令和４年度　宮崎大学２次試験前期日程 (数学問題)
工 (物質環境化学を除く)・医 (医)・農・教育 (中学数学・中学社会・理科・技術・家庭・初等教育・特別支援・社会システム) 学部
令和 4 年 2 月 25 日

- 工学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部　$\boxed{3}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 教育 (中学数学) 学部　$\boxed{6}$ $\boxed{10}$ $\boxed{11}$ 必答，$\boxed{2}$ $\boxed{7}$ $\boxed{9}$ から 1 問選択．数 I・II・III・A・B (90 分)
- 教育 (中学 [社会，理科，技術，家庭]，初等教育，特別支援，社会システム) 学部・農学部　$\boxed{5}$ $\boxed{7}$ (1)(2)(3) $\boxed{12}$ 数 I・II・A・B (90 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の空欄を適切な数または数式で埋めよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(1) 関数 $f(x) = x(\log x)^2$ の導関数は，$f'(x) = \left(\boxed{\text{あ}}\right)\log x$ である．

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{\tan x}{x^2}$ の導関数は，$f'(x) = \dfrac{\boxed{\text{い}}}{x^3\cos^2 x}$ である．

(3) 関数 $f(x) = \dfrac{x^3-1}{(x-1)(x-2)}$ の不定積分は，$\displaystyle\int f(x)\,dx = \boxed{\text{う}} + C$ である．ただし，C は積分定数とする．

(4) 関数 $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ の不定積分は，$\displaystyle\int f(x)\,dx = \boxed{\text{え}} + C$ である．ただし，C は積分定数とする．

(5) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin^2 x\cos^2 x\,dx$ の値は，$\boxed{\text{お}}$ である．

$\boxed{2}$ 関数 $f(x) = x\sqrt{3-x}$ および座標平面上の原点 O を通る曲線 $C : y = f(x)$ について，次の各問に答えよ．

(1) 次の空欄を適切な数または数式で埋めよ．

- $f(x)$ の導関数は，$f'(x) = \dfrac{\boxed{\text{あ}}}{2\sqrt{3-x}}$ である．
- $f(x)$ の第 2 次導関数は，$f''(x) = \dfrac{\boxed{\text{い}}}{4(3-x)\sqrt{3-x}}$ である．
- O における C の接線を ℓ とし，ℓ の方程式を $y = kx$ (k は定数) とすると，k の値は $\boxed{\text{う}}$ である．

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 3-0} f'(x)$ は，次のいずれかである．

$$\lim_{x \to 3-0} f'(x) \text{ は有限な値である}$$
$$\lim_{x \to 3-0} f'(x) = \infty$$
$$\lim_{x \to 3-0} f'(x) = -\infty$$

この 3 通りのいずれであるかを答えよ．ただし，有限な値であるときは，その値も求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ の増減，極値，曲線 C の凹凸，および変曲点を調べて，曲線 C の概形をかけ．

(4) 曲線 C と直線 ℓ および直線 $x = 3$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

$\boxed{3}$ 1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC と点 P が

$$3\overrightarrow{\mathrm{OP}} + 8\overrightarrow{\mathrm{AP}} + 7\overrightarrow{\mathrm{BP}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}} = \vec{0}$$

を満たしているとする．直線 OP と平面 ABC の交点を Q とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のそれぞれを，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) △ABQ の面積を求めよ．

(3) △ABC の重心を G とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ と平面 ABC が垂直であることを示せ．

(4) 四面体 PABQ の体積を求めよ．

4 次の文章中の空欄を適当な数で埋めよ．

A，B，C という 3 つの袋がある．どの袋の中にも赤玉 2 個と白玉 1 個が入っている．この状態から初めて，3 つの袋の間で次のような 3 回の玉の移動を考える．

> 1 回目は，A から玉を 1 個取り出し，B へ入れる．1 回目の玉の移動が終わったときの B の中の赤玉の個数を N_1 とする．
>
> 続けて，2 回目は，B から玉を 1 個取り出し，C へ入れる．2 回目の玉の移動が終わったときの C の中の赤玉の個数を N_2 とする．
>
> 続けて，3 回目は，C から玉を 1 個取り出し，A へ入れる．3 回目の玉の移動が終わったときの A の中の赤玉の個数を N_3 とする．

ただし，袋 A から玉が取り出されるとき，どの玉も同じ確率で取り出されるものとする．袋 B，C から玉が取り出されるときも同様とする．

$N_1 = 2$ となる確率は $\boxed{\text{あ}}$ であり，$N_1 = 3$ となる確率は $\boxed{\text{い}}$ である．

「1 回目に赤玉が移動して 2 回目に白玉が移動する」確率は $\boxed{\text{う}}$ である．一方,「1 回目に白玉が移動して 2 回目に白玉が移動する確率」は $\boxed{\text{え}}$ である．よって，$N_2 = 2$ となる確率は $\boxed{\text{お}}$ である

1 回目の移動が終わったときの，A の中の赤玉の個数に注意すると，$N_3 = 1$ となる確率は $\boxed{\text{か}}$ であり，$N_3 = 3$ となる確率は $\boxed{\text{き}}$ である．また，$N_3 = 2$ となる確率は $\boxed{\text{く}}$ である．

