平成 31 年度　宮崎大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
工 (物質環境化学を除く)・医 (医)・農・教育文化 (中学数学・中学社会・理科・技術・家庭・初等教育・特別支援・社会システム) 学部
平成 31 年 2 月 25 日

- 工学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部　$\boxed{3}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 教育文化 (中学数学) 学部　$\boxed{2}$ $\boxed{5}$ $\boxed{10}$ $\boxed{11}$ 数 I・II・III・A・B (90 分)
- 教育文化 (中学 [社会，理科，技術，家庭]，初等教育，特別支援，社会システム) 学部・農学部　$\boxed{5}$ $\boxed{10}$ $\boxed{12}$ 数 I・II・A・B (90 分)

1 次の空欄を適切な数または数式で埋めよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(1) 関数 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4+3x^2}}$ の導関数は，$f'(x) = \dfrac{\boxed{\text{あ}}}{(4+3x^2)^{\frac{3}{2}}}$ である．

(2) 関数 $f(x) = \sin x \tan x$ の導関数は，$f'(x) = \boxed{\text{い}}\left(1 + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$ である．

(3) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+3}$ の不定積分は，$\displaystyle\int f(x)\,dx = \boxed{\text{う}} + C$ である．ただし，C は積分定数とする．

(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \log(x+1)\,dx$ の値は $\boxed{\text{え}}$ である．

(5) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(5x)\cos(2x)\,dx$ の値は $\boxed{\text{お}}$ である．

2 関数 $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ および座標平面上の曲線 $C : y = f(x)$ について，次の各問に答えよ．

(1) 第 1 次導関数 $f'(x)$，第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の増減，極値，曲線 C の凹凸，および変曲点を調べて，C の概形をかけ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ が成り立つことは既知としてよい．

(3) 正の実数 t に対し，曲線 C，x 軸，および直線 $x = t$ で囲まれた部分の面積 S を，t を用いて表せ．

3 四面体 OABC において，OA $=$ OB $=$ OC $=1$，$\angle$AOB $=\angle$BOC $=60^\circ$，$\angle$COA $=90^\circ$ とし，OB を $3:1$ に内分する点を D とする．$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とするとき，次の各問に答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ の値を求めよ．

(2) 線分 DA，DC の長さを求めよ．

(3) 三角形 ACD の面積を求めよ．

(4) 点 O から 3 点 A，C，D を含む平面に下ろした垂線の足を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

4 3 つの複素数 α，β，γ は $|\alpha|=1$，$|\beta|=4$，$|\gamma|=5$，$\arg\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，$\arg\beta=\dfrac{4}{3}\pi$，$\arg\gamma=\dfrac{5}{3}\pi$ を満たすとする．複素数平面上で，α，β，γ が表す点をそれぞれ A，B，C とするとき，次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) α，β，γ を $x+yi$ (x，y は実数) の形でそれぞれ表し，複素数平面上に点 A，B，C を図示せよ．

(2) 線分 AB の長さを求めよ．

(3) 三角形 ABC の面積を求めよ．

(4) 三角形 ABC の外接円の中心を表す複素数を求めよ．

5 a を自然数とする．自然数 n に対し，$b_n=n(n^2+a)$ とする．このとき，命題

($*$) すべての自然数 n に対し，b_n は 6 の倍数である

について，次の各問に答えよ．

(1) $a=5$ のとき，命題 ($*$) が真であることを示せ．

(2) 命題 ($*$) が真であるような a の値をすべて求めよ．

6 連立不等式

$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq 2\pi & \cdots ① \\ 0 \leqq y \leqq 2\pi & \cdots ② \\ \cos x\cos y+\sin x\cos y \geqq \sin x\sin y-\cos x\sin y+1 & \cdots ③ \end{cases}$$

の表す領域を座標平面上に図示せよ．

7 重ねた n 枚のカードを上から順に以下の方法を組み合わせて過不足なくすべて取ることを考える．

A：1度にちょうど1枚取る
B：1度にちょうど2枚取る
C：1度にちょうど3枚取る

重ねた n 枚のカードを過不足なくすべて取る場合の数を a_n とする．

例えば，$n=4$ のとき，1回目に方法A，2回目に方法A，3回目に方法Bで4枚を過不足なくすべて取ることをAABと表すことにすれば，4枚のカードを過不足なくすべて取る仕方は

