令和２年度　宮崎大学２次試験前期日程 (数学問題)
工 (物質環境化学を除く)・医 (医)・農・教育文化 (中学数学・中学社会・理科・技術・家庭・初等教育・特別支援・社会システム) 学部
令和２年 2 月 25 日

- 工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部は，$\boxed{6}$ ～ $\boxed{10}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 教育文化 (中学数学) 学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{4}$, $\boxed{8}$, $\boxed{11}$ 数 I・II・III・A・B (90 分)
- 教育文化 (中学 [社会，理科，技術，家庭]，初等教育，特別支援，社会システム) 学部・農学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{11}$, $\boxed{12}$ 数 I・II・A・B (90 分)

$\boxed{1}$ 次の空欄を適切な数または数式で埋めよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(1) 関数 $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ の導関数は，$f'(x) = \dfrac{\boxed{\quad あ \quad}}{(e^x + e^{-x})^2}$ である．

(2) 関数 $f(x) = \log\sqrt{x^2+1}$ の導関数は，$f'(x) = \dfrac{\boxed{\quad い \quad}}{x^2+1}$ である．

(3) x の関数 y が，t を媒介変数として，

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

で表されているとき，導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表すと，$\dfrac{dy}{dx} = \boxed{\quad う \quad}$ である．

(4) 関数 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$ の不定積分は，$\displaystyle\int f(x)\,dx = \boxed{\quad え \quad} + C$ である．ただし，C は積分定数とする．

(5) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$ の値は $\boxed{\quad お \quad}$ である．

(6) 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3x+2)\sin x\,dx$ の値は $\boxed{\quad か \quad}$ である．

2 関数 $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ $(x > 1)$ および座標平面上の曲線 $C : y = f(x)$ について，次の各問に答えよ．

(1) 次の空欄を適切な数または数式で埋めよ．

$f(x)$ の導関数は $f'(x) = \dfrac{\boxed{\text{あ}}}{(x-1)^3}$ であり，第2次導関数は

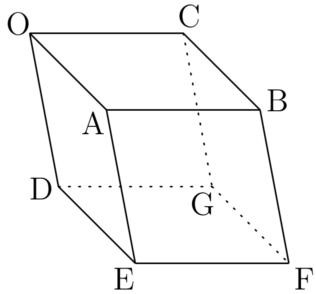
$f''(x) = \dfrac{\boxed{\text{い}}}{(x-1)^4}$ である．また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x) - x\} = \boxed{\text{う}}$ である．

$x \to \infty$ のとき，曲線 C は直線 $y = \boxed{\text{え}}$ に限りなく近づく．

(2) 関数 $f(x)$ の増減，極値，曲線 C の凹凸，変曲点，および漸近線を調べて，曲線 C の概形をかけ．

(3) 曲線 C と x 軸および2直線 $x = 2$，$x = 3$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

3 右図の平行六面体 OABC-DEFG において，辺 BC の中点を P，線分 AP の中点を Q，線分 FQ の中点を R とし，直線 OR が3点 A，C，G を通る平面と交わる点を S とする．$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とするとき，次の各問に答えよ．



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ のそれぞれを，$\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

(2) 2つの線分 OS と SR の比 OS : SR を求めよ．

4 次の各問に答えよ．

(1) 数学的帰納法を用いて，自然数 n に対する次の等式を証明せよ．

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(2) 自然数の列を，次のような群に分ける．ただし，第 n 群には n 個の数が入るものとする．

1	2, 3	4, 5, 6	$\cdots$
第1群	第2群	第3群	

第 n 群の最初の数を a_n とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を，n を用いて表せ．

5 n を 3 以上の自然数とする．1 から n までの背番号が 1 つずつ付けられた n 人の大人と 1 から n までの背番号が 1 つずつ付けられた n 人の子どもがいる．

例えば，$n=3$ の場合には，

背番号が 1 である大人と子どもが 1 人ずつ，

背番号が 2 である大人と子どもが 1 人ずつ，

背番号が 3 である大人と子どもが 1 人ずつ

いる．

この $2n$ 人が次の (A) と (B) の両方を満たすように手をつないで輪をつくる．

(A) 大人と子どもが交互に並ぶ

(B) 背番号が等しい人どうしは手をつながない

このような並び方の総数を $T(n)$ で表すとき，次の各問に答えよ．

(1) $T(3)$ を求めよ．

(2) $T(4)$ を求めよ．

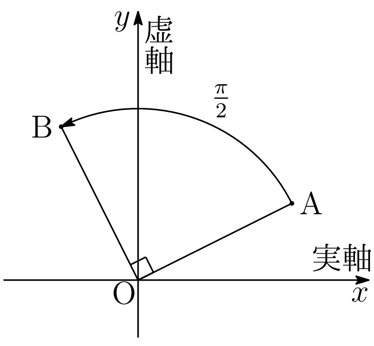
(3) $T(5)$ を求めよ．

6 鋭角三角形 OAB における ∠O の二等分線と辺 AB との交点を D，A から辺 OB に下ろした垂線の足を E，線分 OD と線分 AE との交点を H とする．$\mathrm{OA}=x$，$\mathrm{OB}=1$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$$

