令和５年度　宮崎大学２次試験前期日程 (数学問題)
工 (物質環境化学を除く)・医 (医)・農・教育 (中学数学・中学社会・理科・技術・家庭・初等教育・特別支援・社会システム) 学部
令和 5 年 2 月 25 日

- 工学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部　$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 教育 (中学数学) 学部　$\boxed{4}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ 必答，$\boxed{10}$ $\boxed{11}$ から 1 問選択．
  数 I・II・III・A・B (90 分)
- 教育 (中学 [社会，理科，技術，家庭]，初等教育，特別支援，社会システム) 学部・農学部　$\boxed{5}$ $\boxed{9}$ $\boxed{12}$ 数 I・II・A・B (90 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の空欄を適切な数または数式で埋めよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(1) 関数 $f(x) = \cos\sqrt{x+1}$ の導関数は，$f'(x) = \boxed{\text{あ}}$ である．

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{x^2}{\log x}$ の導関数は，$f'(x) = \boxed{\text{い}}$ である．

(3) 関数 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x+1}}$ の不定積分は，$\displaystyle\int f(x)\,dx = \boxed{\text{う}} + C$ である．ただし，C は積分定数とする．

(4) 関数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{1-\cos^2 x}$ の不定積分は，$\displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\log\boxed{\text{え}} + C$ である．ただし，C は積分定数とする．

(5) 定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{0} \log(x+3)\,dx$ の値は，$\boxed{\text{お}}$ である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ および座標平面上の原点 O を通る曲線 $C : y = f(x)$ について，次の各問に答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

(2) 直線 $y = ax$ が曲線 C に O で接するときの定数 a の値を求めよ．また，このとき，$x > 0$ において，$ax > f(x)$ が成り立つことを示せ．

(3) 関数 $f(x)$ の増減，極値，曲線 C の凹凸，変曲点および漸近線を調べて，曲線 C の概形をかけ．

(4) (2) で求めた a の値に対し，曲線 C と直線 $y = ax$ および直線 $x = \sqrt{3}$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

3 空間に四面体OABCがあり，$\mathrm{OA}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\mathrm{OB}=2$，$\mathrm{OC}=\sqrt{2}$，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=45^\circ$とする．点Bから直線OAにおろした垂線の足をDとし，点Cから平面OABにおろした垂線の足をEとする．また，点Fを，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\overrightarrow{\mathrm{DB}}$となるように定める．このとき，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{f}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}$として，次の各問に答えよ．

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$の値をそれぞれ求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$を，$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．また，$|\overrightarrow{\mathrm{DB}}|$の値も求めよ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$を，$\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{f}$を用いて表せ．

(4) 四面体OACFの体積を求めよ．

4 表にA，裏にBと書かれたコインがある．このコインをn回投げる試行を行い，Aが出た回数と同じ枚数のイヌの絵はがき，Bが出た回数と同じ枚数のネコの絵はがきを貰えるとする．例えば，$n=3$のとき，ABAと出たら，イヌの絵はがきを2枚，ネコの絵はがきを1枚貰える．このとき，次の各問に答えよ．ただし，使用するコインは，表，裏がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$の確率で出るものとする．

(1) $n=3$のとき，イヌの絵はがきを2枚以上貰える確率を求めよ．

(2) $n=3$のとき，イヌとネコのどちらかの絵はがきも貰える確率を求めよ．

(3) $n\geqq 3$のとき，Aが連続して3回以上出たら，貰えるイヌやネコの絵はがきに追加してウシの絵はがきも貰えることにする．$n=6$のとき，イヌ，ネコ，ウシのいずれの絵はがきも貰える確率を求めよ．

5 座標平面上に2点$\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$がある．また，点$\mathrm{P}(x,\ y)$が$x>1$，$y>0$を満たしながら座標平面上を動くとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $\tan\dfrac{\pi}{12}$の値を求めよ．

(2) $\tan\angle\mathrm{APB}$を，xとyを用いて表せ．

(3) 点Pが$x>1$，$y>0$，$\angle\mathrm{APB}\leqq\dfrac{\pi}{12}$を満たしながらくまなく動くとき，点Pの動きうる領域を座標平面上に図示せよ．

$\boxed{6}$ 自然数 $k=1,2,3,\cdots$ と $n=1,2,3,\cdots$ に対して，$\theta_k(n)$ を，$\theta_k(n)=\left(1-\dfrac{k}{n}\right)\dfrac{\pi}{2}$ で定め，座標平面上の円 C_n と直線 $L_{k,n}$ をそれぞれ，

$$C_k : x^2+y^2=\frac{1}{n^2}, \quad L_{k,n} : x\sin\theta_k(n)-y\cos\theta_k(n)=0$$