AAAA，AAB，ABA，BAA，AC，CA，BB

の7通りである．よって，$a_4=7$ である．

このとき，次の各問に答えよ．

(1) a_1，a_2，a_3 を求めよ．

(2) $n \geqq 4$ のとき，a_n を，a_{n-1}，a_{n-2}，a_{n-3} を用いて表せ．

(3) a_{10} を求めよ．

(4) 「方法Cを2回以上続けて用いることはできない」という制約を付け加えるとき，重ねた10枚のカードを過不足なくすべて取る場合の数を求めよ．

8 k を定数とする．$-2 \leqq x \leqq 2$ で定義される関数 $f(x)=k+x+\sqrt{4-x^2}$ について，座標平面上の曲線 $C: y=f(x)$ を考える．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 曲線 C と x 軸が共有点をもつように，k のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) 連立不等式

$$\begin{cases} -2 \leqq x \leqq 2 \\ 0 \leqq y \leqq |f(x)| \end{cases}$$

の表す領域を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積 V を，k を用いて表せ．

(3) (1) の k の値の範囲で，(2) の体積 V が最小となる k の値と，そのときの V の値を求めよ．

9 x についての整式 $P(x)$ は，$(x+1)^2$ で割ると $-x+4$ 余り，$(x-1)^2$ で割ると $2x+5$ 余るとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $P(x)$ を $(x+1)(x-1)$ で割ったときの余りを求めよ．

(2) $P(x)$ を $(x+1)(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めよ．

(3) $P(x)$ を $(x+1)^2(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めよ．

10 0 から 9 までの数字が 1 つずつ書かれた 10 枚のカード

$\boxed{0}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$

が 1 つの袋に入っている．1 枚のカードを袋から取り出し，カードに書かれている数字を確認し，元に戻すという試行を 3 回行う．

1 回目の試行で確認したカードの数字を X，
2 回目の試行で確認したカードの数字を Y，
3 回目の試行で確認したカードの数字を Z

とする．ただし，どのカードも同じ確率で取り出されるとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $X+Y+Z=0$ となる確率を求めよ．

(2) $X=3$ かつ $X+Y+Z=9$ となる確率を求めよ．

(3) $X+Y+Z=9$ となる確率を求めよ．

(4) $X+Y+Z=12$ となる確率を求めよ．

11 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ に対して，$y=\sin 2x+\sqrt{6}(\sin x+\cos x)$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $\sin x+\cos x$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $t=\sin x+\cos x$ とし，y を，t を用いて表せ．

(3) y の最大値および最小値と，それらを与える x の値をすべて求めよ．

12 a，b，c を実数とし，$a>0$ とする．関数 $f(x)=x^2+1$，$g(x)=-ax^2+bx+c$ に対し，座標平面上の放物線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ をそれぞれ C_1，C_2 とする．C_1 上の点 $\mathrm{P}(1,\ 2)$ における C_1 の接線を ℓ とする．C_2 は P を通り，ℓ は P における C_2 の接線でもある．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 放物線 C_2 の頂点の座標を，a を用いて表せ．

(3) 放物線 C_1，接線 ℓ，および y 軸で囲まれる部分の面積を S_1 とし，放物線 C_2，ℓ，および C_2 の軸で囲まれる部分の面積を S_2 とする．$S_2=2S_1$ であるとき，a の値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4+3x^2}}$ より

$$f'(x)=\frac{1\cdot\sqrt{4+3x^2}-x\cdot\dfrac{3x}{\sqrt{4+3x^2}}}{4+3x^2}=\frac{(4+3x^2)-3x^2}{(4+3x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4}{(4+3x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(あ) **4**

(2) $f(x)=\sin x\tan x$ より

$$f'(x)=\cos x\tan x+\sin x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\sin x+\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sin x\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

(い) $\boldsymbol{\sin x}$

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}\right)$ より

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx&=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)dx\\&=\frac{1}{2}\{\log|x+1|-\log|x+3|\}+C=\frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x+3}\right|+C\end{aligned}$$

(う) $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{x+1}{x+3}\right|}$

(4)
$$\begin{aligned}\int_0^1\log(x+1)\,dx&=\int_0^1(x+1)'\log(x+1)\,dx\\&=\Big[\,(x+1)\log(x+1)\,\Big]_0^1-\int_0^1(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}dx\\&=2\log 2-1\end{aligned}$$

(え) $\boldsymbol{2\log 2-1}$

(5)
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 5x\cos 2x\,dx&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 7x+\sin 3x)\,dx\\&=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{7}\cos 7x-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{5}{21}\end{aligned}$$

