# 令和３年度　宮崎大学２次試験前期日程 (数学問題)
# 工 (物質環境化学を除く)・医 (医)・農・教育文化 (中学数学・中学社会・理科・技術・家庭・初等教育・特別支援・社会システム) 学部
# 令和３年 2 月 25 日

- 工学部は， $\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部は， $\boxed{3}$ , $\boxed{6}$ ～ $\boxed{9}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 教育文化 (中学数学) 学部は， $\boxed{1}$ , $\boxed{4}$ , $\boxed{8}$ , $\boxed{10}$ 数 I・II・III・A・B (90 分)
- 教育文化 (中学 [社会，理科，技術，家庭]，初等教育，特別支援，社会システム) 学部・農学部は， $\boxed{3}$ , $\boxed{11}$ , $\boxed{12}$ 数 I・II・A・B (90 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ．

(1) **(必答)**
次の空欄 $\boxed{\text{あ}}$ ～ $\boxed{\text{お}}$ を適切な数または数式で埋めよ．

(a) 関数 $f(x) = (x+1)\sqrt{2x+3}$ の導関数は，$f'(x) = \dfrac{\boxed{\text{あ}}}{\sqrt{2x+3}}$ である．

(b) 関数 $f(x) = \dfrac{x}{\sin^2 x}$ の導関数は，$f'(x) = \dfrac{\boxed{\text{い}}}{\sin^3 x}$ である．

(c) $a,\ b$ を正の定数とし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{ax^2+bx+3} - 2x) = 2 \cdots ①$ が成り立つとする．このとき，次の手順で $a,\ b$ の値を求める．
まず，$a$，$b$ の値によらず，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{ax^2+bx+3}+2x}{x^2} = \boxed{\text{う}}$$

が成り立つ．さらに，① より，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{ax^2+bx+3} - 2x)$ が有限な値であるから，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(ax^2+bx+3)-4x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{ax^2+bx+3}+2x}{x^2}\cdot\lim_{x\to\infty}(\sqrt{ax^2+bx+3}-2x)$$

も成り立つ．したがって，$a = \boxed{\text{え}}$ が得られる．
このとき，① より，$b = \boxed{\text{お}}$ も得られる．

(2) [**A**]，[**B**] のいずれか一方を選択し，解答せよ．

[**A**](選択)

次の空欄 $\boxed{\quad ア \quad}$ ～ $\boxed{\quad キ \quad}$ を適切な整数で埋めよ．ただし，$i$ は虚数単位とする．

$w = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ とし，

$$\alpha = w + w^2 + w^4, \quad \beta = w^3 + w^5 + w^6$$

とする．このとき，$w^7 = \boxed{\quad ア \quad}$ より，

$$\alpha + \beta = \boxed{\quad イ \quad}, \quad \alpha\beta = \boxed{\quad ウ \quad}$$

となるので，

$$\alpha = \frac{\boxed{\quad エ \quad} + \sqrt{\boxed{\quad オ \quad}}\,i}{2}, \quad \beta = \frac{\boxed{\quad カ \quad} - \sqrt{\boxed{\quad キ \quad}}\,i}{2}$$

が得られる．

[**B**](選択)

関数 $f(x) = \log x$ および座標平面上の曲線 $y = f(x)$ について，次の空欄 $\boxed{\quad サ \quad}$ ～ $\boxed{\quad ソ \quad}$ を適切な数または数式で埋めよ．ただし，$\log x$ は $x$ の自然対数を表す．

曲線 $y = f(x)$ と $x$ 軸および直線 $x = \sqrt{3}$ で囲まれた部分の面積の値は $\boxed{\quad サ \quad}$ である．

曲線 $y = f(x)$ $(1 \leqq x \leqq \sqrt{3})$ の長さ $L$ は，

$$L = \int_1^{\sqrt{3}} \ell(x)\,dx, \quad \ell(x) = \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} = \sqrt{\frac{x^2+1}{\boxed{\quad シ \quad}}}$$

により求めることができる．$\sqrt{x^2+1} = t$ とおくと，$L$ は，$t$ だけで表される数式 $g(t) = \boxed{\quad ス \quad}$ を用いて，

$$L = \int_{\sqrt{2}}^{2} g(t)\,dt$$

と表される．ここで，不定積分 $\displaystyle\int g(t)\,dt$ を求めると，

$$\int g(t)\,dt = \boxed{\ セ\ } + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

となる．よって，

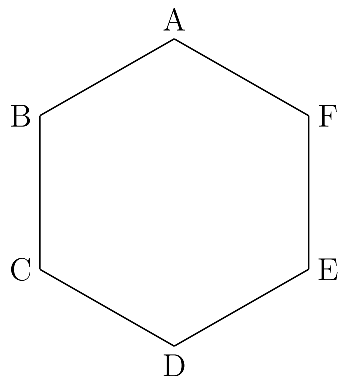
$$L = 2 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\log\frac{\boxed{\quad ソ \quad}}{3}$$

である．

**2** (1) 等式 $3x+4y=42$ を満たす正の整数 $x,\ y$ の組をすべて求めよ．ただし，解答用紙には，答を導く過程は記入せず，求めた $x,\ y$ の組 $(x,\ y)$ だけを記入すること．

(2) 次の空欄 $\boxed{\text{あ}}$ ～ $\boxed{\text{う}}$ を適切な数で埋めよ．

正六角形 ABCDEF の 6 個の頂点のうち 3 点を結んでできる三角形は全部で $\boxed{\text{あ}}$ 個である．そのうち，直角三角形は $\boxed{\text{い}}$ 個であり，3 つの内角のうち少なくとも 1 つが $30^\circ$ である三角形は $\boxed{\text{う}}$ 個である．




**3** $p,\ q$ を実数とする．点 O を原点とする座標空間において，4 点

$$\mathrm{A}(1,\ 1,\ 0),\quad \mathrm{B}(0,\ 2,\ 0),\quad \mathrm{C}(0,\ 0,\ 6),\quad \mathrm{D}(p,\ q,\ 1)$$

をとる．3 点 A，B，C を含む平面を $\alpha$ とし，$\angle\mathrm{AOD}$ の大きさを $\theta$ とし，$\triangle\mathrm{AOD}$ の面積を $S$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $\cos\theta$ を，$p$ と $q$ を用いて表せ．

(2) 面積 $S$ を，$p$ と $q$ を用いて表せ．

(3) 点 D が平面 $\alpha$ 上を動くとき，面積 $S$ の最小値を求めよ．

**4** 数列 $\{a_n\}$ を，

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = 9a_n - 16 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

で定めるとき，数列 $\{a_n\}$ について次の各問に答えよ．

(1) 第 $n$ 項 $a_n$ を求めよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ を，

$$b_n = 2 + 2^{2n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．すべての自然数 $n$ に対し，$b_n - a_n$ は 5 の倍数であることを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x^3}$ $(x>0)$ および座標平面上の曲線 $C: y=f(x)$ について，次の各問に答えよ．ただし，$\log x$ は $x$ の自然対数を表す．