とする．C_n と $L_{k,n}$ との 2 つの交点のうち，x 座標が大きい方の交点の x 座標を $x_k(n)$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $n \geqq k$ のときの $x_k(n)$ を求めよ．

(2) 次の空欄に当てはまる数または数式を求めよ．
自然数 m に対して，$A_t(m)$ $(t=0,1,2,\cdots)$ を，

$$A_t(m)=\sum_{k=1}^{m} x_k(k+t)$$

とし，B_N $(N=1,2,3,\cdots)$ を，

$$B_N=\sum_{t=0}^{N-1} A_t(N-t)$$

とする．このとき，$A_1(1)=\dfrac{\boxed{\text{あ}}}{4}$，$A_2(1)=\dfrac{\boxed{\text{い}}}{6}$ となる．
また，$B_2-B_1=\dfrac{\boxed{\text{う}}}{4}$，$B_3-B_2=\dfrac{\boxed{\text{え}}}{6}$ となる．
さらに，$N=2,3,4,\cdots$ に対して，

$$B_N-B_{N-1}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boxed{\text{お}}$$

となる．

(3) (2) で定めた B_N $(N=1,2,3,\cdots)$ について，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}(B_N-B_{N-1})$ の値を求めよ．

7 次の各問に答えよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(1) $a>1$ を満たす定数 a と，区間 $\dfrac{1}{a} \leqq x \leqq a$ において連続な関数 $f(x)$ に対して，等式

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{f(x)}{1+x^2}\,dx = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x^2}\,dx$$

が成り立つことを示せ．

(2) 定積分 $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1+x}{x(1+x^2)}\,dx$ の値を求めよ．

(3) 関数 $g(x) = \dfrac{\log x}{1+x^2}$ は，区間 $0 < x \leqq \sqrt{e}$ においてつねに増加することを示せ．

(4) (3) の関数 $g(x)$ に対して，$y=g(x)$ $(x>0)$ のグラフを C とする．曲線 C と x 軸および直線 $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ で囲まれた部分の面積を S_1 とし，曲線 C と x 軸および直線 $x=\sqrt{e}$ で囲まれた部分の面積を S_2 とする．このとき，S_1 と S_2 は等しいことを示せ．

$\boxed{8}$ 次の各問に答えよ．

(1) $a = 2023$，$b = 1742$ とする．このとき

$$\frac{1}{ab} = \frac{m}{a} + \frac{n}{b}$$

となる整数の組 $(m,\ n)$ で，$1 \leqq n \leqq 2000$ を満たすものをすべて求めよ．

(2) p を 3 以上の素数とする．このとき，

$$(p-1)! \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}\right)$$

は p の倍数であることを示せ．

$\boxed{9}$ 座標平面上に放物線 $C_1 : y = x^2 - 6x + 2$，$C_2 : y = -x^2 + 10x - 22$ がある．このとき，次の各問に答えよ．

(1) C_1 と C_2 の交点の座標を求めよ．

(2) P を C_1 上の点とし，P の x 座標を t とするとき，P における C_1 の接線 ℓ の方程式を，t を用いて表せ．

(3) (2) の ℓ が C_1 と C_2 の交点を通る直線に平行なとき，ℓ と C_2 の交点の x 座標を求めよ．

(4) (3) のとき，C_1 と ℓ および 2 直線 $x = 2$，$x = 6$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ．

10 関数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos(ax)$ について，次の各問に答えよ．

(1) $a=1$ のとき，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ における $y=f(x)$ のグラフをかけ．また，$f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(2) $a=\pi$ のとき，$f(x)$ は周期関数でないことを示せ．ただし，π は無理数であることを用いてよい．

11 複素数平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円周を C とする．C 上に異なる 2 点 $\mathrm{P_1}(z_1)$，$\mathrm{P_2}(z_2)$ をとり，C 上にない 1 点 $\mathrm{P_3}(z_3)$ をとる．さらに，

$$w_1=\frac{1}{z_1},\quad w_2=\frac{1}{z_2},\quad w_3=\frac{1}{z_3}$$

とおき，複素数 $w_1,\ w_2,\ w_3$ と対応する点をそれぞれ $\mathrm{Q_1},\ \mathrm{Q_2},\ \mathrm{Q_3}$ とする．また，i を虚数単位とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $z_1=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$，$z_2=\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$，$z_3=\dfrac{z_1+z_2}{2}$ のとき，w_1，w_2，w_3 をそれぞれ $a+bi$ ($a,\ b$ は実数) の形で求めよ．

(2) $\angle\mathrm{P_1OP_2}$ が直角であるとき，$\mathrm{P_3}$ が線分 $\mathrm{P_1P_2}$ 上にあれば，$\angle\mathrm{Q_1Q_3Q_2}$ も直角であることを示せ．