となるような s，t のそれぞれを，x，θ を用いて表せ．

7 s，t を正の実数とする．i は虚数単位とする．複素数平面上で，複素数 1 の表す点を P とし，$\alpha=s+ti$ の表す点を A とする．原点 O を中心として点 A を $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点を B とし，点 P を中心として点 B を $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点を C とする．2 点 B，C の表す複素数をそれぞれ β，γ とするとき，次の各問に答えよ．



(1) β，γ のそれぞれを，α を用いて表せ．

(2) 点 C が直線 PA 上にあるとき，α を，s を用いて表せ．

(3) △ACB の外接円の中心を表す複素数を w とする．点 C が直線 PA 上にあるとき，w を，s を用いて表せ．

8 $\triangle$ABC における $\angle$A の二等分線と辺 BC との交点を D とし，A から D へのばした半直線と $\triangle$ABC の外接円との交点を E とする．$\angle$BAD の大きさを θ とし，BE $= 3$，$\cos 2\theta = \dfrac{2}{3}$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 線分 BC の長さを求めよ．

(2) $\triangle$BEC の面積を求めよ．

(3) AD : DE $= 4:1$ のとき，線分 AB，AC の長さを求めよ．ただし，AB $>$ AC とする．

9 原点を O とする座標平面上に 2 つの曲線

$$C_1 : \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \ (y \geqq 0), \quad C_2 : \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1 \ (x > 0)$$

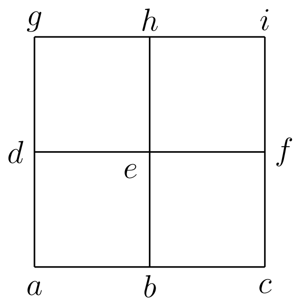
がある．C_1 と y 軸との交点を E，C_2 と x 軸との交点を F とする．また，C_1 と C_2 は 1 点で交わる．その交点を G とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 点 G の座標を求めよ．

(2) 関数 $f(x) = x\sqrt{x^2-6} - 6\log|x + \sqrt{x^2-6}|$ の導関数を求めよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(3) 2 つの曲線 C_1，C_2 および 2 つの線分 OE，OF で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

10 A と B は右図のような格子状の道を以下のように移動するゲームを行う．



- A と B は，このゲームにおいて a から i までの 9 つの点のいずれかにいる．
- 最初 A は点 a に，また B は点 i にいる．
- A と B は同時に出発し，1 秒後に隣の点へ移動する．
- 1 回目の移動では，A と B のそれぞれは隣の点へ確率 $\dfrac{1}{2}$ で移動する．
- 2 回目以降の移動では，A と B のそれぞれは 1 秒前に自分がいた点以外の点へ等しい確率で移動する．ただし，移動できる点が 1 つの場合には，その点へ確率 1 で移動する．
- A と B がはち合せする (すなわち，A と B が同時に同じ点に到達する) と，このゲームは終了する．

例えば，A が出発から 1 秒後に点 b に，2 秒後に点 e にいて，B が出発から 1 秒後に点 f に，2 秒後に点 e にいたら，出発から 2 秒後に A と B は点 e ではち合せし，ゲームは終了する．出発から 4 秒以内でゲームが終了する確率を求めよ．

11 整式 $P(x)=x^3+15x^2+71x+105$ について，次の各問に答えよ．

(1) $P(x)$ を因数分解せよ．

(2) 以下のような自然数 k のうち，最も大きいものを求めよ．

k は，すべての正の奇数 a について次の条件 $(*)$ を満たす．

$(*)$ $P(a)$ は k の倍数である．

12 k を定数とする．座標平面上に 2 つの放物線 $C_1 : y=-x^2+3x+5$，$C_2 : y=2x^2+3x+k$ がある．C_1 と C_2 の交点は 2 つあり，それらの x 座標を α，β とする．ただし，$\alpha<1<\beta$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) k を，β を用いて表せ．

(2) k のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) 区間 $1 \leqq x \leqq \beta$ において，放物線 C_1，C_2 および直線 $x=1$ で囲まれた部分の面積 S を，β を用いて表せ．

(4) (3) の面積 S が 5 となるような k の値を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ より

$$f'(x) = \frac{(e^x - e^{-x})'(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})^2}$$
$$= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