(1) 第1次導関数 $f'(x)$，第2次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$ は，次の3通りのいずれかである．

$$\lim_{x\to+0} f(x) \text{ は有限な値である}$$
$$\lim_{x\to+0} f(x)=\infty$$
$$\lim_{x\to+0} f(x)=-\infty$$

この3通りのいずれであるのか，答えよ．ただし，有限な値であるときは，その値も求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ の増減，極値，曲線 $C$ の凹凸，および変曲点を調べて，曲線 $C$ の概形をかけ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^3}=0$ であることは，既知としてよい．

$\boxed{\mathbf{6}}$ $a,\ b$ を実数とする．このとき，変数 $x$ の関数

$$f(x)=\sin 2x+a(\sin x+\cos x)+b$$

について，次の各問に答えよ．

(1) $t=\sin x+\cos x$ とおくとき，$f(x)$ を，$t$ を用いて表せ．

(2) $x$ の方程式 $f(x)=0$ が少なくとも1つの実数解を持つようなすべての $a$，$b$ を座標平面上の点 $(a,\ b)$ として図示せよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 関数 $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+6x+10}}$ および座標平面上の曲線 $C: y=f(x)$ について，次の各問に答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ を求めよ．

(2) (1) で求めた極限値を $a$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-ax\}$ を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ の増減と極値，および曲線 $C$ の漸近線を調べて，曲線 $C$ の概形をかけ．

$\boxed{\textbf{8}}$ A，B，C，D の 4 人がそれぞれ袋を持っている．

A の袋には，3 枚の札 $\boxed{\mathrm{B}}$ , $\boxed{\mathrm{C}}$ , $\boxed{\mathrm{D}}$ が入っている．

B の袋には，3 枚の札 $\boxed{\mathrm{A}}$ , $\boxed{\mathrm{C}}$ , $\boxed{\mathrm{D}}$ が入っている．

C の袋には，2 枚の札 $\boxed{\mathrm{A}}$ , $\boxed{\mathrm{B}}$ が入っている．

D の袋には，2 枚の札 $\boxed{\mathrm{A}}$ , $\boxed{\mathrm{B}}$ が入っている．

この 4 人の間で，1 個の玉の受け渡しを次のように行う．

(※) はじめに，A が玉を持っている．

A は自分の袋から無作為に 1 枚の札を取り出し，その札に書かれた人へ玉を手渡し，取り出した札を自分の袋へもどす．以降,「玉を手渡された人は自分の袋から無作為に 1 枚の札を取り出し，その札に書かれた人へ玉を手渡し，取り出した札を自分の袋へもどす」ことをくり返す，ただし，A が袋から札を取り出すとき，どの札も同じ確率で取り出されるものとする．B，C，D が袋から札を取り出すときも同様とする．

(※) の状態から始めて，玉の受け渡しが $n$ 回 $(n \geqq 1)$ 行われたとき，

A，B，C，D が玉を持っている確率をそれぞれ $A_n,\ B_n,\ C_n,\ D_n$

とする．また，(※) の状態において，A，B，C，D が玉を持っている確率をそれぞれ $A_0,\ B_0,\ C_0,\ D_0$ とする．すなわち $A_0 = 1$，$B_0 = 0$，$C_0 = 0$，$D_0 = 0$ である．このとき，次の各問に答えよ．なお，すべての $n$ について $C_n = D_n$ であることは，用いてよい．

(1) $A_1$，$B_1$，$C_1$，$A_2$，$B_2$，$C_2$ を求めよ．

(2) $n$ が自然数のとき，$A_n$ を，$B_{n-1}$ と $C_{n-1}$ を用いて表せ．また，$B_n$ を，$C_{n-1}$ と $A_{n-1}$ を用いて表せ．さらに，$C_n$ を，$A_{n-1}$ と $B_{n-1}$ を用いて表せ．

(3) $n$ が 0 または正の整数のとき，$A_n$ を，$n$ を用いて表せ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A_n$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ 次の各問に答えよ．

(1) **(必答)**
次の $\boxed{\text{あ}}$ ～ $\boxed{\text{し}}$ を適切な整数で埋めよ．
$3x^2+10xy+8y^2+8x+10y-3$ を因数分解すると，

$$3x^2+10xy+8y^2+8x+10y-3=(x+ay+b)(3x+cy+d)$$

となる．このとき，定数 $a$，$b$，$c$，$d$ の値は

$$a=\boxed{\text{あ}},\quad b=\boxed{\text{い}},\quad c=\boxed{\text{う}},\quad d=\boxed{\text{え}}$$

である．
これを用いて，等式

$$3x^2+10xy+8y^2+8x+10y+9=0$$

を満たす整数 $x,\ y$ の組 $(x,\ y)$ を求めると，そのような組 $(x,\ y)$ は 4 つあることがわかり，それらを $x$ の値が小さい方から順に並べると，

$$(\boxed{\text{お}},\boxed{\text{か}}),\quad(\boxed{\text{き}},\boxed{\text{く}}),\quad(\boxed{\text{け}},\boxed{\text{こ}}),\quad(\boxed{\text{さ}},\boxed{\text{し}})$$

となる．

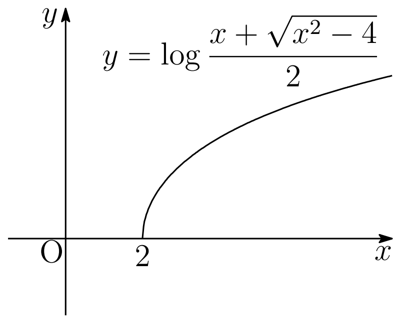
(2) **[A]，[B] のいずれか一方を選択し，解答せよ．**
**[A](選択)**
次の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ を適切な数で埋めよ．ただし，$i$ は虚数単位とする．
複素数

$$z_1=2+2\sqrt{3}i,\quad z_2=5+5\sqrt{3}i,\quad z_3=5-4\sqrt{3}+(4+5\sqrt{3})i$$

および $\alpha=1+\sqrt{2}i$ に対し，$\alpha z_1$，$\alpha z_2$，$\alpha z_3$ で表される複素数平面上の点をそれぞれ $\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_2$，$\mathrm{P}_3$ とする．
このとき，$\dfrac{z_3}{1+\sqrt{3}i}=x+yi$ ($x$，$y$ は実数) となる $x$，$y$ の値は $x=\boxed{\text{ア}}$，$y=\boxed{\text{イ}}$ である．また，$|\alpha|=\boxed{\text{ウ}}$ である．さらに，$\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ の面積は $\boxed{\text{エ}}$ である．