12 次の各問に答えよ．

(1) 方程式 $a^2=b^2+15$ を満たす自然数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

(2) k を定数とする．連立方程式

$$(*)\begin{cases} x^2-4y+k=0 \\ y^2-2x+k+18=0 \end{cases}$$

が自然数解 $x=x_0$，$y=y_0$ をもつとき，自然数の組 $(x_0,\ y_0)$ および k の値を求めよ．

(3) (2) で求めた k に対し，連立方程式 $(*)$ の $(x_0,\ y_0)$ 以外の解をすべて求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x) = \cos\sqrt{x+1}$ を微分すると

$$f'(x) = -(\sqrt{x+1})'\sin\sqrt{x+1} = -\frac{\sin\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}$$

(あ) $\boldsymbol{-\dfrac{\sin\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}}$

(2) $f(x) = \dfrac{x^2}{\log x}$ を微分すると

$$f'(x) = \frac{(x^2)'\log x - x^2(\log x)'}{(\log x)^2} = \frac{2x\log x - x^2\cdot\dfrac{1}{x}}{(\log x)^2} = \frac{x(2\log x - 1)}{(\log x)^2}$$

(い) $\boldsymbol{\dfrac{x(2\log x - 1)}{(\log x)^2}}$

(3) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x+1}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2x+1} - \dfrac{1}{2\sqrt{2x+1}}$ より

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{3}(x-1)\sqrt{2x+1} + C$$

(う) $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}(x-1)\sqrt{2x+1}}$

(4) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1-\cos^2 x} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin x}{1-\cos x} + \dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ より

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\{\log(1-\cos x) - \log(1+\cos x)\} + C = \frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C$$

(え) $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

(5) $\displaystyle\int_{-2}^{0}\log(x+3)\,dx = \Big[\,(x+3)\log(x+3) - x\,\Big]_{-2}^{0} = 3\log 3 - 2$

(お) $\boldsymbol{3\log 3 - 2}$ ■

$\boxed{2}$ (1) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ より

$$f'(x) = \frac{1\cdot(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \boldsymbol{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}$$
$$f''(x) = \frac{-2x\cdot(1+x^2)^2 - (1-x^2)\cdot 2\cdot 2x(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \boldsymbol{\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}}$$

(2) $a = f'(0)$ より　$\boldsymbol{a = 1}$

$x > 0$ のとき　$ax - f(x) = x - \dfrac{x}{1+x^2} = \dfrac{x^3}{1+x^2} > 0$

よって，$x > 0$ において　$ax > f(x)$

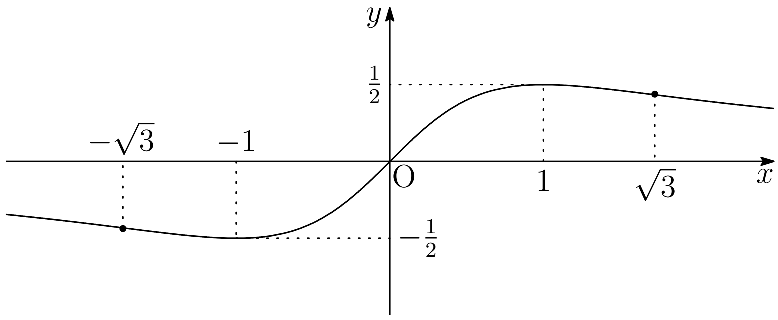
(3) $f(x)$ の増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる．

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	変曲点	↘	極小	↗	変曲点	↗	極大	↘	変曲点	↘

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$ ゆえに　**漸近線は $\boldsymbol{x}$ 軸**

極大値 $\boldsymbol{f(1) = \frac{1}{2}}$，極小値 $\boldsymbol{f(-1) = -\frac{1}{2}}$

変曲点は　$\boldsymbol{(0,\ 0),\ \left(\pm\sqrt{3},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}$　**(複号同順)**



(4) 求める面積 S は

$$S = \int_0^{\sqrt{3}} \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_0^{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{3}{2} - \log 2}$$

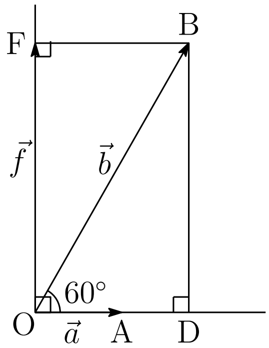
■

3 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

$\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos 45^\circ = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{2}$

$\vec{c}\cdot\vec{a} = |\vec{c}||\vec{a}|\cos 45^\circ = \sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

(2) $|\vec{a}| = \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \vec{b}\cdot\vec{a} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{(\vec{b}\cdot\vec{a})}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = \sqrt{3}\,\vec{a},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{DB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \boldsymbol{\vec{b} - \sqrt{3}\,\vec{a}}$$