(お) $\boldsymbol{\dfrac{5}{21}}$ ■

2 (1) $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ より

$$f'(x)=1\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+x\cdot(-x)e^{-\frac{x^2}{2}}=\boldsymbol{(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}},$$
$$f''(x)=-2xe^{-\frac{x^2}{2}}+(1-x^2)\cdot(-x)e^{-\frac{x^2}{2}}=\boldsymbol{(x^3-3x)e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

(2) (1) の結果から

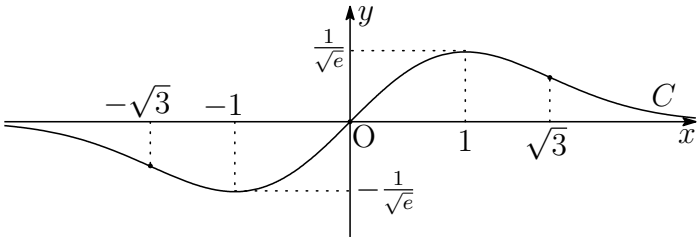
$$f'(x)=0\text{ の解は}\quad x=\pm1,\qquad f''(x)=0\text{ の解は}\quad x=0,\ \pm\sqrt{3}$$

増減および曲線 C の凹凸は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⤵	変曲点	⤷	極小	⤴	変曲点	↱	極大	⤵	変曲点	⤷

極大値 $f(1)=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{e}}}$，極小値 $f(-1)=\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{e}}}$

変曲点 $\boldsymbol{(0,\ 0)}$，$\boldsymbol{(\pm\sqrt{3},\pm\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})}$ **(複号同順)**



注意 $f'(\alpha)=0$ であっても，$x=\alpha$ の前後で $f'(x)$ の符号が変わらないとき，$f(\alpha)$ は極値ではない．同様に，$f''(\beta)=0$ であって，$x=\beta$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わらないとき，点 $(\beta,\ f(\beta))$ は変曲点ではない．$C:y=xe^{-\frac{x}{2}}$ は原点対称であることから，増減表を $x\geqq0$ の範囲で示して C の概形をかき，これを元に $x\leqq0$ の部分の概形をかくことができるが，C の原点が変曲点であること，すなわち，原点の前後で $f''(x)$ の符号が変わることに注意して増減表を示している．

(3) 求める面積 S は，(2) で求めたグラフに注意して

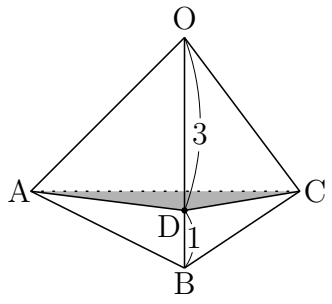
$$S=\int_0^t xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=\left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^t=\boldsymbol{1-e^{-\frac{t^2}{2}}}$$

■

3 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = 1\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

$\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ = 1\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

$\vec{c}\cdot\vec{a} = |\vec{c}||\vec{a}|\cos 90^\circ = 1\cdot 1\cdot 0 = \mathbf{0}$



(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{3}{4}\vec{b}$ であるから，(1) の結果により

$$|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|^2 = \left|\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2 - \frac{3}{2}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{9}{16}|\vec{b}|^2 = 1^2 - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{9}{16}\cdot 1^2 = \frac{13}{16},$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|^2 = \left|\vec{c} - \frac{3}{4}\vec{b}\right|^2 = |\vec{c}|^2 - \frac{3}{2}\vec{b}\cdot\vec{c} + \frac{9}{16}|\vec{b}|^2 = 1^2 - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{9}{16}\cdot 1^2 = \frac{13}{16}$$

よって　　$\mathrm{DA} = \mathrm{DC} = \mathbf{\dfrac{\sqrt{13}}{4}}$

(3)
$$\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}} = \left(\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c} - \frac{3}{4}\vec{b}\right) = \vec{c}\cdot\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{a}\cdot\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{b}\cdot\vec{c} + \frac{9}{16}|\vec{b}|^2$$
$$= 0 - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{9}{16}\cdot 1^2 = -\frac{3}{16}$$

△ACD の面積を S とすると，上式および (2) の計算により

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{16}\cdot\frac{13}{16} - \left(-\frac{3}{16}\right)^2} = \mathbf{\frac{\sqrt{10}}{8}}$$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ とおくと，H は平面 ACD 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{4}{3}y\overrightarrow{\mathrm{OD}} + z\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad \text{ゆえに} \quad x + \frac{4}{3}y + z = 1 \quad \cdots ①$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OH}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ より　$(\vec{c} - \vec{a})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} = 0$，$\left(\dfrac{3}{4}\vec{b} - \vec{a}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} = 0$