[**B**](選択)
次の空欄 $\boxed{\quad カ \quad}$ 〜 $\boxed{\quad シ \quad}$ を適切な数または数式で埋めよ．ただし，$\boxed{\quad カ \quad}$ は $x$ だけを用いて表された数式，$\boxed{\quad キ \quad}$ は $y$ だけを用いて表された数式，$\boxed{\quad サ \quad}$ と $\boxed{\quad シ \quad}$ は整数で埋めよ．また，$\log x$ は $x$ の自然対数を表す．

曲線 $y = \log \dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$ $(x \geqq 2)$ の概形は右図のようになる．




$y = \log \dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$ のとき，

$$(2e^y - x)^2 = \boxed{\quad カ \quad}$$

であり，

$$x = \boxed{\quad キ \quad}$$

である．

曲線 $y = \log \dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$ と $x$ 軸および直線 $x = 4$ とで囲まれた図形を $x$ 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を $V$ とする．体積 $V$ は，

$$V = \int_2^4 \boxed{\quad ク \quad} dx$$

により求めることができる．$\log \dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2} = t$ とおくと，$V$ は，$t$ だけで表される数式 $f(t) = \boxed{\quad ケ \quad}$ と $a = \log(2+\sqrt{3})$ を用いて，

$$V = \int_0^a f(t)\, dt$$

と表される．ここで，0 でない定数 $k$ に対し，関数 $t^2e^{kt}$ の不定積分は

$$\int t^2 e^{kt}\, dt = \frac{e^{kt}}{k^3}\left(\boxed{\quad コ \quad}\right) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

である．よって，

$$V = 4\pi\left(a^2 - \sqrt{\boxed{\quad サ \quad}}\,a + \boxed{\quad シ \quad}\right)$$

である．

**10** $r > 0$ とする．点 O を原点とする座標平面において，中心が O，半径が $r$ の円を $C$ とする．傾きが $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であり，かつ $C$ と第 1 象限で接する直線を $\ell$ とし，$\ell$ と $C$ との接点を A とする．また，点 B$(r,\ 0)$ を通り，かつ $x$ 軸に垂直な直線と $\ell$ との交点を D とし，線分 OD と $C$ との交点を E とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 直線 $\ell$ の方程式を求めよ．

(2) $\triangle$OAD の面積を，$r$ を用いて表せ．

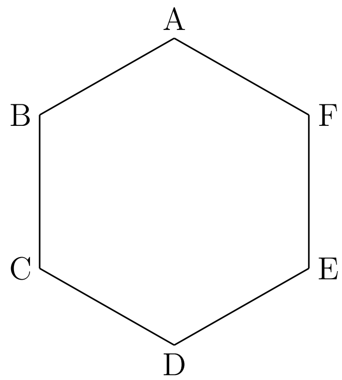
(3) $\triangle$OAE の面積を，$r$ を用いて表せ．

(4) (2) および (3) の結果を用いて，$3 < \pi < 3.5$ を示せ．ただし，$\sqrt{3} < 1.74$ を用いてよい．

**11** (1) 等式 $3x + 4y = 42$ を満たす正の整数 $x,\ y$ の組をすべて求めよ．ただし，解答用紙には，答を導く過程は記入せず，求めた $x,\ y$ の組 $(x, y)$ だけを記入すること．

(2) 次の空欄 $\boxed{\text{あ}}$ ～ $\boxed{\text{う}}$ を適切な数で埋めよ．

正六角形 ABCDEF の 6 個の頂点のうち 3 点を結んでできる三角形は全部で $\boxed{\text{あ}}$ 個である．そのうち，直角三角形は $\boxed{\text{い}}$ 個であり，3 つの内角のうち少なくとも 1 つが $30^\circ$ である三角形は $\boxed{\text{う}}$ 個である．



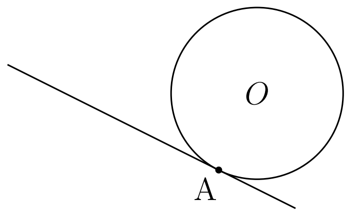

(3) 次の空欄 $\boxed{\text{か}}$ ～ $\boxed{\text{さ}}$ を適切な数で埋めよ．

座標平面上の 2 つの放物線 $C_1 : y = x^2 - 3x$ と $C_2 : y = -x^2 + 5x + 24$ は，2 つの交点を持つ．その 2 交点の $x$ 座標 $\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ は，$\alpha = \boxed{\text{か}}$，$\beta = \boxed{\text{き}}$ である．2 曲線 $C_1$ と $C_2$ で囲まれる部分の面積を $S$ とする．$S$ は，

$$S = \int_\alpha^\beta \left( \boxed{\text{く}}\,x^2 + \boxed{\text{け}}\,x + \boxed{\text{コ}} \right) dx$$

により求めることができ，$S = \boxed{\text{さ}}$ である．

**12** 円 $O$ の周上の点 A において円 $O$ の接線を引く．




その接線上に A と異なる点 B をとる．B から円 $O$ に 2 点で交わるように直線 $\ell$ を引き，その 2 点のうち B に近い方を C，B から遠い方を D とする．ただし，直線 $\ell$ は，$\angle\mathrm{ACD} < 90^\circ$ を満たすように引く．また，点 B から直線 AC と直線 AD に下ろした垂線の足をそれぞれ E，F とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $\angle\mathrm{BFE} = \angle\mathrm{ADC}$ を示せ．

(2) $\mathrm{BD} \perp \mathrm{EF}$ を示せ．

# 解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) (a) $f(x)=(x+1)\sqrt{2x+3}$ より

$$f'(x)=\sqrt{2x+3}+(x+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$$
$$=\frac{2x+3+(x+1)}{\sqrt{2x+3}}=\frac{3x+4}{\sqrt{2x+3}}$$

(あ) $\boldsymbol{3x+4}$

(b) $f(x)=\dfrac{x}{\sin^2 x}=x(\sin x)^{-2}$ より

$$f'(x)=(\sin x)^{-2}+x\cdot(-2)(\sin x)^{-3}\cos x=\frac{\sin x-2x\cos x}{\sin^3 x}$$

(い) $\boldsymbol{\sin x-2x\cos x}$

(c) $a,\ b$ の値によらず $(a,\ b>0)$，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{ax^2+bx+3}+2x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+2}{x}=0$$

が成り立つ．$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{ax^2+bx+3}-2x)=2\cdots$ ① であるから

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(ax^2+bx+3)-4x^2}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{ax^2+bx+3}+2x}{x^2}\cdot\lim_{x\to\infty}(\sqrt{ax^2+bx+3}-2x)=0$$

したがって，$a=4$ が得られる．
このとき，① より

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+bx+3}-2x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x^2+bx+3)-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+bx+3}+2x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{bx+3}{\sqrt{4x^2+bx+3}+2x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{b+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{4+\dfrac{b}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+2}=\frac{b}{4}=2$$