また　$|\overrightarrow{\mathrm{DB}}| = \mathrm{OB}\sin 60^\circ = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$

(3) $\vec{f} = \overrightarrow{\mathrm{OF}} = \overrightarrow{\mathrm{DB}} = \vec{b} - \sqrt{3}\,\vec{a},\quad |\vec{f}| = |\overrightarrow{\mathrm{DB}}| = \sqrt{3}$

$\vec{c}\cdot\vec{f} = \vec{c}\cdot(\vec{b} - \sqrt{3}\,\vec{a}) = \vec{b}\cdot\vec{c} - \sqrt{3}\,\vec{c}\cdot\vec{a} = 2 - \sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 1$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{(\vec{c}\cdot\vec{a})}{|\vec{a}|^2}\vec{a} + \frac{(\vec{c}\cdot\vec{f})}{|\vec{f}|^2}\vec{f} = \sqrt{3}\,\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{f}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{CE}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \boldsymbol{\sqrt{3}\,\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{f} - \vec{c}}$

(4) $\vec{a}\perp\vec{f}$ および $\angle\mathrm{OEC} = 90^\circ$ に注意すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|^2 = 3|\vec{a}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{f}|^2 = 3\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\cdot 3 = \frac{4}{3},$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{OE}}|^2 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3},$$
$$\triangle\mathrm{OAF} = \frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OF} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3} = \frac{1}{2},\quad |\overrightarrow{\mathrm{CE}}| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

求める体積を V とすると　$V = \dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{OAF}|\overrightarrow{\mathrm{CE}}| = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{18}}$ ■

$\boxed{4}$ (1) 3回のうち，Aが2回または3回出る確率であるから

$$ {}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{1}{2}} $$

(2) 3回のうち，Aが3回またはBが3回出る確率は

$$ \left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4} $$

求める確率はこの余事象の確率であるから

$$ 1-\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{3}{4}} $$

(3) (i) Aが連続して丁度3回出る場合の数は($*$はAまたはBを表す)

$$ 2^2+2+2+2^2=12\ (\text{通り}) $$

3	B	*	*
B	3	B	*
*	B	3	B
*	*	B	3

(ii) Aが連続して丁度4回出る場合の数は

$$ 2+1+2=5\ (\text{通り}) $$

4	B	*
B	4	B
*	B	4

(iii) Aが連続して丁度5回出る場合の数は

$$ 1+1=2\ (\text{通り}) $$

5	B
B	5

(i)〜(iii)より，求める確率は $\dfrac{12+5+2}{2^6}=\boldsymbol{\dfrac{19}{64}}$ ■

5 (1) $\tan\dfrac{\pi}{12}=\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{3}-\tan\dfrac{\pi}{4}}{1+\tan\dfrac{\pi}{3}\tan\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot 1}=\mathbf{2-\sqrt{3}}$

(2) 直線 AP，BP の偏角をそれぞれ α, β とすると $\left(0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\tan\alpha=\frac{y-0}{x-(-1)}=\frac{y}{x+1},\quad \tan\beta=\frac{y-0}{x-1}=\frac{y}{x-1},$$

$$\begin{aligned}\tan\angle\mathrm{APB}=\tan(\beta-\alpha)&=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}\\&=\frac{\dfrac{y}{x-1}-\dfrac{y}{x+1}}{1+\dfrac{y}{x-1}\cdot\dfrac{y}{x+1}}=\boldsymbol{\frac{2y}{x^2+y^2-1}}\end{aligned}$$

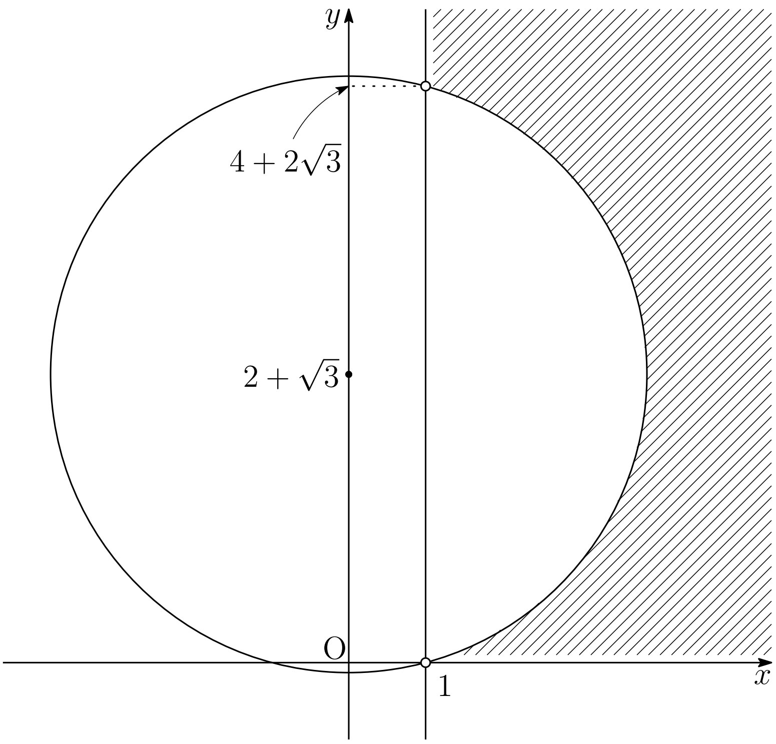
(3) $0<\angle\mathrm{APB}\leqq\dfrac{\pi}{12}$ であるから，$\tan\angle\mathrm{APB}\leqq\tan\dfrac{\pi}{12}$ より