5 座標平面上に円 $C : x^2 + y^2 = 1$ と点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ がある．A を通る傾き t の直線と C との 2 つの交点を $\mathrm{Q}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}_2(x_2,\ y_2)$ とする．ただし，$x_1 < x_2$ とする．また，C の Q_1 における接線を ℓ_1，Q_2 における接線を ℓ_2 とする．ℓ_1 と ℓ_2 は交わり，その交点を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $x_2 - x_1$ と $y_2 - y_1$ を，それぞれ t を用いて表せ．

(2) $X = -2t$ であることを示せ．

(3) t がすべての実数値をとって変化するとき，点 P の軌跡を求めよ．

6 x を実数とするとき，次の不等式を満たす x の値の範囲を求めよ．

$$8^x + 8^{-x} - (4^x + 4^{-x}) - 11 \geqq 0$$

$\boxed{7}$ 2つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$を，$a_1 = \dfrac{1}{2}$，$b_1 = 2$，および

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 1 \end{cases} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．このとき，次の各問に答えよ．

(1) a_2，b_2，a_3，b_3を求めよ．

(2) 次の式を満たす定数p，q，rの組を2組求めよ．

$$a_{n+1} + pb_{n+1} + q = r(a_n + pb_n + q) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(3) $\{a_n\}$，$\{b_n\}$について，それぞれの第n項a_n，b_nを求めよ．

(4) 2つの数列$\{c_n\}$，$\{d_n\}$を，$c_1 = \sqrt{2}$，$d_1 = 4$，および

$$\begin{cases} c_{n+1} = c_n d_n \\ d_{n+1} = 2{c_n}^2 \end{cases} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．$\{c_n\}$，$\{d_n\}$の第n項c_n，d_nについて，${c_n}^2 d_n$を求めよ．

$\boxed{8}$ 微分可能な関数$f(x)$，$g(x)$が，$g(0) = 1$，および

$$f(x) = g(x) + 3\int_0^x e^{t-x} f(t)\,dt$$

を満たしているとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $f'(x) = 2f(x) + h(x)$を満たす関数$h(x)$を，$g(x)$と$g'(x)$を用いて表せ．

(2) $e^{-2x}f(x)$の導関数を，$g(x)$，$g'(x)$およびe^{-2x}を用いて表せ．

(3) $e^{-2x}f(x)$が定数関数のとき，$e^x g(x)$も定数関数であることを示せ．また，このときの$g(x)$および$f(x)$を求めよ．

(4) $g(x) = x^2 + 1$のとき，$f(x)$を求めよ．

$\boxed{9}$ 袋の中に，1 から 10 までの数が 1 つずつ書かれた 10 枚の札が入っている．これをはじめの状態とする．袋から無作為に 1 枚の札を取り出し，取り出した札は袋の中に戻さないという操作を，はじめの状態から続けて n 回行う．n 回のうち，k 回目 $(k=1,2,3,\cdots,n)$ の操作で取り出された札に書かれた数を X_k とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $n=6$ のとき，$X_1,\ X_2,\cdots,X_6$ の組 $(X_1,\ X_2,\cdots,X_6)$ で，$X_1=1$，$X_2=2$ かつ次の $(*)$ を満たす例を 1 つ挙げよ．

$(*)$ すべての $i,\ j\ (i \neq j)$ に対して $X_i+X_j \neq 10$

(2) $n=7$ のとき，次の $(**)$ が必ず成り立つことを示せ．

$(**)$ $X_i+X_j=10$ を満たす $i,\ j\ (i \neq j)$ が存在する．

(3) $n=3$ のとき，3 回目の操作ではじめて (2) の $(**)$ が成り立つ確率を求めよ．

(4) $n=4$ のとき，4 回目の操作ではじめて (2) の $(**)$ が成り立つ確率を求めよ．

$\boxed{10}$ 次の各問に答えよ．

(1) 整数 p を 5 以上の素数とする．このとき，$p+2$ が素数ならば，$p+1$ は 6 の倍数であることを示せ．

(2) ある素数を 2 進法で表したとき，すべての位の数字が 1 である k 桁の数 $\overbrace{11\cdots1}^{k\text{ 個}}$ になったとする．このとき，k は素数であることを示せ．ただし必要ならば自然数 m に対して，

$$X^m-1=(X-1)(X^{m-1}+X^{m-2}+\cdots+X+1)$$

が成り立つことを用いよ．

11 平面上に，長さ 2 の線分 AB を直径とする円 O_1 があり，その中心を M とする．AB を $t:(1-t)$ に内分する点を C とし，C を通る AB の垂線と O_1 の円周との交点の 1 つを D とする．ただし，$0<t<1$ とする．また，3 点 B，C，D を通る円を O_2 とし，その中心を N とする．さらに，3 点 D，M，N を通る円を O_3 とし，その中心を P とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 線分 CD の長さを t を用いて表せ．