(あ) **4**

(2) $f(x) = \log\sqrt{x^2+1} = \dfrac{1}{2}\log(x^2+1)$ より

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1}$$

(い) $\boldsymbol{x}$

(3) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ ゆえに $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}$

(う) $\boldsymbol{\dfrac{\sin t}{1-\cos t}}$

(4) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}} = \dfrac{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})}$

$= \sqrt{x+2}+\sqrt{2}$

よって $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})\,dx = \frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{2}x + C$

(え) $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{2}x}$

(5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$ について，$x = \sqrt{2}\sin\theta$ とおくと

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\sqrt{2-x^2} = \sqrt{2}\cos\theta, \quad \frac{dx}{d\theta} = \sqrt{2}\cos\theta$$

よって $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta}\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$

(お) $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$

(6) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3x+2)\sin x\,dx = \Big[-(3x+2)\cos x + 3\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 6$

(か) **6**

2 (1) $x^3 = \{(x-1)+1\}^3 = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1$ より

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} = (x-1) + 3 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$
$$f'(x) = 1 - \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$
$$f''(x) = \frac{6}{(x-1)^3} + \frac{6}{(x-1)^4} = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

上の第 1 式から

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x) - x\} = \lim_{x\to\infty}\left\{2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right\} = 2$$

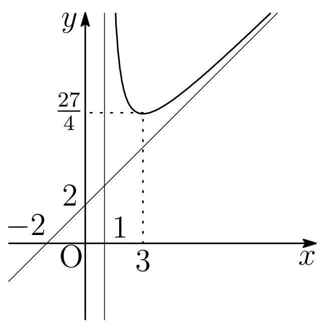
したがって $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x) - (x+2)\} = 0 \quad \cdots①$

よって，曲線 $C : y = f(x)$ は直線 $y = x + 2$ に限りなく近づく．

(あ) $\boldsymbol{x^2(x-3)}$ (い) $\boldsymbol{6x}$ (う) $\boldsymbol{2}$ (え) $\boldsymbol{x+2}$

(2) 関数 $f(x)$ の $x > 1$ における増減表は

x	(1)	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$



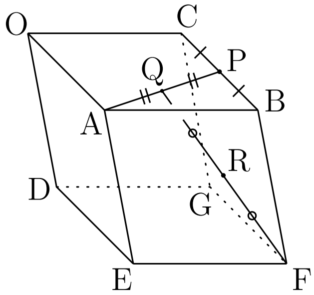
増減表より，極小値 $f(3) = \boldsymbol{\dfrac{27}{4}}$

変曲点はない．また，$\displaystyle\lim_{x\to1+0} f(x) = \infty$ および ① より，$y = f(x)$ $(x > 1)$ のグラフは右の図のようになる．

(3) 求める面積 S は

$$S = \int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 \left\{(x-1) + 3 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right\} dx$$
$$= \int_2^3 \left\{x + 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right\} dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3\log(x-1) - \frac{1}{x-1}\right]_2^3 = \boldsymbol{5 + 3\log 2}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{a}+\vec{c},\quad \overrightarrow{\mathrm{OF}}=\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}=\frac{(\vec{a}+\vec{c})+\vec{c}}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{2}=\frac{1}{2}\left\{\vec{a}+\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}\right)\right\}=\boldsymbol{\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}},$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OF}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2}=\frac{1}{2}\left\{(\vec{a}+\vec{c}+\vec{d})+\left(\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)\right\}\\&=\boldsymbol{\frac{7}{8}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}}\end{aligned}$$

(2) $\vec{g}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ とおくと，$\vec{g}=\vec{c}+\vec{d}$ より，$\vec{d}=\vec{g}-\vec{c}$ を (1) の結果に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=\frac{7}{8}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{c}+\frac{1}{2}(\vec{g}-\vec{c})=\frac{7}{8}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{g}\\&=\frac{7\vec{a}+2\vec{c}+4\vec{g}}{8}=\frac{13}{8}\cdot\frac{7\vec{a}+2\vec{c}+4\vec{g}}{13}\end{aligned}$$

直線 OR と平面 ACG の交点 S の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{7\vec{a}+2\vec{c}+4\vec{g}}{13}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{13}{8}\overrightarrow{\mathrm{OS}}$　よって　$\mathrm{OS}:\mathrm{SR}=\mathbf{8:5}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1)
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \cdots (\mathrm{A})$$

［1］$n=1$ のとき

$$左辺 = 1^2 = 1, \quad 右辺 = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot(1+1)(2\cdot 1+1) = 1$$

よって，$n=1$ のとき，(A) が成り立つ．

［2］$n=j$ のとき (A) が成り立つ，すなわち

$$\sum_{k=1}^{j} k^2 = \frac{1}{6}j(j+1)(2j+1)$$

であると仮定すると，$n=j+1$ のときの (A) の左辺は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{j+1} k^2 = \sum_{k=1}^{j} k^2 + (j+1)^2 &= \frac{1}{6}j(j+1)(2j+1) + (j+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(j+1)(j+2)(2j+3) \\ &= \frac{1}{6}(j+1)\{(j+1)+1\}\{2(j+1)+1\}\end{aligned}$$

これは，$n=j+1$ のときの (A) の右辺に等しい．
よって，$n=j+1$ のときも (A) が成り立つ．

［1］,［2］から，すべての自然数 n について (A) が成り立つ．

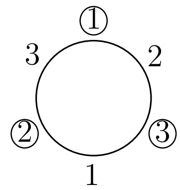
(2) $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} k + 1 = \frac{1}{2}n(n-1) + 1 = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1 \quad \cdots (*)$$

$a_1 = 1$ であるから，$n \geqq 1$ について，$(*)$ が成立する．よって

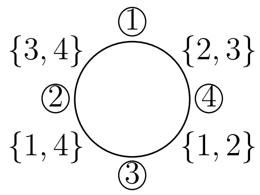
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k + 1\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + n \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n^2+5)}\end{aligned}$$

5 (1) 大人 3 人 (①,②,③) を先に配置し，条件 (A),(B) を満たすように子ども 3 人 (1,2,3) を配置する．まず大人 3 人の並び方は 2! 通りあり，そのときの大人の並び方に対し，子ども 3 人の並び方は 1 通りであるから



$$T(3) = 2! \times 1 = \mathbf{2}$$

(2) 大人 4 人 (①,②,③,④) を先に配置し，条件 (A),(B) を満たすように子ども 4 人 (1,2,3,4) を配置する．まず大人 4 人の並び方は 3! 通りあり，そのときの大人の並び方に対し，子ども 4 人の並び方は 2 通りであるから



$$T(4) = 3! \times 2 = \mathbf{12}$$

補足 例えば，①② の間を 3 とすれば,「④① の間は 2→③④ の間は 1→②③ の間は 4」の 1 通りが決定する．

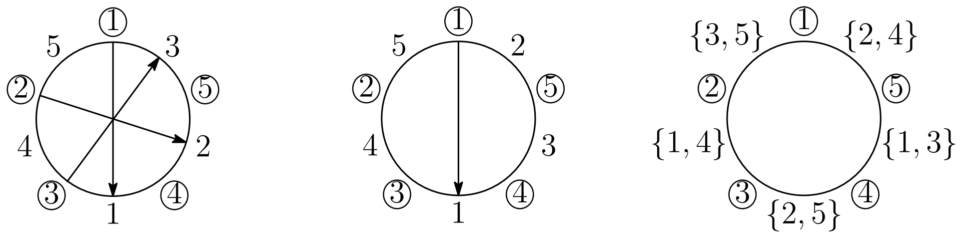
(3) 大人 5 人 (①,②,③,④,⑤) を先に配置し，条件 (A),(B) を満たすように子ども 5 人 (1,2,3,4,5) を配置する．ここでは同じ番号の大人と子どもを親子とよぶことにする．まず大人 5 人の並び方は 4! 通りあり，大人が反時計周りに ①～⑤ の順に並んでいるものを考える．このときの大人の並び方に対し，親子が正面 (真正面) に向き合う組の個数について場合分けを行う．

(i) 親子 5 組が正面に向き合うとき　1 (通り)

(ii) 親子 3 組が正面に向き合うとき，{123, 234, 345, 451, 512} の親子が正面に向き合うときの 5 通り．

(iii) 親子 1 組が正面に向き合うとき　$1 \times 5 = 5$ (通り)

(iv) 親子 0 組が正面に向き合うとき　2 (通り)

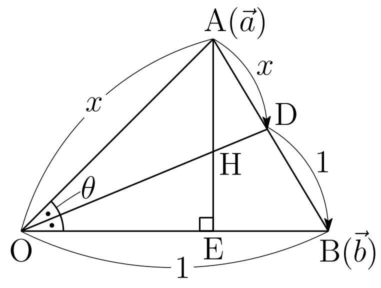


3 組が正面　　1 組が正面　　0 組が正面

また，親子 5 組，親子 3 組が正面に向き合っている中の 1 組だけをそれぞれ解消し，親子 4 組，親子 2 組が正面に向き合わせることはできない．

よって　　$T(5) = 4! \times (1 + 5 + 5 + 2) = 24 \times 13 = \mathbf{312}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ 線分 OD は $\angle$O の二等分線であるから



$$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=x:1$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{\vec{a}+x\vec{b}}{x+1}\quad\cdots(*)$

$\mathrm{OE}=x\cos\theta$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(x\cos\theta)\vec{b}$

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$x\vec{b}=\dfrac{1}{\cos\theta}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $(*)$ に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{x+1}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{\cos\theta}\overrightarrow{\mathrm{OE}}\right)=\frac{1+\cos\theta}{(x+1)\cos\theta}\cdot\frac{(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{1+\cos\theta}$$

H は線分 AE 上の点であることに注目して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\frac{(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{1+\cos\theta}=\frac{(\cos\theta)\vec{a}+(x\cos\theta)\vec{b}}{1+\cos\theta}\\&=\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\vec{a}+\frac{x\cos\theta}{1+\cos\theta}\vec{b}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{s=\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta},\ t=\dfrac{x\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

別解　$\triangle$OBD および直線 AE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{HD}}\cdot\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EO}}=1\quad ゆえに\quad\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{HD}}\cdot\frac{x}{1+x}\cdot\frac{1-x\cos\theta}{x\cos\theta}=1$$

したがって　$\mathrm{OH}:\mathrm{HD}=(1+x)\cos\theta:1-x\cos\theta$

これから　$\mathrm{OH}:\mathrm{OD}=(1+x)\cos\theta:1+\cos\theta$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OD}}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ であるから，$(*)$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\frac{(1+x)\cos\theta}{1+\cos\theta}\cdot\frac{\vec{a}+x\vec{b}}{x+1}\\&=\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\vec{a}+\frac{x\cos\theta}{1+\cos\theta}\vec{b}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{s=\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta},\ t=\dfrac{x\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

$\boxed{7}$ (1) 点 B(β) は点 A(α) を原点を中心に $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させたものであるから

$$\beta = \alpha\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \boldsymbol{\alpha i}$$

点 C(γ) は点 P(1) を中心に点 B(αi) を $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させたものであるから

$$\frac{\gamma-1}{\alpha i-1} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$$

よって　$\gamma = 1 - i(\alpha i - 1) = \boldsymbol{1+\alpha+i}$

(2) $\alpha = s + ti$ ($s,\ t$ は正の実数) であるから　$\alpha \neq 1$
C(γ) が直線 PA 上にあるとき，次の値は実数である．

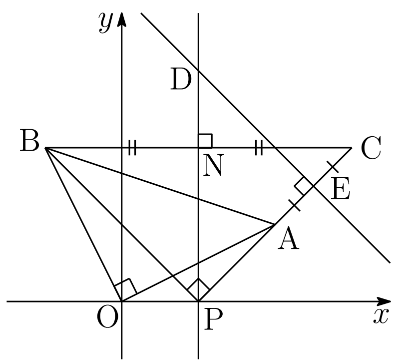
$$\frac{\gamma-1}{\alpha-1} = \frac{(1+\alpha+i)-1}{\alpha-1} = \frac{(\alpha+i)(\overline{\alpha}-1)}{(\alpha-1)(\overline{\alpha}-1)}$$
$$= \frac{|\alpha|^2 - \alpha + \overline{\alpha}i - i}{|\alpha-1|^2}$$

このとき　$-\alpha + \overline{\alpha}i - i = -(s+ti) + (s-ti)i - i$
$$= (-s+t) + (s-t-1)i \quad \cdots ①$$

上の 2 式から，① は実数であるから

$s - t - 1 = 0$　ゆえに　$t = s - 1$　よって　$\boldsymbol{\alpha = s + (s-1)i}$

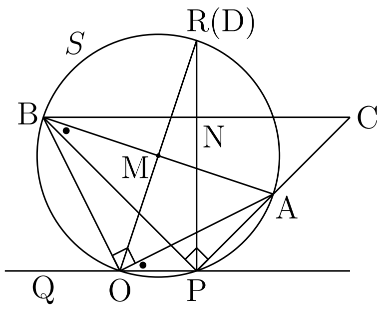
(3) (1) の結果から，$\alpha = s + (s-1)i$ より



$$\beta = \alpha i = \{s + (s-1)i\}i = 1 - s + si,$$
$$\gamma = 1 + \alpha + i = 1 + \{s + (s-1)i\} + i$$
$$= s + 1 + si$$

線分 BC の中点を N とすると　N$(1 + si)$
$\gamma - \beta = 2s$ より，BC は x 軸と平行である．
線分 AC の中点を E とすると　E$\left(s + \dfrac{1}{2} + \left(s - \dfrac{1}{2}\right)i\right)$
$\gamma - \alpha = 1 + i$ より，AC の偏角は $\dfrac{\pi}{4}$
△PDE は直角二等辺三角形であるから，D は P の実部に等しく，E の虚部の 2 倍に等しい．よって　$\mathbf{D(1 + (2\boldsymbol{s} - 1)\boldsymbol{i})}$

別解 $\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{2}$ より，2 点 O，P は AB を直径の両端する円 S 上にある．S の中心を M とし，直線 OM と S の交点で O でない点を R とする．円周角の定理により，$\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{ABP}=\theta$ とし，直線 OP の O に関して P と反対側に点 Q をとる．$\triangle$OAB，$\triangle$PCB は直角二等辺三角形であるから



$$\begin{aligned}\angle\mathrm{BOQ}&=\pi-(\angle\mathrm{AOB}+\angle\mathrm{AOP})\\&=\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{\pi}{2}-\theta,\\\angle\mathrm{OBC}&=\angle\mathrm{ABO}+\angle\mathrm{CBP}-\angle\mathrm{ABP}\\&=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-\theta=\frac{\pi}{2}-\theta\end{aligned}$$

上の 2 式から　OP//BC，　OR は S の直径であるから　$\angle\mathrm{OPR}=\dfrac{\pi}{2}$

PR と BC の交点を N とすると　PN$\perp$BC

ゆえに　$\triangle\mathrm{PNB}\equiv\triangle\mathrm{PNC}$　また　$\triangle\mathrm{OMA}\equiv\triangle\mathrm{OMB}$

したがって，直線 OR は線分 AB の垂直二等分線，直線 PR は線分 BC の垂直二等分線である．これから，点 R は $\triangle$ABC の外心，すなわち，求める点 D である．$\mathrm{M}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ であるから，$\mathrm{D}(\alpha+\beta)$.

$\alpha=s+(s-1)i$，$\beta=1-s+si$ より

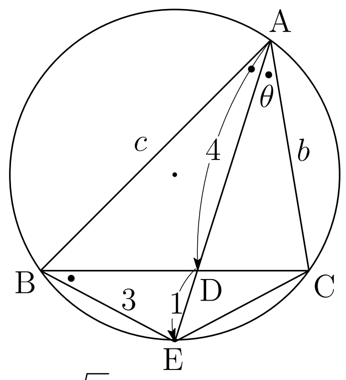
$$\mathbf{D}(\mathbf{1}+(\mathbf{2}\boldsymbol{s}-\mathbf{1})\boldsymbol{i})$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $\cos 2\theta = \dfrac{2}{3} > 0$ より，$0 < 2\theta < \dfrac{\pi}{2}$ に注意して

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \dfrac{2}{3}$　ゆえに　$\cos\theta = \sqrt{\dfrac{5}{6}}$, $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

$\sin^2 2\theta = 1 - \cos^2 2\theta = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$　ゆえに　$\sin 2\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

△ABC の外接円の半径を R とし，△ABC, △ABE に正弦定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin 2\theta} = 2R, \quad \frac{\mathrm{BE}}{\sin\theta} = 2R$$

上の 2 式から

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin 2\theta} = \frac{\mathrm{BE}}{\sin\theta}$$

したがって　$\mathrm{BC} = \dfrac{\mathrm{BE}\sin 2\theta}{\sin\theta} = 2\mathrm{BE}\cos\theta = 2\cdot 3\cdot\sqrt{\dfrac{5}{6}} = \boldsymbol{\sqrt{30}}$

(2) 円周角の定理により　$\angle\mathrm{EBC} = \angle\mathrm{EAC} = \theta$

よって　$\triangle\mathrm{BEC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BE}\cdot\mathrm{BC}\sin\theta = \dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{30}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{6}} = \boldsymbol{\dfrac{3}{2}\sqrt{5}}$

(3) $\mathrm{AD} : \mathrm{DE} = 4 : 1$ であるから　$\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{BEC} = 4 : 1$

したがって　$\triangle\mathrm{ABC} = 4\triangle\mathrm{BEC} = 4\cdot\dfrac{3}{2}\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

$b = \mathrm{CA}$，$c = \mathrm{AB}$ とすると　$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}bc\sin 2\theta = \dfrac{1}{2}bc\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3} = \dfrac{\sqrt{5}}{6}bc$

上の 2 式から　$\dfrac{\sqrt{5}}{6}bc = 6\sqrt{5}$　ゆえに　$bc = 36$　$\cdots$①

△ABC に余弦定理を適用すると　$\mathrm{BC}^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 2\theta$

したがって　$(\sqrt{30})^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot 36\cdot\dfrac{2}{3}$　ゆえに　$b^2 + c^2 = 78$　$\cdots$②

①，② より，b^2，c^2 を解とする 2 次方程式は　$t^2 - 78t + 36^2 = 0$

これを解いて　$t = 39 \pm \sqrt{39^2 - 36^2} = 39 \pm 15 = 54,\ 24$

$\mathrm{AB} > \mathrm{AC}$ であるから　$\mathrm{AB} = \sqrt{54} = \boldsymbol{3\sqrt{6}}$, $\mathrm{AC} = \sqrt{24} = \boldsymbol{2\sqrt{6}}$

補足 本題の計算結果から，△ABC は $C = \dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形.