$$0<\frac{2y}{x^2+y^2-1}\leqq 2-\sqrt{3}$$

$x>1,\ y>0$ より　$x^2+y^2-1\geqq 2(2+\sqrt{3})y$

$$x>1,\quad y>0,\quad x^2+(y-2-\sqrt{3})^2\geqq(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$$

求める領域は，下の図の斜線部分で，境界は円周上は含むが，直線 $x=1$，x 軸，$\circ$ は含まない．



$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 等式 $\{x\sin\theta_k(n)-y\cos\theta_k(n)\}^2+\{x\cos\theta_k(n)+y\sin\theta_k(n)\}^2=x^2+y^2$ に C_n および $L_{k,n}$ の方程式を代入すると

$$x\cos\theta_k(n)+y\sin\theta_k(n)=\pm\frac{1}{n}$$

上式と $L_{k,n}: x\sin\theta_k(n)-y\cos\theta_k(n)=0$ から

$$x=\pm\frac{1}{n}\cos\theta_k(n)=\pm\frac{1}{n}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{2n}\right)=\pm\frac{1}{n}\sin\frac{k\pi}{2n}$$

$1\leqq k\leqq n$ より $\qquad \boldsymbol{x_k(n)=\frac{1}{n}\sin\frac{k\pi}{2n}}$

(2) $A_t(m)=\sum_{k=1}^{m}x_k(k+t)$ に (1) の結果を適用すると

$$A_t(1)=x_1(1+t)=\frac{1}{1+t}\sin\frac{\pi}{2(1+t)}$$

よって $\quad A_1(1)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{4}},\quad A_2(1)=\frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$

$$\begin{aligned}
B_N=\sum_{t=0}^{N-1}A_t(N-k)&=\sum_{t=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{N-t}x_k(k+t)\\
&=\sum_{t=0}^{N-2}\sum_{k=1}^{N-t}x_k(k+t)+x_1(N)\\
&=\sum_{t=0}^{N-2}\left\{\sum_{k=1}^{N-1-t}x_k(k+t)+x_{N-t}(N)\right\}+x_1(N)\\
&=\sum_{t=0}^{N-2}\sum_{k=1}^{N-1-t}x_k(k+t)+\sum_{t=0}^{N-2}x_{N-t}(N)+x_1(N)\\
&=B_{N-1}+\sum_{t=1}^{N}x_t(N)
\end{aligned}$$

$N=2,3,4,\cdots$ に対して $\quad B_N-B_{N-1}=\sum_{k=1}^{N}x_k(N)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{\sin\frac{k\pi}{2N}}$

$$B_2-B_1=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\sin\frac{k\pi}{4}=\boldsymbol{\frac{2+\sqrt{2}}{4}},\quad B_3-B_2=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}\sin\frac{k\pi}{6}=\boldsymbol{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}$$

(3) $\displaystyle\lim_{N\to\infty}(B_N-B_{N-1})=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sin\frac{k\pi}{2N}=\int_0^1\sin\frac{\pi x}{2}\,dx=\boldsymbol{\frac{2}{\pi}}$ ■

$\boxed{7}$ (1) $x=\dfrac{1}{t}$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{t^2}$

x	$\frac{1}{a} \longrightarrow a$
t	$a \longrightarrow \frac{1}{a}$

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)}{1+x^2}\,dx=\int_{a}^{\frac{1}{a}}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$
$$=-\int_{a}^{\frac{1}{a}}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{1+t^2}\,dt=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x^2}\,dx$$

(2) $f(x)=\dfrac{1+x}{x}$ とすると，$f\left(\frac{1}{x}\right)=1+x$ であるから，(1) の結論より

$$I=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1+x}{x(1+x^2)}\,dx=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1+x}{1+x^2}\,dx$$
$$=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}\,dx+\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{x}{1+x^2}\,dx$$