よって　$b=8$

(う) **0**　(え) **4**　(お) **8**

(2) **[A]**

$w = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}$,

$$\alpha = w + w^2 + w^4, \quad \beta = w^3 + w^5 + w^6$$

このとき，$w^7 = 1$ より　$(1-w)(1+w+w^2+w^3+w^4+w^5+w^6) = 0$

$$1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6 = 0$$

したがって

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6 = -1 \\ \alpha\beta &= (w + w^2 + w^4)(w^3 + w^5 + w^6) \\ &= 3 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6 = 2 \end{aligned}$$

$\alpha,\ \beta$ を解とする 2 次方程式は　　$x^2 + x + 2 = 0$

これを解いて　　$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

(ア) **1**　(イ) **−1**　(ウ) **2**　(エ) **−1**　(オ) **7**　(カ) **−1**　(キ) **7**

[**B**]

曲線 $y=\log x$ と $x$ 軸および直線 $x=\sqrt{3}$ で囲まれた部分の面積は

$$\int_1^{\sqrt{3}} \log x\,dx = \Big[\ x(\log x - 1)\ \Big]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\log 3 - \sqrt{3} + 1$$

曲線 $y=\log x$ $(1 \leqq x \leqq \sqrt{3})$ の長さ $L$ は

$$L = \int_1^{\sqrt{3}} \ell(x)\,dx, \quad \ell(x) = \sqrt{1+\{f'(x)\}^2} = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}$$

により求めることができる．$\sqrt{x^2+1} = t$ とおくと

$$x^2 = t^2 - 1, \quad \ell(x) = \frac{t}{x} = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{t^2-1}}{t}$$

| $x$ | $1 \longrightarrow \sqrt{3}$ |
|---|---|
| $t$ | $\sqrt{2} \longrightarrow 2$ |

$$\ell(x)\,dx = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = \frac{t^2}{t^2-1}\,dt$$

$L$ は，$t$ だけで表される数式 $g(t) = \dfrac{t^2}{t^2-1}$ を用いて

$$L = \int_{\sqrt{2}}^2 g(t)\,dt$$

と表される．ここで，不定積分 $\displaystyle\int g(t)\,dt$ を求めると，

$$\int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt = \int \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right) dt = t + \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

よって　$L = \left[\ t + \dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|\ \right]_{\sqrt{2}}^2 = 2 - \sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\log\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3}$

(サ) $\boldsymbol{\frac{1}{2}\log 3 - \sqrt{3} + 1}$　(シ) $\boldsymbol{x^2}$　(ス) $\boldsymbol{\frac{t^2}{t^2-1}}$　(セ) $\boldsymbol{t + \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|}$
(ソ) $\boldsymbol{3 + 2\sqrt{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $3x+4y=42$ より　$4y=3(14-x)$

$14-x=4k$ とおくと ($k$ は整数)　$x=14-4k,\ y=3k$

$x,\ y$ は正の整数であるから　$k=1,\ 2,\ 3$

よって　$\boldsymbol{(x,\ y)=(10,\ 3),\ (6,\ 6),\ (2,\ 9)}$

(2) 三角形の総数は　${}_6\mathrm{C}_3=20$ (個)

直角三角形の総数は，斜辺を AD，BE，CF とするときそれぞれ 4 個ずつできるから

$$3\times 4=12\ (個)$$

$30^\circ$ の角をもたない三角形は，正三角形 ACE および正三角形 BDF の 2 個である．よって，3 つの内角のうち少なくとも 1 つが $30^\circ$ である三角形は

$$20-2=18\ (個)$$

補足 正六角形は円に内接し，それぞれの辺に対する円周角は $30^\circ$ である．$30^\circ$ でない円周角は，三角形が正六角形の辺と共有しない，すなわち，正三角形のときに限る．

(あ) **20**　(い) **12**　(う) **18**

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(p,\ q,\ 1)$，$\theta=\angle\mathrm{AOD}$ より $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|}=\frac{p+q}{\sqrt{2}\sqrt{p^2+q^2+1}}=\boldsymbol{\frac{p+q}{\sqrt{2(p^2+q^2+1)}}}$$

(2) (1) の結果から

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{p+q}{\sqrt{2(p^2+q^2+1)}}\right)^2$$
$$=\frac{2(p^2+q^2+1)-(p+q)^2}{2(p^2+q^2+1)}=\frac{(p-q)^2+2}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2}$$

$\sin\theta>0$ より　　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{(p-q)^2+2}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|}$

よって　　$S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|\sin\theta=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\sqrt{(p-q)^2+2}}$

(3) 点 $\mathrm{D}(p,\ q,\ 1)$ が平面 ABC 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}},\qquad \alpha+\beta+\gamma=1$$

したがって

$$(p,\ q,\ 1)=\alpha(1,\ 1,\ 0)+\beta(0,\ 2,\ 0)+\gamma(0,\ 0,\ 6)$$
$$=(\alpha,\ \alpha+2\beta,\ 6\gamma)$$

成分を比較して　$p=\alpha,\ q=\alpha+2\beta,\ 1=6\gamma$

したがって　　　$\alpha=p,\ \beta=\dfrac{q-p}{2},\ \gamma=\dfrac{1}{6}$

$\alpha+\beta+\gamma=1$ に代入すると

$$p+\frac{q-p}{2}+\frac{1}{6}=1 \qquad \text{ゆえに}\quad q=\frac{5}{3}-p \quad \cdots①$$

① を (2) の結果に代入すると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\left(2p-\frac{5}{3}\right)^2+2}$$

上式および ① から，$p=q=\dfrac{5}{6}$ のとき，$S$ は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $a_{n+1}=9a_n-16$ より　$a_{n+1}-2=9(a_n-2)$

数列 $\{a_n-2\}$ は初項 $a_1-2=3$，公比 $9$ の等比数列であるから

$$a_n-2=3{\cdot}9^{n-1}\quad ゆえに\quad \boldsymbol{a_n=2+3{\cdot}9^{n-1}}$$

(2) $b_n=2+2^{2n+1}$ および (1) の結果から　$b_n-a_n=2^{2n+1}-3{\cdot}9^{n-1}$

$$(*)\quad b_n-a_n=2^{2n+1}-3{\cdot}9^{n-1}\text{は}\,5\,\text{の倍数である．}$$

[1] $n=1$ のとき　$b_1-a_1=2^3-3{\cdot}1=5$
このとき，$(*)$ は成立する．

[2] $n=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定し

$$b_k-a_k=2^{2k+1}-3{\cdot}9^{k-1}=5N\quad (N\text{ は整数})$$

とおくと

$$\begin{aligned}b_{k+1}-a_{k+1}&=2^{2k+3}-3{\cdot}9^k=4{\cdot}2^{2k+1}-3{\cdot}9^k\\&=4(5N+3{\cdot}9^{k-1})-27{\cdot}9^{k-1}\\&=5(4N-3{\cdot}9^{k-1})\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも，$(*)$ は成立する．