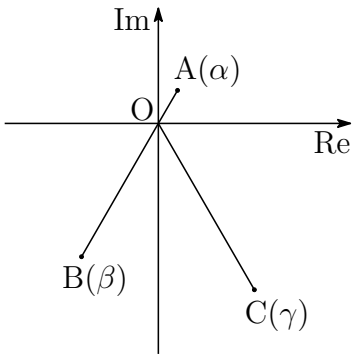
上の 2 式から　　$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{3}{4}\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \vec{c}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}$

ゆえに　　$\vec{a}\cdot(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) = \dfrac{3}{4}\vec{b}\cdot(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) = \vec{c}\cdot(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c})$

すなわち　　$x + \dfrac{1}{2}y = \dfrac{3}{8}x + \dfrac{3}{4}y + \dfrac{3}{8}z = \dfrac{1}{2}y + z \quad \cdots ②$

①，② を解いて　$x = y = z = \dfrac{3}{10}$　よって　$\mathbf{\overrightarrow{OH} = \dfrac{3}{10}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})}$ ■

4 (1) $\alpha = |\alpha|(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$
$= 1\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$,
$\beta = |\beta|(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$
$= 4\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boldsymbol{-2 - 2\sqrt{3}i}$,
$\gamma = |\gamma|(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$
$= 5\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boldsymbol{\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i}$



(2) $\arg\beta - \arg\alpha = \dfrac{4}{3}\pi - \dfrac{\pi}{3} = \pi$，$|\alpha| = 1$，$|\beta| = 4$ より，$\beta = -4\alpha$ であるから

$$\mathrm{AB} = |\beta - \alpha| = |-4\alpha - \alpha| = |-5\alpha| = 5|\alpha| = \mathbf{5}$$

(3) $\arg\gamma - \arg\beta = \dfrac{5}{3}\pi - \dfrac{4}{3}\pi = \dfrac{\pi}{3}$

点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さは　$|\gamma|\sin\dfrac{\pi}{3} = 5\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

これと (2) の結果から　　$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot\dfrac{5\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\dfrac{25\sqrt{3}}{4}}$

別解 $\beta - \alpha = -\dfrac{5}{2}(1 + \sqrt{3}i)$，$\gamma - \alpha = 2 - 3\sqrt{3}i$ より [1]

$$(\beta - \alpha)(\overline{\gamma - \alpha}) = -\frac{5}{2}(1 + \sqrt{3}i)(2 + 3\sqrt{3}i)$$

よって　$S = \dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\beta - \alpha)(\overline{\gamma - \alpha})| = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{2}\cdot 5\sqrt{3} = \boldsymbol{\dfrac{25\sqrt{3}}{4}}$

(4) $\dfrac{\alpha + \beta}{2} = -\dfrac{3}{4} - \dfrac{3\sqrt{3}}{4}i$，$\dfrac{\alpha + \gamma}{2} = \dfrac{3}{2} - \sqrt{3}i$

$(\beta - \alpha)i = \dfrac{5}{2}(\sqrt{3} - i)$，$(\gamma - \alpha)i = 3\sqrt{3} + 2i$

線分 AB，AC の垂直二等分線の交点であるから (t，u は実数)

$$-\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i + t(\sqrt{3} - i) = \frac{3}{2} - \sqrt{3}i + u(3\sqrt{3} + 2i),$$
$$-\frac{3}{4} + \sqrt{3}t + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{4} - t\right)i = \frac{3}{2} + 3\sqrt{3}u + (-\sqrt{3} + 2u)i$$

上の第 2 式から　$t = \dfrac{9\sqrt{3}}{20}$，$u = -\dfrac{\sqrt{3}}{10}$　よって第 1 式により　$\boldsymbol{\dfrac{3}{5} - \dfrac{6\sqrt{3}}{5}i}$ ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/miyazaki/miyazaki_2017.pdf 4 を参照

5 (1) $a=5$ のとき　$b_n = n(n^2+5) = n(n^2-1)+6n$
$= (n-1)n(n+1)+6n$

連続する3整数の積は6の倍数であるから，上式より，命題 $(*)$ は真である．

(2) $b_n = n(n^2+a) = n(n^2-1+a+1) = (n-1)n(n+1)+(a+1)n$

a，n は自然数であるから

$$b_n = (n-1)n(n+1)+(a+1)n \equiv (a+1)n \pmod 6$$

すべての自然数 n に対して，$b_n \equiv 0 \pmod 6$ のとき，上式から

$$a+1 \equiv 0 \pmod 6$$

a は自然数であることに注意して

$$a+1=6k \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a=6k-1} \quad \textbf{(}\boldsymbol{k}\textbf{ は自然数)}$$