(2) 2 つの円 O_2 と O_3 の面積が等しくなるときの t の値を求めよ．

(3) △MNP の面積が最大となるときの t の値を求めよ．

(4) 4 点 B，M，P，N が同一円周上にあるときの t の値を求めよ．

12 次の各問に答えよ．

(1) 次の等式がすべての実数 α, β に対して成り立つことを示せ．

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2(\alpha+\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$$

(2) 整数 p を 5 以上の素数とする．このとき，$p+2$ が素数ならば，$p+1$ は 6 の倍数であることを示せ．

(3) 座標平面上の 3 つの曲線

$$\begin{aligned}C_1&:y=x^2-4x+2\\C_2&:y=-x^2\\C_3&:y=-x^2+8x-16\end{aligned}$$

で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x)=x(\log x)^2$ を微分すると

$$f'(x)=(\log x)^2+x\cdot 2(\log x)\frac{1}{x}=(\log x+2)\log x$$

(あ) $\boldsymbol{\log x+2}$

(2) $f(x)=\dfrac{\tan x}{x^2}=x^{-2}\tan x$ より

$$\begin{aligned}f'(x)&=-2x^{-3}\tan x+x^{-2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\\&=\frac{-2\sin x\cos x+x}{x^3\cos^2 x}=\frac{x-\sin 2x}{x^3\cos^2 x}\end{aligned}$$

(い) $\boldsymbol{x-\sin 2x}$

(3) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{x^2+x+1}{x-2}=x+3+\dfrac{7}{x-2}$ より

$$\int f(x)\,dx=\frac{x^2}{2}+3x+7\log|x-2|+C \quad (C\text{ は積分定数})$$

(う) $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{2}+3x+7\log|x-2|}$

(4) $f(x)=e^{\sqrt{x}}$ について，$u=\sqrt{x}$ とおくと，$x=u^2$ より $\dfrac{dx}{du}=2u$

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx&=\int e^u\frac{dx}{du}\,du=2\int e^u u\,du\\&=2e^u(u-1)+C=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C\end{aligned}$$

(え) $\boldsymbol{2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}$

(5) $\sin^2 x\cos^2 x=\dfrac{1}{4}\sin^2 2x=\dfrac{1}{8}(1-\cos 4x)$ より

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{12}}\sin^2 x\cos^2 x\,dx&=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{12}}(1-\cos 4x)=\frac{1}{8}\left[\,x-\frac{1}{4}\sin 4x\,\right]_0^{\frac{\pi}{12}}\\&=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{12}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{96}-\frac{\sqrt{3}}{64}\end{aligned}$$

(お) $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{96}-\dfrac{\sqrt{3}}{64}}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x)=x\sqrt{3-x}$ より

$$f'(x)=\sqrt{3-x}+x\cdot\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}=\frac{2(3-x)-x}{2\sqrt{3-x}}=\frac{3(2-x)}{2\sqrt{3-x}},$$

$$f''(x)=\frac{3}{2}\cdot\frac{(-1)\sqrt{3-x}-(2-x)\cdot\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}}{3-x}$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{-2(3-x)+(2-x)}{(3-x)\sqrt{3-x}}=\frac{3(x-4)}{4(3-x)\sqrt{3-x}}$$

C の O における接線の傾き k は　$k=f'(0)=\sqrt{3}$

(あ) $\mathbf{3(2-x)}$　(い) $\mathbf{3(x-4)}$　(う) $\boldsymbol{\sqrt{3}}$

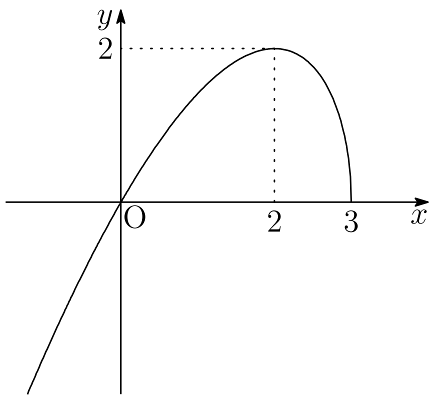
(2) (1) の結果から　$\displaystyle\lim_{3-0} f'(x)=-\infty$

(3) $f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	$\nearrow$	極大 2	$\searrow$	

変曲点はなし．

$C: y=f(x)$ の概形は右の図のとおり．



(4) $f(x)=x\sqrt{3-x}=\{(x-3)+3\}\sqrt{3-x}=-(3-x)^{\frac{3}{2}}+3(3-x)^{\frac{1}{2}}$ より

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3\left\{-(3-x)^{\frac{3}{2}}+3(3-x)^{\frac{1}{2}}\right\}dx$$

$$=\left[\frac{2}{5}(3-x)^{\frac{5}{2}}-2(3-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3=\frac{12}{5}\sqrt{3}$$

$l: y=\sqrt{3}x$ は，$x=3$ のとき，$y=3\sqrt{3}$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot3\sqrt{3}-\dfrac{12}{5}\sqrt{3}=\boldsymbol{\dfrac{21}{10}\sqrt{3}}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $3\overrightarrow{\mathrm{OP}}+8\overrightarrow{\mathrm{AP}}+7\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ より