[1]，[2] より，すべての自然数 $n$ について，$(*)$ は成立する．

補足 法 $5$ について

$$\begin{aligned}2^{2n+1}-3{\cdot}9^{n-1}&=2{\cdot}4^n-3{\cdot}9^{n-1}\\&\equiv 2(-1)^n-3(-1)^{n-1}\\&\equiv -2(-1)^{n-1}-3(-1)^{n-1}\\&\equiv -5(-1)^{n-1}\equiv 0\pmod 5\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $f(x)=x^{-3}\log x$ より

$$f'(x)=-3x^{-4}\log x+x^{-3}\cdot\frac{1}{x}=x^{-4}(-3\log x+1)$$

$$f''(x)=-4x^{-5}(-3\log x+1)+x^{-4}\left(-\frac{3}{x}\right)$$
$$=x^{-5}(12\log x-7)$$

よって　$\boldsymbol{f'(x)=\dfrac{1-3\log x}{x^4},\quad f''(x)=\dfrac{12\log x-7}{x^5}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^3}=\infty,\quad \lim_{x\to+0}\log x=-\infty$ より

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^3}\cdot\log x=\boldsymbol{-\infty}$$

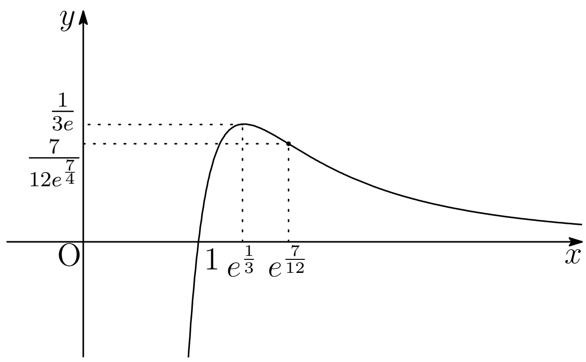
(3) (1) の結果から，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $e^{\frac{1}{3}}$ | $\cdots$ | $e^{\frac{7}{12}}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | ↗ | $\frac{1}{3e}$ | ↘ | $\frac{7}{12e^{\frac{7}{4}}}$ | ↘ |

また　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to\infty}f(x)=0$

$\boldsymbol{x=e^{\frac{1}{3}}}$ で極大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{3e}}$，変曲点 $\boldsymbol{\left(e^{\frac{7}{12}},\ \dfrac{7}{12e^{\frac{7}{4}}}\right)}$

よって，$y=f(x)$ のグラフの概形は次のようになる．




$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $(*)$　$t=\sin x+\cos x$ の両辺を平方すると

$$t^2=1+2\sin x\cos x\quad ゆえに\quad \sin 2x=t^2-1$$

したがって　$f(x)=\sin 2x+a(\sin x+\cos x)+b$
$\qquad=\boldsymbol{t^2+at+b-1}$

(2) $(*)$ より　$t = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$　ゆえに　$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$

$g(t) = t^2 + at + b - 1$ とおくと $(-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2})$

$$g(t) = \left(t + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b - 1$$

(i) $-\frac{a}{2} < -\sqrt{2}$，すなわち，$a > 2\sqrt{2}$ のとき

$$g(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}a + b + 1 \leqq 0, \quad g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}a + b + 1 \geqq 0$$

したがって　$-\sqrt{2}a - 1 \leqq b \leqq \sqrt{2}a - 1$

(ii) $-\sqrt{2} \leqq -\frac{a}{2} \leqq 0$，すなわち，$0 \leqq a \leqq 2\sqrt{2}$ のとき

$$g\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} + b - 1 \leqq 0, \quad g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}a + b + 1 \geqq 0$$

したがって　$-\sqrt{2}a - 1 \leqq b \leqq \frac{a^2}{4} + 1$

(iii) $0 \leqq -\frac{a}{2} \leqq \sqrt{2}$，すなわち，$-2\sqrt{2} \leqq a \leqq 0$ のとき

$$g\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} + b - 1 \leqq 0, \quad g(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}a + b + 1 \geqq 0$$

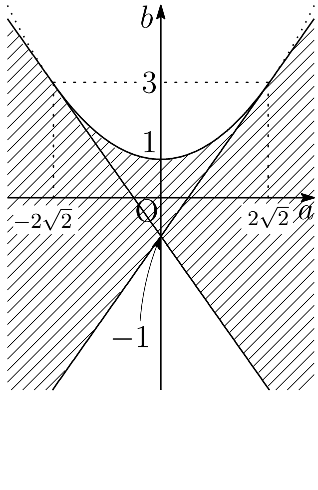
したがって　$\sqrt{2}a - 1 \leqq b \leqq \frac{a^2}{4} + 1$

(iv) $\sqrt{2} < -\frac{a}{2}$，すなわち，$a < -2\sqrt{2}$ のとき

$$g(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}a + b + 1 \geqq 0, \quad g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}a + b + 1 \leqq 0$$

したがって　$\sqrt{2}a - 1 \leqq b \leqq -\sqrt{2}a - 1$

(i)〜(iv) より，求める領域は下の図の斜線部分で境界線を含む．



**7** (1) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+6x+10}}$ より

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+6x+10}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{10}{x^2}}}=\mathbf{1}$$

(2) (1) の結果から，$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ とおくと $\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=1$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\{f(x)-x\}&=\lim_{x\to\infty}x\{g(x)-1\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{g(x)+1}\{g(x)^2-1\}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{g(x)+1}\left(\frac{x^2}{x^2+6x+10}-1\right)\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{g(x)+1}\cdot\frac{-6x^2-10x}{x^2+6x+10}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{g(x)+1}\cdot\frac{-6-\frac{10}{x}}{1+\frac{6}{x}+\frac{10}{x^2}}\\&=\frac{1}{1+1}\cdot\frac{-6}{1}=\mathbf{-3}\end{aligned}$$

(3) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+6x+10}}$ より

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{2x\sqrt{x^2+6x+10}-x^2\cdot\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+10}}}{x^2+6x+10}\\&=\frac{x(x+4)(x+5)}{\{(x+3)^2+1\}^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$ であるから，(2) と同様に

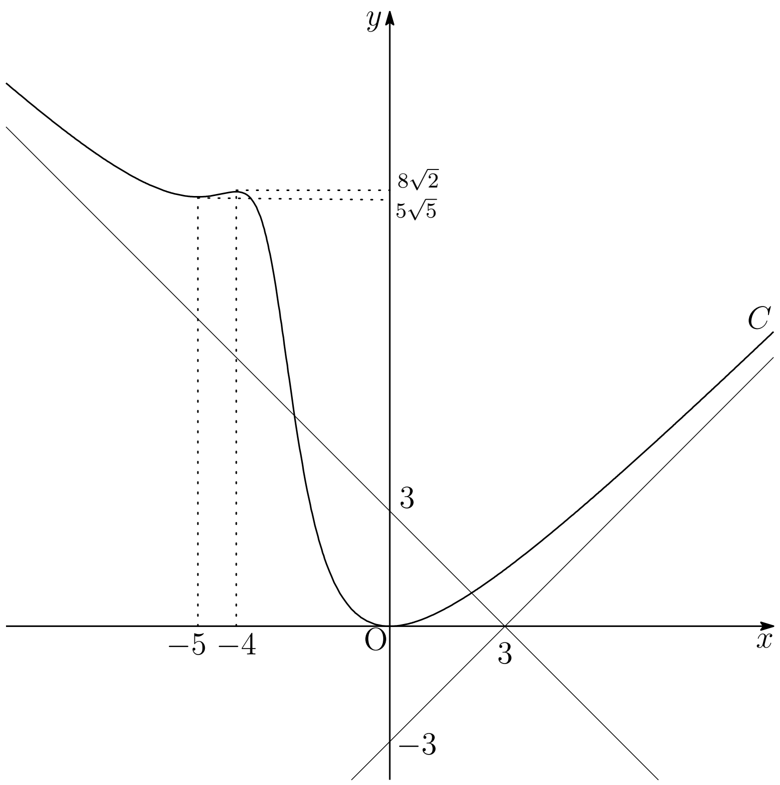
$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\{f(x)+x\}&=\lim_{x\to-\infty}x\{g(x)+1\}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{g(x)-1}\{g(x)^2-1\}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{g(x)-1}\left(\frac{x^2}{x^2+6x+10}-1\right)\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{g(x)-1}\cdot\frac{-6x^2-10x}{x^2+6x+10}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{g(x)-1}\cdot\frac{-6-\frac{10}{x}}{1+\frac{6}{x}+\frac{10}{x^2}}\\&=\frac{1}{-1-1}\cdot\frac{-6}{1}=3\end{aligned}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は

| $x$ | $\cdots$ | $-5$ | $\cdots$ | $-4$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $5\sqrt{5}$ | $\nearrow$ | $8\sqrt{2}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

**極大値 $8\sqrt{2}$ $(x=-4)$，極小値 $5\sqrt{5}$ $(x=-5)$，$0$ $(x=0)$**

$C: y=f(x)$ の漸近線は　$\boldsymbol{y=x-3,\ \ y=-x+3}$



$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) 条件から，次の確率漸化式が成立する．

$$\begin{aligned}
A_0 &= 1,\ B_0 = 0,\ C_0 = 0,\ D_0 = 0 \\
A_n &= \frac{1}{3}B_{n-1} + \frac{1}{2}C_{n-1} + \frac{1}{2}D_{n-1} \\
B_n &= \frac{1}{3}A_{n-1} + \frac{1}{2}C_{n-1} + \frac{1}{2}D_{n-1} \\
C_n &= \frac{1}{3}A_{n-1} + \frac{1}{3}B_{n-1} \\
D_n &= \frac{1}{3}A_{n-1} + \frac{1}{3}B_{n-1}
\end{aligned}$$

確率漸化式に $n=1$ を代入すると

$$\boldsymbol{A_1 = 0,\ B_1 = C_1 = D_1 = \frac{1}{3}}$$

さらに $n=2$ を代入すると

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{1}{3}B_1 + \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{2}D_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{4}{9}} \\
B_2 &= \frac{1}{3}A_1 + \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{2}D_1 = \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{3}} \\
C_2 &= \frac{1}{3}A_1 + \frac{1}{3}B_1 = \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{9}}
\end{aligned}$$

(2) 確率漸化式より $C_n = D_n$ であるから

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A_n} &\boldsymbol{= \frac{1}{3}B_{n-1} + C_{n-1}} \\
\boldsymbol{B_n} &\boldsymbol{= \frac{1}{3}A_{n-1} + C_{n-1}} \\
\boldsymbol{C_n} &\boldsymbol{= \frac{1}{3}A_{n-1} + \frac{1}{3}B_{n-1}}
\end{aligned}$$

(3) $A_n + B_n + C_n + D_n = 1$ に注意すると，(1) の漸化式から

$$\begin{aligned}
A_n + B_n &= \frac{1}{3}(A_{n-1} + B_{n-1}) + (C_{n-1} + D_{n-1}) \\
&= \frac{1}{3}(A_{n-1} + B_{n-1}) + (1 - A_{n-1} - B_{n-1}) \\
&= -\frac{2}{3}(A_{n-1} + B_{n-1}) + 1 \qquad (*) \\
A_n - B_n &= -\frac{1}{3}(A_{n-1} - B_{n-1}) \qquad (**)
\end{aligned}$$

$(*)$ より　$A_n+B_n-\dfrac{3}{5}=-\dfrac{2}{3}\left(A_{n-1}+B_{n-1}-\dfrac{3}{5}\right)$

$$A_n+B_n-\frac{3}{5}=\left(A_0+B_0-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)^n=\frac{2}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

したがって　$A_n+B_n=\dfrac{2}{5}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n+\dfrac{3}{5}$　$\cdots$①

$(**)$ より　$A_n-B_n=(A_0-B_0)\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$　$\cdots$②

①，② より　$\boldsymbol{A_n=\dfrac{1}{5}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n+\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n+\dfrac{3}{10}}$

別解　$A_n+B_n+C_n+D_n=1$，$C_n=D_n$ より　$A_n+B_n=1-2C_n$

(2) の結果から $C_n=\dfrac{1}{3}A_{n-1}+\dfrac{1}{3}B_{n-1}$ であるから

$$C_n=\frac{1}{3}(A_{n-1}+B_{n-1})=\frac{1}{3}(1-2C_{n-1})$$

これから　$C_n-\dfrac{1}{5}=-\dfrac{2}{3}\left(C_{n-1}-\dfrac{1}{5}\right)$

$$C_n-\frac{1}{5}=\left(C_0-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{ゆえに} \quad C_n=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

したがって　$A_n+B_n=1-2C_n=\dfrac{2}{5}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n+\dfrac{3}{5}$

上式と ② から　$A_n=\dfrac{1}{5}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n+\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n+\dfrac{3}{10}$

(4)　(3) の結果において，$\left|-\dfrac{2}{3}\right|<1$，$\left|-\dfrac{1}{3}\right|<1$ であるから

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}A_n=\frac{3}{10}}$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $3x^2+10xy+8y^2=(x+2y)(3x+4y)$ であるから

$$3x^2+10xy+8y^2+8x+10y-3=(x+2y+3)(3x+4y-1)$$

$$\begin{array}{ccccc}
x+2y & \diagdown\!\!\!\!\diagup & 3 & \longrightarrow & 9x+12y \\
3x+4y & & -1 & \longrightarrow & -x-2y \\
\hline
 & & & & 8x+10y
\end{array}$$

上式と $(x+ay+b)(3x+cy+d)$ の係数を比較して

$$a=2,\ b=3,\ c=4,\ d=-1$$

等式 $3x^2+10xy+8y^2+8x+10y+9=0$ より

$$(x+2y+3)(3x+4y-1)=-12$$

$M=x+2y+3$，$N=3x+4y-1$ とおくと，$x,\ y$ が整数のとき，$M,\ N$ は整数で，$MN=-12$ である．このとき

$$x=-2M+N+7,\quad y=\frac{3M-N}{2}-5=M-5+\frac{M-N}{2}$$

上の第 2 式から，$M$，$N$ の偶奇は一致し，積 $MN$ が偶数であることから，$M$，$N$ はともに偶数で，$M,\ N$ の組は，次の 4 組である．

$$(M,\ N)=(\pm 2,\ \mp 6),\ (\pm 6,\ \mp 2)\quad (\text{複号同順})$$

順次代入すると

$$(x,\ y)=(-3,\ 1),\ (17,-11),\ (-7,\ 5),\ (21,-15)$$

これらの $x,\ y$ の組 $(x,\ y)$ を $x$ の値が小さい順に並べると

$$(-7,\ 5),\ (-3,\ 1),\ (17,-11),\ (21,-15)$$

(あ) **2**　(い) **3**　(う) **4**　(え) **−1**　(お) **−7**　(か) **5**
(き) **−3**　(く) **1**　(け) **17**　(こ) **−11**　(さ) **21**　(し) **−15**

(2) **[A]**

$\dfrac{z_3}{1+\sqrt{3}i}=\dfrac{5-4\sqrt{3}+(4+5\sqrt{3})i}{1+\sqrt{3}i}=\dfrac{(5+4i)(1+\sqrt{3}i)}{1+\sqrt{3}i}=5+4i$

$\alpha=1+\sqrt{2}i$ より　$|\alpha|=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$

$\dfrac{z_1}{1+\sqrt{3}i}=2$，$\dfrac{z_2}{1+\sqrt{3}i}=5$，$\dfrac{z_3}{1+\sqrt{3}i}=5+4i$ より

3 点 2, 5, $5+4i$ を頂点とする三角形の面積は

$$\frac{1}{2}(5-2)\cdot 4=6$$

3 点 $\alpha z_1$, $\alpha z_2$, $\alpha z_3$ を頂点とする三角形と 3 点 2, 5, $5+4i$ を頂点とする三角形は相似であるから，求める三角形の面積は $(\alpha=1+\sqrt{2}i)$

$$6|1+\sqrt{3}i|^2|\alpha|^2=6\cdot 4\cdot 3=\mathbf{72}$$

別解　$w=(\alpha z_2-\alpha z_1)\overline{(\alpha z_3-\alpha z_1)}$ とすると[1]

$$\begin{aligned} w&=|\alpha|^2(z_2-z_1)\overline{(z_3-z_1)} \\ &=3(3+3\sqrt{3}i)\{3-4\sqrt{3}-(4+3\sqrt{3})i\} \\ \mathrm{Im}(w)&=3\{3\sqrt{3}(3-4\sqrt{3})-3(4+3\sqrt{3})\}=-144 \end{aligned}$$

よって　　$\triangle\mathrm{P_1P_2P_3}=\dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(w)|=\mathbf{72}$

(ア) **5**　(イ) **4**　(ウ) $\boldsymbol{\sqrt{3}}$　(エ) **72**

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/miyazaki/miyazaki_2017.pdf $\boxed{4}$ を参照

[**B**]

$y=\log\dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\ (x \geqq 2)$ より　$e^y=\dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$　$\cdots$①

$$2e^y-x=\sqrt{x^2-4}\quad \text{ゆえに}\quad (2e^y-x)^2=x^2-4$$

① より　$e^{-y}=\dfrac{2}{x+\sqrt{x^2-4}}=\dfrac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}$　$\cdots$①$'$

① と ①$'$ の辺々を加えると　$x=e^y+e^{-y}$

曲線 $y=\log\dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$ と $x$ 軸および直線 $x=4$ とで囲まれた図形を $x$ 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 $V$ は

$$V=\int_2^4 \pi\left(\log\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^2 dx$$

$\log\dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}=t$ とおくと　$x=e^t+e^{-t}$

$$\frac{dx}{dt}=e^t-e^{-t}$$

| $x$ | $2 \longrightarrow \qquad 4$ |
|---|---|
| $t$ | $0 \longrightarrow \log(2+\sqrt{3})$ |

$a=\log(2+\sqrt{3})$ を用いて

$$V=\int_0^a \pi t^2(e^t-e^{-t})dt$$

ここで，0 でない定数 $k$ に対し，関数 $t^2e^{kt}$ の不定積分は

$$\begin{aligned}\int t^2e^{kt}\,dt &= \frac{e^{kt}}{k}\left\{t^2-\frac{(t^2)'}{k}+\frac{(t^2)''}{k^2}\right\}+C\\ &= \frac{e^{kt}}{k^3}(k^2t^2-2kt+2)+C\end{aligned}$$

これに $k=\pm1$ をそれぞれ代入すると

$$\int t^2e^t\,dt = e^t(t^2-2t+2)+C$$
$$\int t^2e^{-t}\,dt = -e^{-t}(t^2+2t+2)+C$$

したがって

$$\int t^2(e^t-e^{-t})\,dt = (t^2+2)(e^t+e^{-t})-2t(e^t-e^{-t})+C$$

$e^a=2+\sqrt{3}$，$e^{-a}=2-\sqrt{3}$ より

$$e^a+e^{-a}=4,\quad e^a-e^{-a}=2\sqrt{3}$$

に注意して

$$\begin{aligned}V &= \pi\Big[(t^2+2)(e^t+e^{-t})-2t(e^t-e^{-t})\Big]_0^a\\ &= \pi\left\{4(a^2+2)-4\sqrt{3}a-2\cdot2\right\}\\ &= 4\pi\left(a^2-\sqrt{3}a+1\right)\end{aligned}$$

(カ) $\boldsymbol{x^2-4}$　(キ) $\boldsymbol{e^y+e^{-y}}$　(ク) $\boldsymbol{\pi\left(\log\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)}$

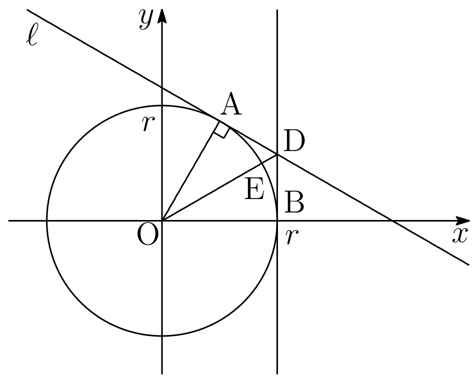
(ケ) $\boldsymbol{\pi t^2(e^t-e^{-t})}$　(コ) $\boldsymbol{k^2t^2-2kt+2}$　(サ) **3**　(シ) **1**