■

6 ③ より　$(\sin x\cos y+\cos x\sin y)+(\cos x\cos y-\sin x\sin y) \geqq 1$

$\sin(x+y)+\cos(x+y) \geqq 1$　ゆえに　$\sin\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}\right) \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$\cdots(*)$

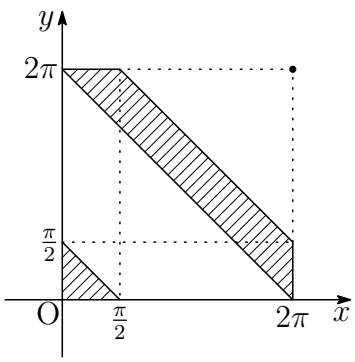
①，② より　$\dfrac{\pi}{4} \leqq x+y+\dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{\pi}{4}+4\pi$

この範囲において，$(*)$ を解くと

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{4} \leqq x+y+\dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{3}{4}\pi \\ \dfrac{\pi}{4}+2\pi \leqq x+y+\dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{3}{4}\pi+2\pi \\ \dfrac{\pi}{4}+4\pi = x+y+\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

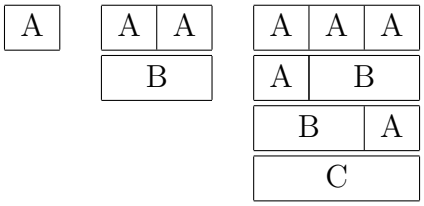
①，②，上の不等式より，求める領域は

$$(**)\begin{cases} 0 \leqq x \leqq 2\pi \\ 0 \leqq y \leqq 2\pi \\ 0 \leqq x+y \leqq \dfrac{\pi}{2} \\ 2\pi \leqq x+y \leqq \dfrac{\pi}{2}+2\pi \\ x=y=2\pi \end{cases}$$



$(**)$ の表す領域は，図の斜線部分および点 $(2\pi,\ 2\pi)$ で，境界線を含む．■

7 (1) $\boldsymbol{a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4}$



(2) (i) 1 回目が方法 A のとき，残り $n-1$ 枚をすべて取る a_{n-1} 通り．

(ii) 1 回目が方法 B のとき，残り $n-2$ 枚をすべて取る a_{n-2} 通り．

(iii) 1 回目が方法 C のとき，残り $n-3$ 枚をすべて取る a_{n-3} 通り．

したがって，(i)〜(iii) より　$\boldsymbol{a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}}$

(3) (1)，(2) の結果から

$$
\begin{aligned}
a_4 &= a_3 + a_2 + a_1 = 4 + 2 + 1 = 7 \\
a_5 &= a_4 + a_3 + a_2 = 7 + 4 + 2 = 13 \\
a_6 &= a_5 + a_4 + a_3 = 13 + 7 + 4 = 24 \\
a_7 &= a_6 + a_5 + a_4 = 24 + 13 + 7 = 44 \\
a_8 &= a_7 + a_6 + a_5 = 44 + 24 + 13 = 81 \\
a_9 &= a_8 + a_7 + a_6 = 81 + 44 + 24 = 149 \\
a_{10} &= a_9 + a_8 + a_7 = 149 + 81 + 44 = \mathbf{274}
\end{aligned}
$$

(4) 方法 A と方法 B だけで重ねた n 枚のカードを過不足なくすべて取る場合の数を b_n とすると

$$b_1 = 1,\quad b_2 = 2,\quad b_n = b_{n-1} + b_{n-2}\ \ (n \geqq 3)\quad \text{ゆえに}\quad b_3 = 3,\quad b_4 = 5$$

(i) 方法 C を 2 回だけ，それを続けて用いる場合の数は

$$b_4 + b_1b_3 + b_2b_2 + b_3b_1 + b_4 = 5 + 1{\cdot}3 + 2{\cdot}2 + 3{\cdot}1 + 5 = 20 \text{ 通り}$$

$$\boxed{\mathrm{CC}b_4,\ b_1\mathrm{CC}b_3,\ b_2\mathrm{CC}b_2,\ b_3\mathrm{CC}b_1,\ b_4\mathrm{CC}}$$