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $C_1 : \dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1\ (y \geqq 0)$，$C_2 : \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{y^2}{2} = 1\ (x > 0)$

上の 2 式を連立して解くと　$x^2 = \dfrac{27}{4},\ \ y^2 = \dfrac{1}{4}$

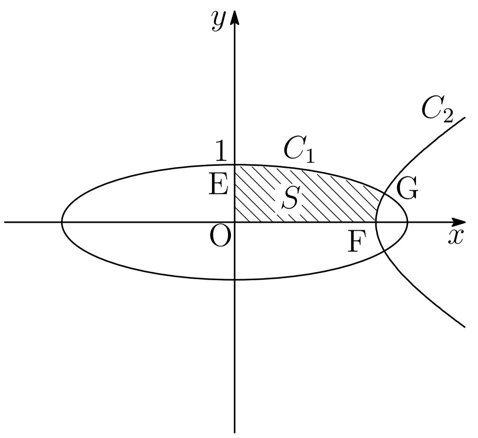
$x > 0,\ y \geqq 0$ に注意して　$\mathrm{G}\left(\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}}\right)$

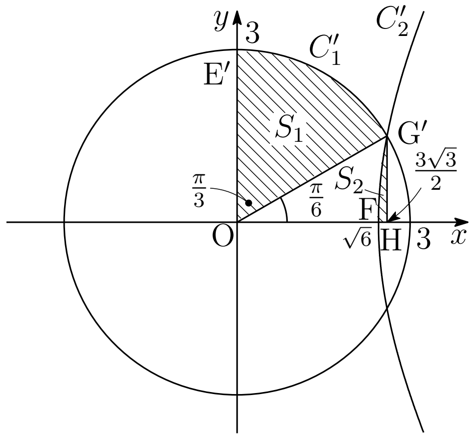
(2) $f(x) = x\sqrt{x^2-6} - 6\log|x + \sqrt{x^2-6}|$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{x^2-6} + x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-6}} - 6\cdot\frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-6}}}{x + \sqrt{x^2-6}} \\ &= \sqrt{x^2-6} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-6}} - \frac{6}{\sqrt{x^2-6}} = \boldsymbol{2\sqrt{x^2-6}} \end{aligned}$$

(3) $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ において C_1，C_2 を x 軸を元に y 軸方向に 3 倍に拡大したものをそれぞれ C_1'，C_2' とすると

$$C_1' : \frac{x^2}{9} + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad x^2 + y^2 = 9\ (x \geqq 0,\ y \geqq 0)$$
$$C_2' : \frac{x^2}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad y = \sqrt{3}\sqrt{x^2-6}\ (x \geqq 0)$$





このとき，G の移る点を $\mathrm{G}'\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ とすると，OG' の偏角は $\dfrac{\pi}{6}$

上の図の斜線部分の面積を S_1，S_2 とすると　$S_1 = \dfrac{1}{2}\cdot 3^2\cdot\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3}{2}\pi$

$$\begin{aligned} S_2 &= \sqrt{3}\int_{\sqrt{6}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \sqrt{x^2-6}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{\sqrt{6}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} f'(x)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\Big[\ f(x)\ \Big]_{\sqrt{6}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\Big[\ x\sqrt{x^2-6} - 6\log|x + \sqrt{x^2-6}|\ \Big]_{\sqrt{6}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{9}{4} - 3\log 2\right) \end{aligned}$$

G' から x 軸に垂線 $\mathrm{G'H}$ を引くと　$\triangle \mathrm{OG'H} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{3}{2} = \dfrac{9\sqrt{3}}{8}$

したがって

$$\begin{aligned} 3S &= S_1 + \triangle \mathrm{OG'H} - S_2 \\ &= \frac{3}{2}\pi + \frac{9\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{9}{4} - 3\log 2\right) \\ &= 3\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\log 2\right) \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{S = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\log 2}$

$\boxed{\mathbf{10}}$ 点 $x(x = a, b, \cdots, i)$ において t (t は 2 以上の整数) 秒後にゲームが終了する確率を $x(t)$ とおく．t が偶数のとき，A，B は $\{a,\ c,\ e,\ g,\ i\}$ のいずれかに位置し，t が奇数のとき，A，B は $\{b,\ d,\ f,\ h\}$ のいずれか位置する．対称性により

$$a(t) = i(t), \quad b(t) = d(t) = f(t) = g(t), \quad c(t) = g(t)$$

が成立する．

(i) $t = 2$ で終了するとき，点 $c,\ e,\ g$ について

$c(2)$ は $\mathrm{A} : a \to b \to c,\ \mathrm{B} : i \to f \to c$ と移動する確率．

$e(2)$ は $\mathrm{A} : a \begin{array}{c} \nearrow b \searrow \\ \searrow d \nearrow \end{array} e,\ \mathrm{B} : i \begin{array}{c} \nearrow f \searrow \\ \searrow h \nearrow \end{array} e$ と移動する確率．

$$\begin{aligned} c(2) = g(2) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16} \\ e(2) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2 \times \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(ii) $t = 3$ で終了するとき，$b,\ d,\ f,\ h$ について

$b(3)$ は $\mathrm{A} : a \to d \to e \to b,\ \mathrm{B} : i \to f \to c \to b$ と移動する確率．

$$b(3) = d(3) = f(3) = h(3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{48}$$

(iii) $t=4$ で終了するとき，点 $a,\ c,\ e,\ g,\ i$ について

$a(4)$ は，次のように移動する確率

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}: a \to b \to e \to d \to a,\ \mathrm{B}: i \to f \to c \to b \to a \\ \text{または}\quad &\mathrm{A}: a \to d \to e \to b \to a,\ \mathrm{B}: i \to h \to g \to d \to a \end{aligned}$$

$e(4)$ は，次のように移動する確率

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}: a \to b \to c \to f \to e,\ \mathrm{B}: i \to h \to g \to d \to e \\ \text{または}\quad &\mathrm{A}: a \to d \to g \to h \to e,\ \mathrm{B}: i \to f \to c \to b \to e \end{aligned}$$

なお，$t=4$ ではじめて A と B が点 $c,\ g$ ではち合せすることはない．

$$\begin{aligned} &a(4) = i(4) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{96} \\ &e(4) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{32} \\ &c(4) = g(4) = 0 \end{aligned}$$

(i)〜(iii) より，求める確率は

$$\frac{1}{16} \times 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{48} \times 4 + \frac{1}{96} \times 2 + \frac{1}{32} = \boldsymbol{\frac{49}{96}}$$

11 (1) $P(x) = x^3 + 15x^2 + 71x + 105$ より，$P(-3) = 0$ であるから，$P(x)$ は $x+3$ を因数にもつことに注意して

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+3)(x^2+12x+35) \\ &= \boldsymbol{(x+3)(x+5)(x+7)} \end{aligned}$$

(2) 正の奇数 a を $a = 2n-1$ とおくと (n は自然数)，(1) の結果から

$$\begin{aligned} P(a) &= P(2n-1) \\ &= \{(2n-1)+3\}\{(2n-1)+5\}\{(2n-1)+7\} \\ &= (2n+2)(2n+4)(2n+6) \\ &= 8(n+1)(n+2)(n+3) \end{aligned}$$

連続する 3 整数 $n+1,\ n+2,\ n+3$ の中には 2 の倍数，3 の倍数が少なくとも 1 つあるから，$P(a)$ は，$8\cdot 2\cdot 3$，すなわち，**48** の倍数である．

$\boxed{\mathbf{12}}$ (1) $C_1 : y = -x^2 + 3x + 5$，$C_2 : y = 2x^2 + 3x + k$ の共有点の x 座標は

$$-x^2 + 3x + 5 = 2x^2 + 3x + k \quad \text{整理すると} \quad 3x^2 + k - 5 = 0$$

β は，この方程式の解であるから

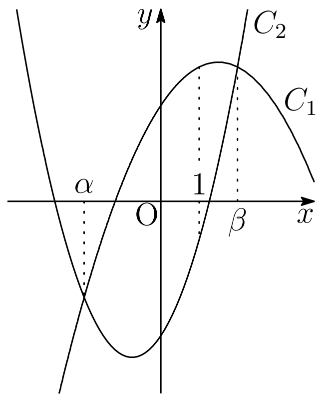
$$3\beta^2 + k - 5 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{k = 5 - 3\beta^2}$$

(2) $\beta > 1$ であるから，(1) の結果より

$$k < 5 - 3{\cdot}1^2 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{k < 2}$$

(3) $C_1 : y = -x^2 + 3x + 5$，$C_2 : y = 2x^2 + 3x + 5 - 3\beta^2$ より

$$\begin{aligned} S &= \int_1^\beta \{(-x^2 + 3x + 5) - (2x^2 + 3x + 5 - 3\beta^2)\}\,dx \\ &= \int_1^\beta (-3x^2 + 3\beta^2)\,dx = \Big[-x^3 + 3\beta^2 x\Big]_1^\beta \\ &= \boldsymbol{2\beta^3 - 3\beta^2 + 1} \end{aligned}$$



(4) $S = 5$ であるから，これを (3) の結果に代入して

$$2\beta^3 - 3\beta^2 + 1 = 5 \quad \text{ゆえに} \quad (\beta - 2)(2\beta^2 + \beta + 2) = 0$$

$\beta > 1$ に注意して　$\beta = 2$　これを (1) の結果に代入して　$\boldsymbol{k = -7}$