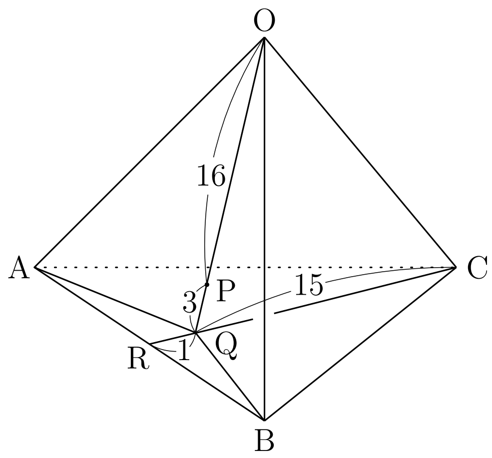
$$3\overrightarrow{\mathrm{OP}}+8(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+7(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})+\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{8\overrightarrow{\mathrm{OA}}+7\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{19}=\frac{16}{19}\cdot\frac{8\overrightarrow{\mathrm{OA}}+7\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{16}$$

よって $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{8\vec{a}+7\vec{b}+\vec{c}}{19}},\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{8\vec{a}+7\vec{b}+\vec{c}}{16}}$

(2) 2 直線 CQ と AB の交点を R とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{8\overrightarrow{\mathrm{CA}}+7\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{16}$$
$$=\frac{15}{16}\cdot\frac{8\overrightarrow{\mathrm{CA}}+7\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{15}=\frac{15}{16}\overrightarrow{\mathrm{CR}}$$

Q は線分 CR を 15 : 1 に内分するから

$$\triangle\mathrm{ABQ}=\frac{1}{16}\triangle\mathrm{ABC}$$
$$=\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot1^2\sin\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{64}}$$

補足 R は線分 AB を 7 : 8 に内分する点である.

(3) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a})+\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})\\&=|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0,\\3\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=(\vec{a}+\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})+\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})\\&=|\vec{c}|^2-|\vec{a}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より, $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ と平面 ABC は垂直である.

(4) $|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|=\dfrac{1}{3}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

求める体積は $\dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{3}{19}\times\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|=\dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{3}{19}\times\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{1216}}$ ■

$\boxed{4}$

- $N_1 = 2$ となる確率は，1 回目に白玉を取り出す確率であるから $\dfrac{1}{3}$

  $N_1 = 3$ となる確率は，1 回目に赤玉を取り出す確率であるから $\dfrac{2}{3}$

- 1 回目に赤玉が移動して 2 回目に白玉が移動する確率は $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{6}$

  1 回目に白玉が移動して 2 回目に白玉が移動する確率は $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{6}$

  よって，$N_2 = 2$ となる確率は $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$

- $N_3 = 1$ となるは，次の色の玉が移動する場合である．

  (1 回目，2 回目，3 回目)=(赤玉，赤玉，白玉)，(赤玉，白玉，白玉)

  よって，その確率は $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{4} = \dfrac{5}{24}$

  $N_3 = 3$ となるは，次の色の玉が移動する場合である．

  (1 回目，2 回目，3 回目)=(白玉，赤玉，赤玉)，(白玉，白玉，赤玉)

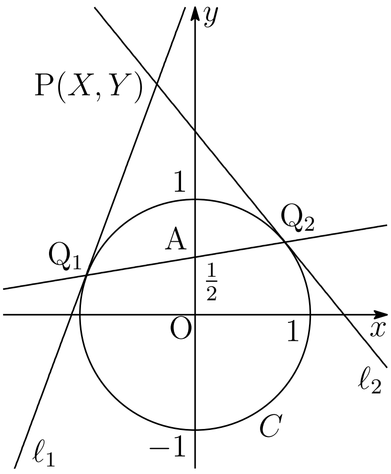
  よって，その確率は $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{2}{4} = \dfrac{5}{24}$

  $N_3 = 2$ となる確率は，$N_3 = 1$ と $N_3 = 3$ の余事象の確率であるから

$$1 - \left(\frac{5}{24} + \frac{5}{24}\right) = \frac{7}{12}$$

(あ) $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$　(い) $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$　(う) $\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$　(え) $\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$　(お) $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$　(か) $\boldsymbol{\dfrac{5}{24}}$　(き) $\boldsymbol{\dfrac{5}{24}}$　(く) $\boldsymbol{\dfrac{7}{12}}$　■

$\boxed{5}$ (1) 点 $\mathrm{A}\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ を通り，傾き t の直線は



$$y = tx + \frac{1}{2} \qquad (*)$$

この直線と $C : x^2 + y^2 = 1$ の方程式から y を消去して整理すると

$$(t^2+1)x^2 + tx - \frac{3}{4} = 0$$

これを解くと　$x = \dfrac{-t \pm \sqrt{4t^2+3}}{2(t^2+1)}$

この方程式の解が $x_1,\ x_2$ であるから $(x_1 < x_2)$

$$x_2 - x_1 = \frac{-t+\sqrt{4t^2+3}}{2(t^2+1)} - \frac{-t-\sqrt{4t^2+3}}{2(t^2+1)} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{4t^2+3}}{t^2+1}}$$