**補足** 次の積分公式が利用している [2].

$$\int e^{px+q}f(x)\,dx = \frac{e^{px+q}}{p}\left\{f(x)-\frac{f'(x)}{p}+\frac{f''(x)}{p^2}-\frac{f'''(x)}{p^3}+\cdots\right\}+C$$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_math_2015_kouki.pdf (p.7)

$\boxed{\mathbf{10}}$ (1) 傾き $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の直線 $\ell$ の偏角は $-\dfrac{\pi}{6}$




直線 OA の偏角は $-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{3}$

したがって，点 A の座標は

$$\left(r\cos\frac{\pi}{3},\ r\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

すなわち　$\mathrm{A}\left(\dfrac{r}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}r\right)$

したがって，$\ell$ の方程式は

$$\frac{r}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}ry=r^2 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x+\sqrt{3}y-2r=0}$$

(2) 直線 $\ell$ と直線 $x=r$ の交点の $y$ 座標は

$$r+\sqrt{3}y-2r=0 \quad \text{ゆえに} \quad y=\frac{r}{\sqrt{3}} \quad \text{したがって} \quad \mathrm{D}\left(r,\ r\tan\frac{\pi}{6}\right)$$

直線 OD の偏角が $\dfrac{\pi}{6}$ より，$\angle\mathrm{BOD}=\angle\mathrm{AOD}$

$\triangle\mathrm{OAD}$ と $\triangle\mathrm{OBD}$ について，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$，OD は共通であるから

$$\triangle\mathrm{OAD}\equiv\triangle\mathrm{OBD}$$

したがって　$\triangle\mathrm{OAD}=\triangle\mathrm{OBD}=\dfrac{1}{2}r\cdot r\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{r^2}{2\sqrt{3}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{6}r^2}$

**別解** 直線 OA，OD の偏角から　$\angle\mathrm{AOD}=\dfrac{\pi}{6}$

よって　$\triangle\mathrm{OAD}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{AD}=\dfrac{1}{2}r\cdot\dfrac{r}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{6}r^2}$

(3) $\triangle\mathrm{OAE}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OE}\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}\cdot r\cdot r\cdot\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{r^2}{4}}$

(4) 扇形 OAE の面積を $S$ とすると

$$S=\frac{1}{2}r^2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{r^2\pi}{12}$$

$\triangle\mathrm{OAE}<S<\triangle\mathrm{OAD}$ より

$$\frac{r^2}{4}<\frac{r^2\pi}{12}<\frac{\sqrt{3}}{6}r^2 \quad \text{ゆえに} \quad 3<\pi<2\sqrt{3}$$

$2\sqrt{3}<2\times1.74=3.48<3.5$ であるから　$3<\pi<3.5$

$\boxed{\mathbf{11}}$ (1) $\boxed{2}$ (1) を参照

(2) $\boxed{2}$ (2) を参照

(3) $(-x^2+5x+24)-(x^2-3x) = -2x^2+8x+24 = -2(x+2)(x-6)$ より，
$C_1 : y = x^2-3x$ と $C_2 : y = -x^2+5x+24$ の共有点の $x$ 座標は

$$x = -2,\ 6$$

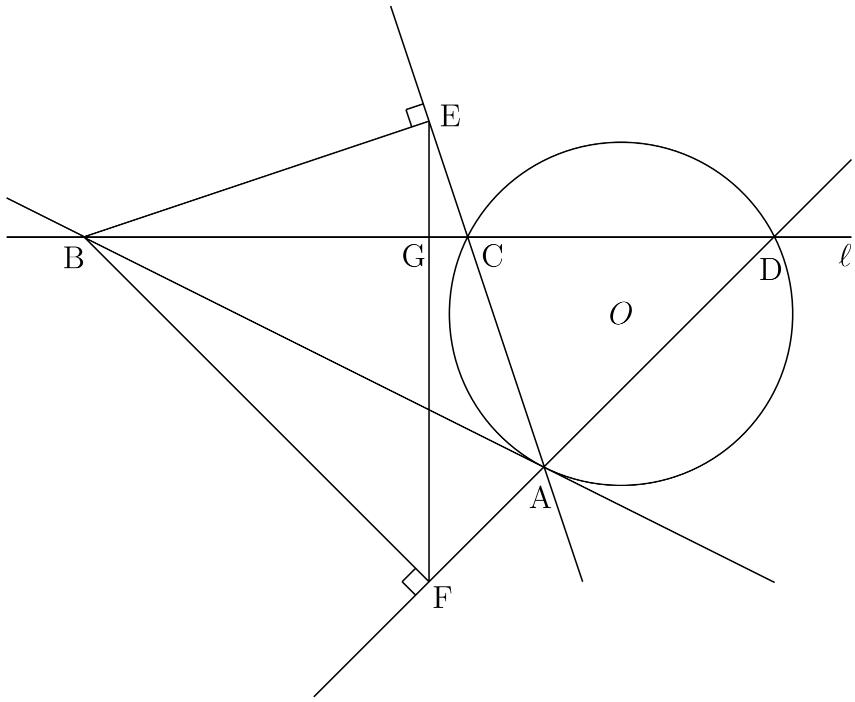
2 曲線 $C_1$ と $C_2$ で囲まれる部分の面積 $S$ は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{6} (-2x^2+8x+24)\,dx \\ &= -2\int_{-2}^{6} (x+2)(x-6)\,dx \\ &= \frac{2}{6}\{6-(-2)\}^3 = \frac{512}{3} \end{aligned}$$

(か) $\mathbf{-2}$ (き) $\mathbf{6}$ (く) $\mathbf{-2}$ (け) $\mathbf{8}$ (こ) $\mathbf{24}$ (さ) $\dfrac{\mathbf{512}}{\mathbf{3}}$

$\boxed{\textbf{12}}$ (1) 接弦定理により　$\angle\mathrm{ADC} = \angle\mathrm{BAE}$

四角形 BFAE は AB を直径の両端とする円に内接するから，円周角の定理により　$\angle\mathrm{BFE} = \angle\mathrm{BAE}$　よって　$\angle\mathrm{BFE} = \angle\mathrm{ADC}$




(2) BD と EF の交点を G とし，$\triangle\mathrm{GFD}$ について

$$\angle\mathrm{BGF} = \angle\mathrm{GFD} + \angle\mathrm{GDF}$$

(1) の結果より，$\angle\mathrm{GDF} = \angle\mathrm{BFG}$ であるから

$$\angle\mathrm{BGF} = \angle\mathrm{GFD} + \angle\mathrm{BFG} = \angle\mathrm{BFD} = 90^\circ$$

よって　$\mathrm{BD} \perp \mathrm{EF}$