ここで，$x=\tan\theta$ とおくと，$\dfrac{dx}{1+x^2}=d\theta$

x	$\frac{1}{\sqrt{3}} \longrightarrow \sqrt{3}$
t	$\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\,dx$$
$$=\Big[\;\theta\;\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{2}\Big[\;\log(1+x^2)\;\Big]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\log 3}$$

(3) $g(x)=\dfrac{\log x}{1+x^2}$ を微分すると

$$g'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot(1+x^2)-(\log x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{x\left(\frac{1}{x^2}+1-2\log x\right)}{(1+x^2)^2}$$

$h(x)=\dfrac{1}{x^2}+1-2\log x$ とすると $g'(x)=\dfrac{xh(x)}{(1+x^2)^2}$

$$h'(x)=-\frac{2}{x^3}-\frac{2}{x}<0,\quad h(\sqrt{e}\,)=\frac{1}{e}$$

$h(x)$ は単調減少であるから，区間 $0<x\leqq\sqrt{e}$ において

$$h(x)\geqq h(\sqrt{e}\,)=\frac{1}{e}>0\quad\text{すなわち}\quad g'(x)>0$$

よって，区間 $0<x\leqq\sqrt{e}$ において，$g(x)$ はつねに増加する．

(4) $a=\sqrt{e}$，$f(x)=\log x$ とおくと

$$S_1=-\int_{\frac{1}{a}}^{1}\frac{f(x)}{1+x^2}\,dx,\quad S_2=\int_{1}^{a}\frac{f(x)}{1+x^2}\,dx,$$

$$-S_1+S_2=\int_{\frac{1}{a}}^{1}\frac{f(x)}{1+x^2}\,dx+\int_{1}^{a}\frac{f(x)}{1+x^2}\,dx=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)}{1+x^2}\,dx \qquad (*)$$

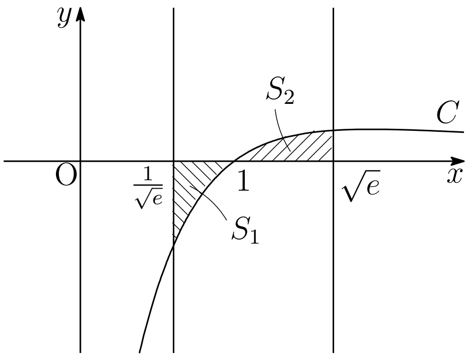
$f(x)=-f\left(\frac{1}{x}\right)$ であるから $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)}{1+x^2}\,dx=-\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(\frac{1}{x})}{1+x^2}\,dx$

(1) の結論から $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)}{1+x^2}\,dx=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(\frac{1}{x})}{1+x^2}\,dx$

上の 2 式の辺々を加えると

$$2\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)}{1+x^2}\,dx=0 \quad \text{ゆえに} \quad \int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)}{1+x^2}\,dx=0$$

$(*)$ より $\quad -S_1+S_2=0 \quad$ よって $\quad S_1=S_2$



■

$\boxed{8}$ (1) ユークリッドの互除法により

$$
\begin{array}{r|r|r|r}
 & 5 & 6 & 1 \\
\hline
56 \,) & 281 \,) & 1742 \,) & 2023 \\
 & 280 & 1686 & 1742 \\
\hline
 & 1 & 56 & 281
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|r|r|r}
 & 5 & 6 & 1 \\
\hline
d \,) & c \,) & b \,) & a \\
 & & & \\
\hline
 & 1 & d & c
\end{array}
$$

$c = 281$，$d = 56$ とおくと

$$
\begin{cases} a = b + c \\ b = 6c + d \\ c = 5d + 1 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (*) \begin{cases} c = a - b \\ d = b - 6c \\ 1 = c - 5d \end{cases}
$$

$(*)$ の 3 式から c, d を消去すると

$$1 = c - 5(b - 6c) = -5b + 31c = -5b + 31(a - b) = 31a - 36b$$

したがって $\quad \dfrac{1}{ab} = \dfrac{31a - 36b}{ab} = \dfrac{-36}{a} + \dfrac{31}{b} = \dfrac{m}{a} + \dfrac{n}{b}$

$$\frac{m + 36}{a} = \frac{31 - n}{b} \quad \text{ゆえに} \quad b(m + 36) = a(31 - n)$$

a, b は互いに素であるから，整数 k を用いて

$$
\begin{cases} m + 36 = ak \\ 31 - n = bk \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} m = -36 + 2023k \\ n = 31 - 1742k \end{cases}
$$

$1 \leqq n \leqq 2000$ を満たす整数 k は $\quad k = 0, -1$

よって，求める整数の組 $(m,\ n)$ は

$$\boldsymbol{(m,\ n) = (-36,\ 31),\ (-2059,\ 1773)}$$

(2) p は 3 以上の素数 (奇素数) であるから，$\dfrac{p-1}{2}$ は整数より

$$
\begin{aligned}
&(p-1)! \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}\right) \qquad (*) \\
&= (p-1)! \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{p-k}\right) = p \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{(p-1)!}{k(p-k)}
\end{aligned}
$$

$(p-1)!$ は k, $p-k$ を因数にもつから，$\dfrac{(p-1)!}{k(p-k)}$ は整数である．

よって，$(*)$ は p の倍数である． ■

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $C_1: y = x^2 - 6x + 2,\ C_2: y = -x^2 + 10x - 22$ から y を消去すると

$$x^2 - 6x + 2 = -x^2 + 10x - 22 \quad \text{ゆえに} \quad (x-2)(x-6) = 0$$

$x = 2$ のとき $y = -6$，$x = 6$ のとき $y = 2$　よって　$\mathbf{(2, -6)}$，$\mathbf{(6,\ 2)}$

(2) $f(x) = x^2 - 6x + 2$ とおくと　$f'(x) = 2x - 6$

$C_1: y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線 ℓ の方程式は

$$y - f(t) = f'(t)(x - t) \quad \text{ゆえに} \quad y - (t^2 - 6t + 2) = (2t - 6)(x - t)$$

よって　$\boldsymbol{\ell : y = (2t - 6)x - t^2 + 2}$

(3) (1) で求めた 2 点を通る直線が ℓ と平行であるから

$$f'(t) = \frac{2 - (-6)}{6 - 2} \quad \text{ゆえに} \quad 2t - 6 = 2 \quad \text{すなわち} \quad t = 4$$

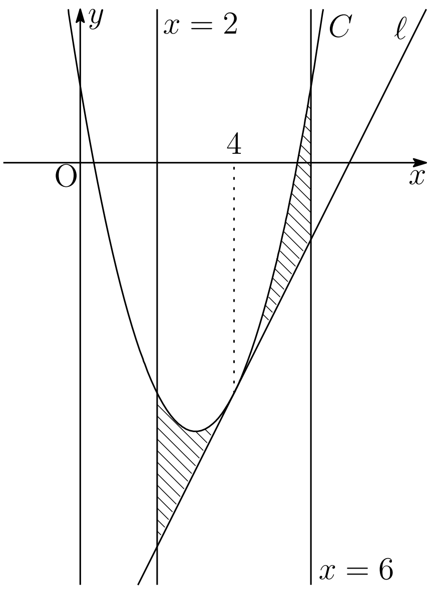
このとき，ℓ の方程式は　$\ell : y = 2x - 14$

ℓ と C_2 の方程式から y を消去すると

$$2x - 14 = -x^2 + 10x - 22 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x = 4 \pm 2\sqrt{2}}$$

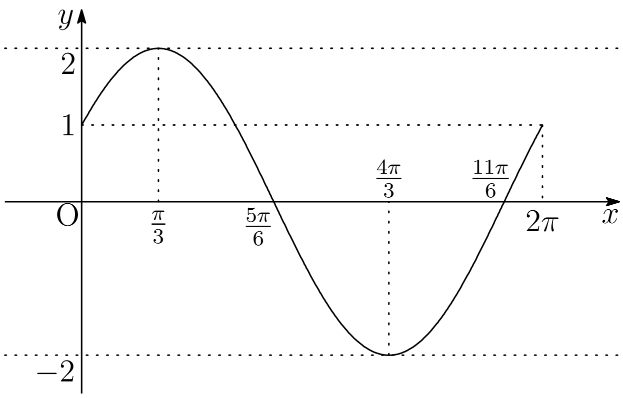
(4) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_2^6 \{(x^2 - 6x + 2) - (2x - 14)\}\, dx \\ &= \int_2^6 (x-4)^2\, dx = \left[\, \frac{1}{3}(x-4)^3 \,\right]_2^6 = \mathbf{\frac{16}{3}} \end{aligned}$$



10 (1) $a=1$ のとき　$f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

よって　最大値 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\mathbf{2}$，最小値 $f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\mathbf{-2}$



(2) $a=\pi$ のとき　$f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos\pi x$

$f(x)$ の周期を T とすると，$f(T)=f(-T)=f(0)$ より

$$\sqrt{3}\sin T+\cos\pi T=-\sqrt{3}\sin T+\cos\pi T=1$$

したがって　　$\sin T=0,\quad \cos\pi T=1$

上の第 1 式から，T は π の整数倍，第 2 式から，πT は 2π の整数倍，すなわち，T は 2 の倍数．π は無理数であるから，これらを同時に満たす T は存在しない．■

11 (1) $z_1=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$

$z_2=\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}=\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}$

$z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha$，$z_2=\cos\beta+i\sin\beta$ のとき

$$z_3=\frac{z_1+z_2}{2}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

したがって　$z_3=\dfrac{z_1+z_2}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{7\pi}{12}+i\sin\dfrac{7\pi}{12}\right)$

$w_1=\dfrac{1}{z_1}$，$w_2=\dfrac{1}{z_2}$，$w_3=\dfrac{1}{z_3}$ より

$$\begin{aligned}
w_1&=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\\
w_2&=\cos\frac{5\pi}{6}-i\sin\frac{5\pi}{6}=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}\\
w_3&=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}-i\sin\frac{7\pi}{12}\right)=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\sqrt{3}+1}{2}i}
\end{aligned}$$

(2) $\angle \mathrm{P_1OP_2}$ が直角であるから，$\dfrac{z_2}{z_1}$ は純虚数

$\mathrm{P_3}$ が線分 $\mathrm{P_1P_2}$ 上にあるから，$\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ は実数

$$\frac{w_1-w_3}{w_2-w_3}=\frac{\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{1}{z_3}}{\dfrac{1}{z_2}-\dfrac{1}{z_3}}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\cdot\frac{z_2}{z_1}$$

したがって，$\dfrac{w_1-w_3}{w_2-w_3}$ は純虚数．よって，$\angle \mathrm{Q_1Q_3Q_2}$ は直角である．

別解 $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ の中点を $\mathrm{M}(c)$ とし $(|c|=\frac{1}{\sqrt{2}})$，$\mathrm{P_1}(c+ci)$，$\mathrm{P_2}(c-ci)$ とする．線分 $\mathrm{P_1P_2}$ 上の点 $\mathrm{P_3}$ を $z(\theta)=c+ci\tan\theta$ とし $(-\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4})$，$w(\theta)=\dfrac{1}{z(\theta)}$ と対応する点を $\mathrm{Q_3}$ とする．

$$\begin{aligned}
w(\theta)&=\frac{1}{c+ci\tan\theta}=\frac{\cos\theta}{c(\cos\theta+i\sin\theta)}\\
&=\frac{1}{c}\cos\theta(\cos\theta-i\sin\theta)=\frac{1}{2c}+\frac{1}{2c}(\cos2\theta-\sin2\theta)
\end{aligned}$$

$\mathrm{Q_3}$ は $\mathrm{Q_1}(w(\frac{\pi}{4}))$，$\mathrm{Q_2}(w(-\frac{\pi}{4}))$ を直径の両端とする半円上にある．
よって，$\angle \mathrm{Q_1Q_3Q_2}$ は直角である．■

12 (1) $a^2-b^2=15$ であるから　$(a+b)(a-b)=15$

$a,\ b$ は自然数より　$a+b>a-b>0$

$$(a+b,\ a-b)=(15,\ 1),\ (5,\ 3)$$

よって　　$\boldsymbol{(a,\ b)=(8,\ 7),\ (4,\ 1)}$

(2) $(*)$ の 2 式の辺々の差をとると　$x^2-y^2+2x-4y-18=0$

$$(x+1)^2-(y+2)^2=15$$

$x,\ y$ は自然数であるから，$y+2 \geqq 3$ および (1) の結果に注意して

$$(x+1,\ y+2)=(8,\ 7)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{(x_0,\ y_0)=(7,\ 5)}$$

これを $(*)$ の第 1 式に代入すると

$$7^2-4\cdot5+k=0\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{k=-29}$$

(3) $k=-29$ を $(*)$ に代入すると

$$(**)\begin{cases} x^2-4y-29=0 \\ y^2-2x-11=0 \end{cases}$$

$(**)$ の第 2 式から　$x=\dfrac{1}{2}(y^2-11)$　$\cdots$ ①

① を $(**)$ の第 1 式に代入すると

$$\frac{1}{4}(y^2-11)^2-4y-29=0\quad \text{整理すると}\quad y^4-22y^2-16y+5=0$$

(2) の結果から，上式は $y-5$ を因数にもつことに注意して

$$(y-5)(y^3+5y^2+3y-1)=0$$
$$(y-5)(y+1)(y^2+4y-1)=0$$

これを解いて　$y=5,\ \ -1,\ \ -2\pm\sqrt{5}$

それぞれ ① に代入すると　$x=7,-5,-1\mp2\sqrt{5}$

よって，$(x_0,\ y_0)$ 以外の解は

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(-5,-1),\ (-1\mp2\sqrt{5},-2\pm\sqrt{5})}\quad \textbf{(複号同順)}$$

■