$y_1 = tx_1 + \dfrac{1}{2}$，$y_2 = tx_2 + \dfrac{1}{2}$ であるから

$$y_2 - y_1 = t(x_2 - x_1) = \boldsymbol{\frac{t\sqrt{4t^2+3}}{t^2+1}}$$

(2) 2 点 Q_1，Q_2 を通る直線は点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ を極とする極線

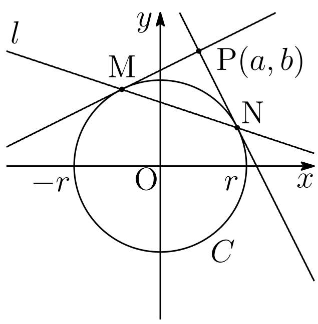
$$Xx + Yy = 1$$

である．$(*)$ より，これが $-2tx + 2y = 1$ に一致するから

$$\boldsymbol{X = -2t},\quad Y = 2 \qquad (**)$$

(3) $(**)$ より，$\mathrm{P}(-2t,\ 2)$ であるから，点 P の軌跡は　$\boldsymbol{y = 2}$ ■

円 $C : x^2 + y^2 = r^2$ の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から C に引いた 2 本の接線の接点を $\mathrm{M}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{N}(x_2,\ y_2)$ とする．2 本の接線



$$x_1x + y_1y = r^2,\quad x_2x + y_2y = r^2$$

は点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通るから

$$ax_1 + by_1 = r^2,\quad ax_2 + by_2 = r^2$$

上の 2 式から直線 $l : ax + by = r^2$ は 2 点 M，N を通る．

このとき，l を P を極とする C の極線という．

$\boxed{6}$ $t=2^x+2^{-x}$ とおくと　$t \geqq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}}=2$　$\cdots$①

$$8^x+8^{-x}=(2^x+2^{-x})^3-3(2^x+2^{-x})=t^3-3t,$$
$$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$$

このとき，不等式 $8^x+8^{-x}-(4^x+4^{-x})-11 \geqq 0$ は

$$t^3-3t-(t^2-2)-11 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t-3)(t^2+2t+3) \geqq 0$$

$t^2+2t+3=(t+1)^2+2>0$ および ① に注意して　$t \geqq 3$

$$2^x+2^{-x} \geqq 3 \quad \text{ゆえに} \quad (2^x)^2-3\cdot 2^x+1 \geqq 0$$

したがって　$2^x \leqq \dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\quad \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \leqq 2^x$

よって　$\boldsymbol{x \leqq \log_2 \dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\quad \log_2 \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \leqq x}$　■

$\boxed{7}$ (1) $a_1=\dfrac{1}{2}$，$b_1=2$ および

$$(*) \begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n \\ b_{n+1}=2a_n+1 \end{cases} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

で定めらた漸化式に $n=1,\ 2$ を順次代入すると

$$a_2=a_1+b_1=\frac{1}{2}+2=\boldsymbol{\frac{5}{2}}, \qquad b_2=2a_1+1=2\cdot\frac{1}{2}+1=\boldsymbol{2},$$
$$a_3=a_2+b_2=\frac{5}{2}+2=\boldsymbol{\frac{9}{2}}, \qquad b_3=2a_2+1=2\cdot\frac{5}{2}+1=\boldsymbol{6}$$

(2) 与えられた等式

$$a_{n+1}+pb_{n+1}+q=r(a_n+pb_n+q) \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

の左辺に $(*)$ を代入すると

$$(1+2p)a_n+b_n+p+q=ra_n+rpb_n+rq$$

係数および定数項を比較すると

$$\begin{cases} 1+2p=r & \cdots ① \\ 1=rp & \cdots ② \\ p+q=rq & \cdots ③ \end{cases}$$

①，② から，r を消去すると

$$1=(1+2p)p \quad \text{ゆえに} \quad (p+1)(2p-1)=0$$

① より　$p=-1$ のとき $r=-1$，$p=\dfrac{1}{2}$ のとき $r=2$

これらを ③ に代入して　$\boldsymbol{(p,\ q,\ r)=\left(-1,\ \dfrac{1}{2},-1\right),\ \left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 2\right)}$

(3) (2) の結果から

$$(**)\begin{cases} a_{n+1}-b_{n+1}+\dfrac{1}{2}=-\left(a_n-b_n+\dfrac{1}{2}\right) \\ a_{n+1}+\dfrac{1}{2}b_{n+1}+\dfrac{1}{2}=2\left(a_n+\dfrac{1}{2}b_n+\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

したがって

$$\begin{aligned} a_n-b_n+\frac{1}{2}&=\left(a_1-b_1+\frac{1}{2}\right)(-1)^{n-1} \\ &=\left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{2}\right)=(-1)^n, \\ a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}&=\left(a_1+\frac{1}{2}b_1+\frac{1}{2}\right)\cdot 2^{n-1} \\ &=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\right)\cdot 2^{n-1}=2^n \end{aligned}$$

上の 2 式から　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{2^{n+1}}{3}+\dfrac{(-1)^n}{3}-\dfrac{1}{2}}$

$\boldsymbol{b_n=\dfrac{2^{n+1}}{3}-\dfrac{2(-1)^n}{3}}$

(4) $c_1=\sqrt{2},\ d_1=4$ および

$$\begin{cases} c_{n+1}=c_nd_n \\ d_{n+1}=2{c_n}^2 \end{cases} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

で定めれた数列は，すべての n について，$c_n>0,\ d_n>0$ であることに注意して，2 式の両辺を 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 c_{n+1}=\log_2 c_n+\log_2 d_n, \quad \log_2 d_{n+1}=2\log_2 c_n+1$$

また　$a_1=\log_2 c_1=\dfrac{1}{2}, \quad b_1=\log_2 d_1=2$

これから，$\log_2 c_n$，$\log_2 d_n$ が，それぞれ a_n，b_n と一致するから

$$\begin{aligned}\log_2 {c_n}^2d_n &= 2\log_2 c_n+\log_2 d_n \\ &= 2a_n+b_n \\ &= 2\left\{\frac{2^{n+1}}{3}+\frac{(-1)^n}{3}-\frac{1}{2}\right\}+\left\{\frac{2^{n+1}}{3}-\frac{2(-1)^n}{3}\right\} \\ &= 2^{n+1}-1\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{{c_n}^2d_n=2^{2^{n+1}-1}}$ ■

$\boxed{8}$ (1) $f(x)=g(x)+3\displaystyle\int_0^x e^{t-x}f(t)\,dt$ より

$$f(x)=g(x)+3e^{-x}\int_0^x e^tf(t)\,dt \tag{$*$}$$

これを微分すると

$$f'(x)=g'(x)-3e^{-x}\int_0^x e^tf(t)\,dt+3f(x) \tag{$**$}$$

$(*)$ と $(**)$ の辺々を加えて整理すると

$$f'(x)=2f(x)+g(x)+g'(x) \tag{A}$$

これが $f'(x)=2f(x)+h(x)$ と一致するから

$$\boldsymbol{h(x)=g(x)+g'(x)}$$

(2) $e^{-2x}f(x)$ を微分し，(A) を代入すると

$$\begin{aligned}\{e^{-2x}f(x)\}' &= -2e^{-2x}f(x)+e^{-2x}f'(x) \\ &= -2e^{-2x}f(x)+e^{-2x}\{2f(x)+g(x)+g'(x)\} \\ &= \boldsymbol{e^{-2x}\{g(x)+g'(x)\}}\end{aligned}$$

(3) $e^{-2x}f(x)$ が定数関数のとき，(2) の結果は 0 であるから

$$g(x)+g'(x)=0 \quad \text{ゆえに} \quad e^x g(x)+e^x g'(x)=0$$

$\{e^x g(x)\}'=0$ であるから，定数 C_1 を用いて

$$e^x g(x)=C_1 \quad \text{ゆえに} \quad g(x)=C_1e^{-x}$$

$g(0)=1$ であるから　$C_1=1$　よって　$\boldsymbol{g(x)=e^{-x}}$

$e^{-2x}f(x)$ が定数関数であるから，定数 C_2 を用いて

$$e^{-2x}f(x)=C_2 \quad \text{ゆえに} \quad f(x)=C_2e^{2x}$$

$(*)$ に $x=0$ を代入すると　$f(0)=g(0)=1$　ゆえに　$C_2=1$

よって　　$\boldsymbol{f(x)=e^{2x}}$

(4) (A) に $g(x)=x^2+1$ を代入することにより

$$f'(x)-2f(x)=(x+1)^2 \quad \text{ゆえに} \quad \{e^{-2x}f(x)\}'=e^{-2x}(x+1)^2$$

積分定数 C を用いて

$$\begin{aligned} e^{-2x}f(x) &= \int e^{-2x}(x+1)^2\,dx \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2x}\left\{(x+1)^2+\frac{\{(x+1)^2\}'}{2}+\frac{\{(x+1)^2\}''}{2^2}\right\}+C \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2+3x+\frac{5}{2}\right)+C \end{aligned}$$

したがって　$f(x)=-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{4}+Ce^{2x}$

$f(0)=1$ であるから　$\boldsymbol{f(x)=-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{4}+\dfrac{9}{4}e^{2x}}$

補足　ここでは，次の積分公式を利用している[1]．

$$\int e^{px}f(x)\,dx=\frac{e^{px}}{p}\left\{f(x)-\frac{f'(x)}{p}+\frac{f''(x)}{p^2}-\frac{f'''(x)}{p^3}+\cdots\right\}+C$$

$$\int e^{-px}f(x)\,dx=-\frac{e^{px}}{p}\left\{f(x)+\frac{f'(x)}{p}+\frac{f''(x)}{p^2}+\frac{f'''(x)}{p^3}+\cdots\right\}+C$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_math_2015_kouki.pdf (p.7 を参照)

$\boxed{9}$ (1) $(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6)=(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 10)$