(ii) 方法 C を 3 回，それを 2 回以上続けて用いる場合は，次の 4 通り．

CCCA,　CCAC,　CACC,　ACCC

よって，求める場合の数は　$274 - (20 + 4) = \mathbf{250}$ (通り)　■

8 (1) $f(x)=k+x+\sqrt{4-x^2}\ (-2\leqq x\leqq 2)$ より　$f'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\sqrt{4-x^2}$　これを解いて　$x=\sqrt{2}$

x	-2	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$k-2$	$\nearrow$	$k+2\sqrt{2}$	$\searrow$	$k+2$

ゆえに，最大値 $f(\sqrt{2})=k+2\sqrt{2}$，最小値 $f(-2)=k-2$

曲線 $C:y=f(x)$ と x 軸が共有点をもつとき

$$k-2\leqq 0\leqq k+2\sqrt{2}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{-2\sqrt{2}\leqq k\leqq 2}$$

別解 $\ell:y=x+k$，$S:y=-\sqrt{4-x^2}$ とおくと

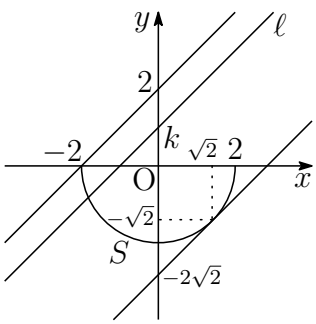
$C:y=f(x)$ と x 軸が共有点をもつ．

$\Longleftrightarrow f(x)=0$ が解をもつ．

$\Longleftrightarrow x+k=-\sqrt{4-x^2}$ が解をもつ．

$\Longleftrightarrow \ell$ と S が共有点をもつ．

$\Longleftrightarrow -2\sqrt{2}\leqq k\leqq 2$



(2) 求める立体の体積 V は

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_{-2}^{2}(k+x+\sqrt{4-x^2})^2\,dx\\&=\int_{-2}^{2}\{(k^2+2kx+x^2)+2(k+x)\sqrt{4-x^2}+(4-x^2)\}\,dx\\&=\int_{-2}^{2}\{(k^2+4+2k\sqrt{4-x^2})+2kx+2x\sqrt{4-x^2}\}\,dx\\&=2\int_{0}^{2}(k^2+4)\,dx+4k\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx\\&=2\Big[\ (k^2+4)x\ \Big]_0^2+4k\cdot\frac{\pi\cdot 2^2}{4}=4(k^2+k\pi+4)\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V=4\pi(k^2+k\pi+4)}$

(3) (2) の結果から　$V=4\pi\left(k+\dfrac{\pi}{2}\right)^2+\pi(16-\pi^2)$

$k=-\dfrac{\pi}{2}$ は (1) で求めた値の範囲にある．

よって，V は，$\boldsymbol{k=-\dfrac{\pi}{2}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\pi(16-\pi^2)}$ をとる．　■

9 (1) $P(x)$ を $(x+1)^2$，$(x-1)^2$ で割ったときの商をそれぞれ $Q_1(x)$，$Q_2(x)$ とすると，条件から

$$(*)\begin{cases} P(x)=(x+1)^2Q_1(x)-x+4 \\ P(x)=(x-1)^2Q_2(x)+2x+5 \end{cases}$$

$P(x)$ を $(x+1)(x-1)$ で割ったときの商を $Q_3(x)$，余りを $mx+n$ とおくと

$$P(x)=(x+1)(x-1)Q_3(x)+mx+n$$

上式に $x=-1,\ 1$ を代入すると　$P(-1)=-m+n$，$P(1)=m+n$
$(*)$ から，$P(-1)=5$，$P(1)=7$ であるから

$$-m+n=5,\quad m+n=7 \quad \text{これを解いて} \quad m=1,\ \ n=6$$

よって，求める余りは　　$\boldsymbol{x+6}$

(2) $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りが $2x+5$ であるから，$P(x)$ を $(x+1)(x-1)^2$ で割った商を $Q_4(x)$，余りを $p(x-1)^2+2x+5$ とおくと

$$\begin{aligned} P(x)&=(x+1)(x-1)^2Q_4(x)+p(x-1)^2+2x+5 \\ &=(x+1)(x-1)\{(x-1)Q_4(x)+p\}+(-2p+2)x+(2p+5) \end{aligned}$$

上の第 2 式と (1) の結果から　$-2p+2=1$，$2p+5=6$　ゆえに　$p=\dfrac{1}{2}$

よって，求める余りは　$\dfrac{1}{2}(x-1)^2+2x+5=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{11}{2}}$

