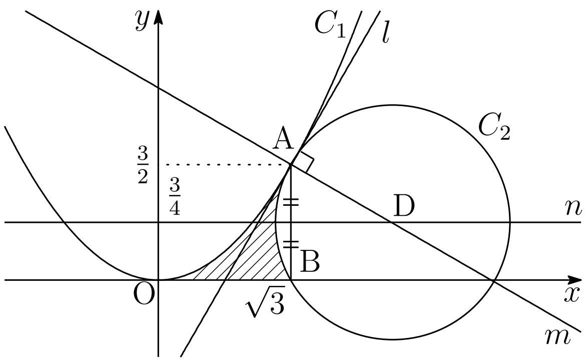
$$y-\frac{3}{2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-\sqrt{3})\quad \text{すなわち}\quad m:y=-\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{5}{2}$$

2 点 $\mathrm{A}\left(\sqrt{3},\ \dfrac{3}{2}\right)$，$\mathrm{B}(\sqrt{3},\ 0)$ を結ぶ線分 AB の垂直 2 等分線を n とすると

$$n:y=\frac{3}{4}$$

m と n の方程式から，y を消去すると

$$-\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{5}{2}=\frac{3}{4}\quad \text{ゆえに}\quad x=\frac{7\sqrt{3}}{4}\quad \text{よって}\quad \mathbf{D}\left(\boldsymbol{\frac{7\sqrt{3}}{4},\ \frac{3}{4}}\right)$$



(3) m の傾き $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より，△ABD は 1 辺の長さが $\dfrac{3}{2}$ の正三角形であるから

$$S=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{2}x^2\,dx-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^{\sqrt{3}}-\frac{9}{8}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{17\sqrt{3}}{16}-\frac{3}{8}\pi}$$

■