補足 $A_1=\{1,\ 9\}, A_2=\{2,\ 8\}, A_3=\{3,\ 7\}, A_4=\{4,\ 6\}, A_5=\{5\}, A_6=\{10\}$ とすると，A_k $(k=1,2,3,4,5,6)$ から 1 つずつ取り出す場合である．残りの $A_3,\ A_4$ から 1 つずつ選ぶ場合であるから，全部で $2^2=4$ 通りある．

(2) $A_1=\{1,\ 9\}, A_2=\{2,\ 8\}, A_3=\{3,\ 7\}, A_4=\{4,\ 6\}, A_5=\{5\}, A_6=\{10\}$ とする．1 から 10 の 10 枚の札から 7 枚取り出すとき，$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ の 4 組の同じ組から 2 枚取り出されるものが少なくとも 1 組存在する．
したがって，$(**)$ が成立する．

(3) $(**)$ を満たす組合せは $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ の 4 通りある．A_k $(k=1,2,3,4)$ の要素 2 枚とそれ以外の 8 枚から 1 枚選んだ 3 枚について，A_k の要素が必ず 3 回目に並ぶ場合が $2{\cdot}2!=4$ 通りある．よって，求める確率は

$$\frac{4{\cdot}8{\cdot}4}{{}_{10}\mathrm{P}_3}=\frac{4{\cdot}8{\cdot}4}{10{\cdot}9{\cdot}8}=\boldsymbol{\frac{8}{45}}$$

(4) $(**)$ を満たす組合せは $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ の 4 通りある．A_k $(k=1,2,3,4)$ の要素 2 枚とそれ以外の 8 枚から 2 枚選ぶとき，A_j $(j\neq k)$ から 2 枚選ぶ場合を除いた

$${}_8\mathrm{C}_2-3=\frac{8{\cdot}7}{2{\cdot}1}-3=25\ (\text{通り})$$

これら 4 枚について，A_k の要素が必ず 4 回目に並ぶ場合が $2{\cdot}3!=12$ 通りある．よって，求める確率は

$$\frac{4{\cdot}25{\cdot}12}{{}_{10}\mathrm{P}_4}=\frac{4{\cdot}25{\cdot}12}{10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7}=\boldsymbol{\frac{5}{21}}$$

■

10 (1) p は 5 以上の素数であるから，p は奇数，すなわち，$p+1$ は偶数．
2 数 $p,\ p+2\ (p \geqq 5)$ が素数であるから，p と $p+2$ はともに 3 で割り切れない．このとき，連続する 3 整数 $p,\ p+1,\ p+2$ のうち 1 つが 3 の倍数，すなわち，$p+1$ が 3 の倍数である．ゆえに，$p+1$ は偶数かつ 3 の倍数．
よって，$p+1$ は 6 の倍数である．

補足 $p \geqq 5$ とする双子素数 $(p,\ p+2)$ について，その間の $p+1$ が 6 の倍数になることは，次からも分かる．5 以上の整数を

$$6n-1,\ 6n,\ 6n+1,\ 6n+2,\ 6n+3,\ 6n+4 \quad (n=1,2,\cdots)$$

とおくと，$6n,\ 6n+2=2(3n+1),\ 6n+3=3(2n+1),\ 6n+4=2(3n+2)$ であるから，2 整数

$$(p,\ p+2)=(6n-1,\ 6n+1)$$

が双子素数であるための必要条件である．
よって，$(p,\ p+2)$ が双子素数のとき，$p+1=6n$ は 6 の倍数である．
一般に，5 以上の整数 N について，$N \equiv \pm 1 \pmod 6$ は N が素数であるための必要条件である．エラトステネスの篩(ふるい) (素数判定) で数字を書き並べるとき，1 列に 6 個ずつ数字を並べると，素数の配列が分かりやすい．
双子素数は無数に存在するかという問題，いわゆる「双子素数の予想」や「双子素数の問題」は，いまだに数学上の未解決問題である．無数に存在するだろうと，多くの数論学者が予想している．

(2) すべての位の数字が 1 である k 桁の数 $\overbrace{11\cdots1}^{k\text{ 個}}$ を N とすると

$$N=2^{k-1}+2^{k-2}+\cdots+2+1=2^k-1$$

k が素数でない，すなわち，$k=pq$ (p,q は 2 以上の整数) とすると

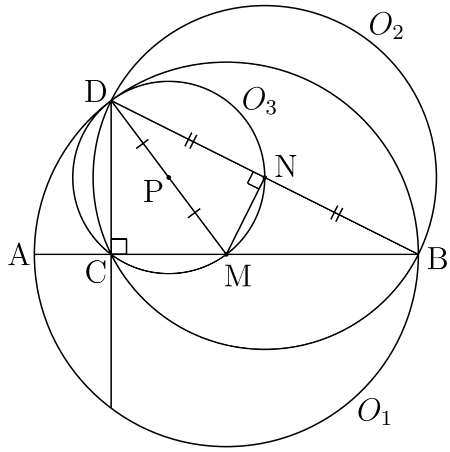
$$N=2^{pq}-1=(2^p)^q-1=(2^p-1)\{2^{p(q-1)}+2^{p(q-2)}+\cdots+2^p+1\}$$

このとき，$2^p-1 \geqq 3$，$2^{p(q-1)}+2^{p(q-2)}+\cdots+2^p+1 \geqq 2^p+1 \geqq 5$

したがって　k が素数でない $\Longrightarrow$ N は素数ではない

よって　N が素数 $\Longrightarrow$ k は素数 ■

11 (1) C は線分 AB を $t:(1-t)$ に内分する点であるから $(0<t<1)$



$$\mathrm{AC}=2t \quad ゆえに \quad \mathrm{CM}=|1-2t|$$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{CD}&=\sqrt{\mathrm{MD}^2-\mathrm{CD}^2}\\&=\sqrt{1^2-(1-2t)^2}\\&=\boldsymbol{2\sqrt{t(1-t)}}\end{aligned}$$

(2) $\angle\mathrm{BCD}=90^\circ$ であるから，O_2 は BD を直径とする円．
BC = AB − AC = 2 − 2t および (1) の結果から，O_2 の半径を R_2 とすると

$$(2R_2)^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{CD}^2 \quad ゆえに \quad {R_2}^2=(1-t)^2+t(1-t)=1-t$$

したがって　$R_2=\sqrt{1-t}$
N は BD の中点で $\triangle\mathrm{BMN}\equiv\triangle\mathrm{DMN}$ より　$\angle\mathrm{MND}=90^\circ$
O_3 は DM を直径とする円で，その半径を R_3 とすると　$R_3=\dfrac{1}{2}$
$R_2=R_3$ より　$\sqrt{1-t}=\dfrac{1}{2}$　これを解いて　$\boldsymbol{t=\dfrac{3}{4}}$

(3) 直角三角形 MND において，MD = 1，DN $=R_2=\sqrt{1-t}$ より

$$\mathrm{MN}=\sqrt{\mathrm{MD}^2-\mathrm{DN}^2}=\sqrt{t}$$

したがって　$\triangle\mathrm{MNP}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{MND}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\mathrm{MN}\cdot\mathrm{DN}=\dfrac{1}{4}\sqrt{t(1-t)}$

$0<t<1$ において　$t(1-t)=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\leqq\dfrac{1}{4}$

よって，△MNP の面積が最大となるとき　$\boldsymbol{t=\dfrac{1}{2}}$

(4) 4 点 B，M，P，N が同一円周上にあるから，方べきの定理の定理により

$$\mathrm{DP}\cdot\mathrm{DM}=\mathrm{DN}\cdot\mathrm{DB}$$

$\mathrm{DP}=\dfrac{1}{2}$，DM = 1，DN $=R_2$，DB $=2R_2$ を代入して

$$\frac{1}{2}\cdot1=2{R_2}^2 \quad ゆえに \quad {R_2}^2=\frac{1}{4}$$

したがって　$1-t=\dfrac{1}{4}$　よって　$\boldsymbol{t=\dfrac{3}{4}}$　■

12 (1) 与えらえた等式

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2(\alpha+\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$$

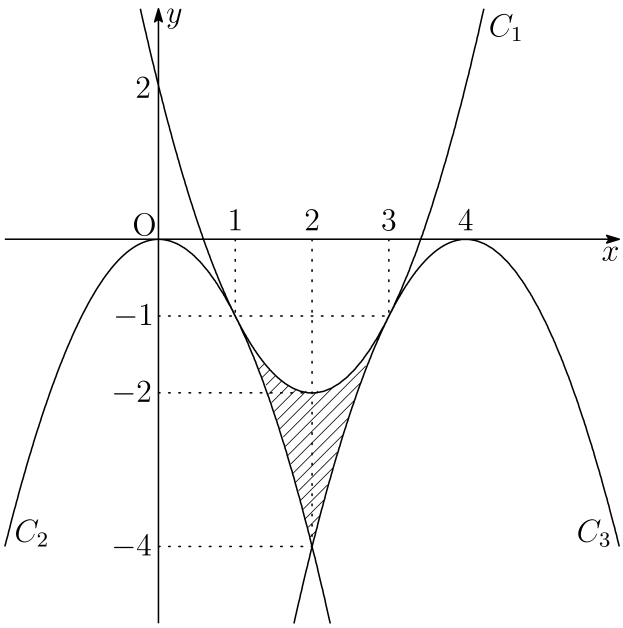
の左辺を変形すると

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)+\frac{1}{2}(1-\cos 2\beta)+1-\cos^2(\alpha+\beta)\\&=2-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)\\&=2-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)\\&=2-\{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\}\cos(\alpha+\beta)\\&=2-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=(\text{右辺})\end{aligned}$$

(2) **10** (1) を参照.

(3) 下の図の斜線部分は，直線 $x=2$ に関して対称であるから，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=2\int_1^2\{x^2-4x+2-(-x^2)\}\,dx=4\int_1^2(x-1)^2\,dx\\&=\frac{4}{3}\Big[\,(x-1)^3\,\Big]_1^2=\boldsymbol{\frac{4}{3}}\end{aligned}$$



■