別解 $P(-1)=5$ を上の第 1 式に代入すると　$4p+3=5$　ゆえに　$p=\dfrac{1}{2}$

(3) (2) の結果から，$P(x)$ を $(x+1)^2(x-1)^2$ で割った商を $Q_5(x)$，
余りを $q(x+1)(x-1)^2+\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{11}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned} P(x)&=(x+1)^2(x-1)^2Q_5(x)+q(x+1)(x-1)^2+\frac{1}{2}x^2+x+\frac{11}{2} \\ &=(x+1)^2(x-1)^2Q_5(x)+q(x+1)\{(x+1)(x-3)+4\}+\frac{1}{2}(x+1)^2+5 \\ &=(x+1)^2\left\{(x-1)^2Q_5(x)+q(x-3)+\frac{1}{2}\right\}+4qx+4q+5 \end{aligned}$$

$P(x)$ を $(x+1)^2$ で割った余りが $-x+4$ であるから

$$4q=-1,\quad 4q+5=4 \quad \text{ゆえに} \quad q=-\frac{1}{4}$$

よって，求める余りは

$$-\frac{1}{4}(x+1)(x-1)^2+\frac{1}{2}x^2+x+\frac{11}{2}=\boldsymbol{-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{4}x+\frac{21}{4}}$$

別解 $(*)$ の第 1 式を微分すると

$$P'(x) = 2(x+1)Q_1(x) + (x+1)^2 Q_1'(x) - 1 \quad \text{ゆえに} \quad P'(-1) = -1$$

前ページで示した等式

$$P(x) = (x+1)^2(x-1)^2 Q_5(x) + q(x+1)(x-1)^2 + \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{11}{2}$$

を微分すると

$$\begin{aligned} P'(x) = &\{(x+1)^2(x-1)^2 Q_5(x)\}' \\ &+ q\{(x-1)^2 + 2(x+1)(x-1)\} + x + 1 \end{aligned}$$

ゆえに　$P'(-1) = 4q$　よって　$p = -\dfrac{1}{4}$

解説 $(*)$ より　$P(-1) = 5$，$P(1) = 7$，$P'(-1) = -1$，$P'(1) = 2$

$P(x)$ を $(x+1)^2(x-1)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを ax^3+bx^2+cx+d とすると

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+1)^2(x-1)^2 Q(x) + ax^3 + bx^2 + cx + d \\ P'(x) &= \{(x+1)^2(x-1)^2 Q(x)\}' + 3ax^2 + 2bx + c \end{aligned}$$

上の 2 式に $x = -1,\ 1$ を代入して

$$\begin{aligned} -a + b - c + d &= 5, \quad a + b + c + d = 7 \\ 3a - 2b + c &= -1, \quad 3a + 2b + c = 2 \end{aligned}$$

これを解いて　$a = -\dfrac{1}{4},\ b = \dfrac{3}{4},\ c = \dfrac{5}{4},\ d = \dfrac{21}{4}$

$$P(x) = (x+1)^2(x-1)^2 Q(x) - \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{21}{4}$$

ここで，$R(x) = -\dfrac{1}{4}x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{5}{4}x + \dfrac{21}{4}$ とおく．

$R(x)$ をそれぞれ $(x+1)(x-1)$，$(x+1)(x-1)^2$ で割ることにより

$$\begin{aligned} R(x) &= (x+1)(x-1)\left(-\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}\right) + x + 6, \\ R(x) &= (x+1)(x-1)^2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{11}{2} \end{aligned}$$

よって，$P(x)$ を $(x+1)(x-1)$，$(x+1)(x-1)^2$ で割った余りは，それぞれ

$$x + 6, \quad \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{11}{2}$$

■

10 (1) $X+Y+Z=0$ のとき，$X=Y=Z=0$ より $\left(\dfrac{1}{10}\right)^3=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1000}}$

(2) $X=3$ かつ $X+Y+Z=9$ のとき，$Y+Z=6$ より，次の 7 通り

Y	0	1	2	3	4	5	6
Z	6	5	4	3	2	1	0

よって，求める確率は $\left(\dfrac{1}{10}\right)^3\times 7=\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{1000}}$

(3) $X+Y+Z=9$ より

$X=k$ のとき $(k=0,1,\cdots,9)$，次の $10-k$ 通り

Y	0	1	$\cdots$	$8-k$	$9-k$
Z	$9-k$	$8-k$	$\cdots$	1	0

よって，求める確率は

$$\left(\frac{1}{10}\right)^3\sum_{k=0}^{9}(10-k)=\frac{1}{1000}\sum_{k=1}^{10}k=\frac{55}{1000}=\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{200}}$$

(4) $X+Y+Z=12$ より

(i) $X=k$ のとき $(k=0,1,2)$，次の $7+k$ 通り

Y	$3-k$	$\cdots$	9
Z	9	$\cdots$	$3-k$

(ii) $X=k$ のとき $(k=3,4,\cdots,9)$，次の $13-k$ 通り

Y	0	$\cdots$	$12-k$
Z	$12-k$	$\cdots$	0

(i) と (ii) の場合の総数は

$$\sum_{k=0}^{2}(7+k)+\sum_{k=3}^{9}(13-k)=\frac{1}{2}\cdot 3(7+9)+\frac{1}{2}\cdot 7(10+4)=73$$

よって，求める確率は $\left(\dfrac{1}{10}\right)^3\times 73=\dfrac{\mathbf{73}}{\mathbf{1000}}$ ■

11 (1) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ より

$$\boldsymbol{-\sqrt{2} \leqq \sin x + \cos x \leqq \sqrt{2}}$$

(2) $t = \sin x + \cos x$ より

$$t^2 = 1 + 2\sin x\cos x = 1 + \sin 2x \quad \text{ゆえに} \quad \sin 2x = t^2 - 1$$

よって　$y = (t^2 - 1) + \sqrt{6}t = \boldsymbol{t^2 + \sqrt{6}t - 1}$

(3) (1)，(2) の結果から　$y = \left(t + \dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{2}$　$(-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2})$

$t = \sqrt{2}$ のとき，最大値 $1 + 2\sqrt{3}$ をとり，

$t = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ のとき，最小値 $-\dfrac{5}{2}$ をとる．

$t = \sqrt{2}$ のとき，$\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ より

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{\pi}{4}$$

$t = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ のとき，$\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ より

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{13}{12}\pi,\ \frac{17}{12}\pi$$

よって　$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{4}}$ のとき　最大値 $\boldsymbol{1 + 2\sqrt{3}}$,

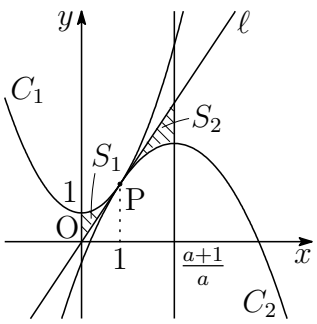
$\boldsymbol{x = \dfrac{13}{12}\pi,\ \dfrac{17}{12}\pi}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{5}{2}}$

■

12 (1) $f(x)=x^2+1$ を微分すると　$f'(x)=2x$

$f'(1)=2$ より，C 上の点 $\mathrm{P}(1,\ 2)$ における接線 ℓ の方程式は

$$y-2=2(x-1)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=2x}$$



(2) $g(x)=-ax^2+bx+c$ より，$g'(x)=-2ax+b$

条件から，$g(1)=2$，$g'(1)=2$ であるから

$$-a+b+c=2,\quad -2a+b=2\quad \text{ゆえに}\quad b=2a+2,\quad c=-a$$

したがって，C_2 の方程式は

$$y=-ax^2+(2a+2)x-a=-a\left(x-\frac{a+1}{a}\right)^2+\frac{2a+1}{a}$$

よって，C_2 の頂点の座標は　$\boldsymbol{\left(\frac{a+1}{a},\ \frac{2a+1}{a}\right)}$

(3) (1)，(2) の結果から

$$S_1=\int_0^1\{(x^2+1)-2x\}\,dx=\int_0^1(x-1)^2\,dx=\left[\ \frac{1}{3}(x-1)^3\ \right]_0^1=\frac{1}{3},$$

$$S_2=\int_1^{\frac{a+1}{a}}\left\{2x-(-ax^2+(2a+2)x-a)\right\}dx$$

$$=a\int_1^{\frac{a+1}{a}}(x-1)^2\,dx=a\left[\ \frac{1}{3}(x-1)^3\ \right]_1^{\frac{a+1}{a}}=\frac{1}{3a^2}$$

$S_2=2S_1$ より，$\dfrac{1}{3a^2}=2\cdot\dfrac{1}{3}$ であるから　$a^2=\dfrac{1}{2}$

よって，$a>0$ に注意して　　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ ■