平成 30 年度　宮崎大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
工 (物質環境化学を除く)・医 (医)・農・教育文化 (中学数学・中学社会・理科・技術・家庭・初等教育・特別支援・社会システム) 学部
平成 30 年 2 月 25 日

- 工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部は，$\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$ ～ $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 教育文化 (中学数学) 学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{7}$, $\boxed{9}$ 数 I・II・III・A・B (90 分)
- 教育文化 (中学 [社会，理科，技術，家庭]，初等教育，特別支援，社会システム) 学部・農学部は，$\boxed{7}$, $\boxed{9}$, $\boxed{10}$ 数 I・II・A・B (90 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の空欄を適切な数または数式で埋めよ．

(1) 関数 $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$ の導関数は，$f'(x) = \dfrac{\boxed{\text{あ}}}{\sqrt{1+x^2}}$ である．

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{x}{\tan x}$ の導関数は，$f'(x) = \dfrac{\boxed{\text{い}}}{\sin^2 x}$ である．

(3) 関数 $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$ の不定積分は，$\displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{x^2}{2} + \boxed{\text{う}} + C$ である．ただし，C は積分定数とする．

(4) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{e^x}\,dx$ の値は $\boxed{\text{え}}$ である．

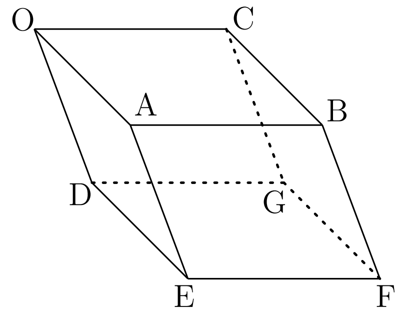
(5) 定積分 $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+\sin x}\,dx$ の値は $\boxed{\text{お}}$ である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ s，t を，$s>0$，$t>0$，$s^2+t^2<1$ を満たす実数とし，座標平面において，中心が点 $\mathrm{P}(s,\ t)$，半径が 1 の円を C とする．C と x 軸との交点を K，M とし，C と y 軸との交点を L，N とする．ただし，K の x 座標は M の x 座標より大きく，L の y 座標は N の y 座標より大きいとする．四角形 KLMN の面積を S とするとき，次の各問に答えよ．

(1) 面積 S を，s，t を用いて表せ．

(2) 点 P が直線 $y=-x+1$ 上を動くとき，面積 S の最大値を求めよ．

3 右図の平行六面体OABC-DEFGにおいて，すべての面は1辺の長さが1のひし形とし，$\angle\mathrm{AOC} = \angle\mathrm{AOD} = \angle\mathrm{COD} = 60^\circ$ とする．線分 BE を 3 : 2 に内分する点を P とし，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とするとき，次の各問に答えよ．



(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{d}$，$\vec{d}\cdot\vec{a}$ の値を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

(3) 線分 BG を $t : (1-t)$ $(0 < t < 1)$ に内分する点を Q とする．$0 < t < 1$ を満たす t について，線分 PQ の長さを最小にする t の値と，そのときの線分 PQ の長さを求めよ．

4 2つの袋 A，B のそれぞれに，赤玉1個と白玉2個の合計3個が入っている．次のような試行を考える．

袋 A から無作為に玉を1個取り出し，
袋 B から無作為に玉を1個取り出す．
次に，上で袋 A から取り出した玉を袋 B に入れ，
上で袋 B から取り出した玉を袋 A に入れる．

この試行を n 回 $(n \geqq 1)$ 行った後，袋 A の中を確認する．例えば，$n = 2$ の場合，1回目の試行で，袋 A から白玉，袋 B から赤玉を取り出し，2回目の試行で，袋 A から白玉，袋 B から白玉を取り出したとすると，その結果，袋 A には赤玉が2個，白玉が1個入っている．

n 回の試行の後で，

袋 A に赤玉1個と白玉2個が入っている確率を P_n，
袋 A に赤玉2個と白玉1個が入っている確率を Q_n，
袋 A に赤玉が入っていない確率を R_n

とする．ただし，どの玉も同じ確率で取り出されるとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) P_1，Q_1，R_1 を求めよ．

(2) P_2 を求めよ．

(3) P_{n+1} を，P_n を用いて表せ．

(4) P_n を求めよ．

$\boxed{5}$ 関数 $f(x) = x\log x\ (x > 0)$ および座標平面上の曲線 $C : y = f(x)\ \left(\dfrac{1}{e^2} \leqq x \leqq e\right)$ について，次の各問に答えよ．

(1) 第 1 次導関数 $f'(x)$，第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

(2) $\dfrac{1}{e^2} \leqq x \leqq e$ において，関数 $f(x)$ の増減，極値，曲線 C の凹凸，および変曲点を調べて，C の概形をかけ．

(3) 曲線 C と x 軸および 2 直線 $x = \dfrac{1}{e^2}$，$x = e$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

$\boxed{6}$ 点 O を原点とする座標平面において，点 P は中心が O，半径が 1 の円の周上を動き，点 Q は 4 点 A(2, 0)，B(0, 2)，C(−2, 0)，D(0, −2) を頂点とする四角形の周上を動くとする．ただし，P，Q は PQ $= 2$ を満たすように動くとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の最大値と最小値を求めよ．

(2) 直線 PQ と点 O の距離の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{7}$ 平面上の三角形 ABC で，3 辺の長さが AB $= 10$，BC $= 6$，CA $= 8$ であるものについて，外心を O，内心を I とし，O から I へのばした半直線と外接円との交点を M，I から O へのばした半直線と外接円との交点を N とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 三角形 ABC の外接円の半径 R と内接円の半径 r を求めよ．

(2) 線分 OI の長さを求めよ．

(3) 線分 IM，IN の長さを求めよ．

(4) 点 I を通る各直線 ℓ に対し，ℓ が三角形 ABC の外接円によって切り取られる線分の長さを d とする．このとき，d の最小値を求めよ．

$\boxed{8}$ 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\cos^3 x}\ \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ および座標平面上の曲線 $C : y = f(x)$ について，次の各問に答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の増減，極値，曲線 C の凹凸，および変曲点を調べて，C の概形をかけ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\,dx$ の値を求めよ．

(3) 曲線 C と x 軸，y 軸および直線 $x = \dfrac{\pi}{3}$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ 次の各問に答えよ．

(1) 十進法で表された整数 147 を，五進法と八進法で表せ．

(2) 五進法により 2 桁で表された正の整数で，八進法で表すと 2 桁となるものを考える．このとき，八進法で表したときの各位の数の並びが五進法で表されたときの各位の数の並びと逆順にはならないことを示せ．

(3) 五進法により 3 桁で表された正の整数で，八進法で表すと 3 桁となるものを考える．このとき，八進法で表したときの各位の数の並びが五進法で表されたときの各位の数の並びと逆順になるものをすべて求め，十進法で表せ．

$\boxed{\mathbf{10}}$ 関数 $f(x) = x^2 - 3x + 2$ および座標平面上の曲線 $C : y = f(x)$ について，次の各問に答えよ．

(1) P を曲線 C 上の点とし，P の x 座標を t とするとき，P における C の接線の方程式を，t を用いて表せ．

(2) 点 $(2, -1)$ から曲線 C に異なる 2 本の接線が引ける．それぞれの接線の方程式と接点の座標を求めよ．

(3) 曲線 C と，(2) で求めた 2 本の接線によって囲まれた部分の面積 S を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$ より　$f'(x) = \sqrt{1+x^2} + x \cdot \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

(あ) $\boldsymbol{1+2x^2}$

(2) $f(x) = \dfrac{x}{\tan x} = x\cot x$ より

$$f'(x) = \cot x + x\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \frac{\sin x\cos x - x}{\sin^2 x}$$

(い) $\boldsymbol{\sin x\cos x - x}$

(3) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4} = x + \dfrac{4x}{x^2-4}$ より

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int\left(x + \frac{4x}{x^2-4}\right)dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 2\log|x^2-4| + C\end{aligned}$$

(う) $\boldsymbol{2\log|x^2-4|}$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x}{e^x}\,dx = \int_{-1}^{1}xe^{-x}\,dx = \Big[-e^{-x}(x+1)\Big]_{-1}^{1} = -\frac{2}{e}$

(え) $\boldsymbol{-\dfrac{2}{e}}$

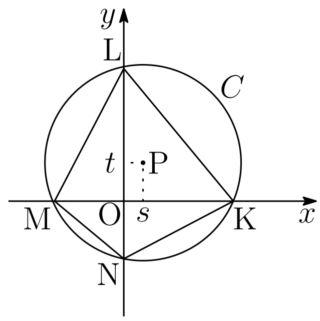
(5) $1+\sin x = 1 + 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = \left(\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}\right)^2$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ において，$\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2} > 0$ であるから

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1+\sin x}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)dx \\ &= \left[-2\cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 3 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

(お) $\boldsymbol{3-\sqrt{3}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) C の方程式は　$(x-s)^2+(y-t)^2=1$　$\cdots(*)$



$(*)$ に $y=0$ を代入すると

$(x-s)^2+t^2=1$　ゆえに　$x=s\pm\sqrt{1-t^2}$

したがって　$\mathrm{MK}=2\sqrt{1-t^2}$

また，$(*)$ に $x=0$ を代入すると

$s^2+(y-t)^2=1$　ゆえに　$y=t\pm\sqrt{1-s^2}$

したがって　$\mathrm{NL}=2\sqrt{1-s^2}$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{MK}\cdot\mathrm{NL}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-t^2}\cdot 2\sqrt{1-s^2}=\boldsymbol{2\sqrt{(1-s^2)(1-t^2)}}$

(2) 点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ が直線 $y=-x+1$ 上を動くから　$s+t=1$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}S&=2\sqrt{1-(s^2+t^2)+s^2t^2}=2\sqrt{1-(s+t)^2+2st+s^2t^2}\\&=2\sqrt{s^2t^2+2st}=2\sqrt{(st+1)^2-1}\quad\cdots①\end{aligned}$$

$s+t=1$，$s>0$，$t>0$ であるから，相加・相乗平均の大小関係により

$$1=s+t\geqq 2\sqrt{st}\quad \text{ゆえに}\quad 0<st\leqq\frac{1}{4}\quad\cdots②$$

上式において，等号が成立するのは　$s=t=\dfrac{1}{2}$

①，② より　$0<S\leqq\dfrac{3}{2}$

よって，$s=t=\dfrac{1}{2}$ のとき，S は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{a}=1\cdot 1\cos 60^\circ=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{3+2}=\dfrac{2(\vec{a}+\vec{c})+3(\vec{a}+\vec{d})}{5}=\boldsymbol{\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{c}+\frac{3}{5}\vec{d}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OG}}$
$=(1-t)(\vec{a}+\vec{c})+t(\vec{c}+\vec{d})=t(\vec{d}-\vec{a})+\vec{a}+\vec{c}$

これと (2) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t(\vec{d}-\vec{a})+\frac{3}{5}(\vec{c}-\vec{d}),$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=t^2|\vec{d}-\vec{a}|^2+\frac{6}{5}t(\vec{d}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{d})+\frac{9}{25}|\vec{c}-\vec{d}|^2$$

ここで，$|\vec{a}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$ および (1) の結果から

$$|\vec{d}-\vec{a}|^2=|\vec{d}|^2-2\vec{d}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2=1$$
$$|\vec{c}-\vec{d}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{d}+|\vec{d}|^2=1$$
$$(\vec{d}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{d})=\vec{c}\cdot\vec{d}-|\vec{d}|^2-\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}=-\frac{1}{2}$$

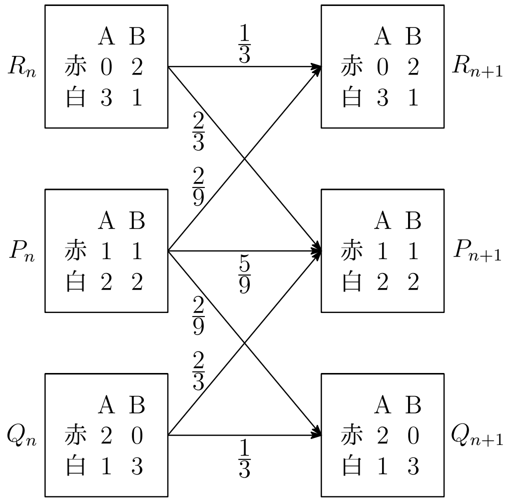
これらの結果を利用すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=t^2-\frac{3}{5}t+\frac{9}{25}=\left(t-\frac{3}{10}\right)^2+\frac{27}{100}$$

よって，PQ の長さは，$\boldsymbol{t=\frac{3}{10}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{10}}$ **をとる．**

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 確率 P_{n+1}，Q_{n+1}，R_{n+1} は，確率 P_n，Q_n，R_n を用いた次の確率漸化式によって定まる．

$$(*)\begin{cases} P_{n+1} = \dfrac{5}{9}P_n + \dfrac{2}{3}Q_n + \dfrac{2}{3}R_n \\ Q_{n+1} = \dfrac{2}{9}P_n + \dfrac{1}{3}Q_n \\ R_{n+1} = \dfrac{2}{9}P_n + \dfrac{1}{3}R_n \end{cases}$$



初めに2つの袋A，Bのそれぞれに，赤玉1個と白玉2個の合計3個が入っているから

$$\boldsymbol{P_1 = \frac{5}{9},\quad Q_1 = \frac{2}{9},\quad R_1 = \frac{2}{9}}$$

(2) (1) の結果および $(*)$ の第1式により

$$P_2 = \frac{5}{9}P_1 + \frac{2}{3}Q_1 + \frac{2}{3}R_1 = \frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{9} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{9} = \boldsymbol{\frac{49}{81}}$$

(3) $P_n + Q_n + R_n = 1$ および $(*)$ の第1式から，Q_n，R_n を消去すると

$$P_{n+1} = \frac{5}{9}P_n + \frac{2}{3}(Q_n + R_n) = \frac{5}{9}P_n + \frac{2}{3}(1 - P_n) = \boldsymbol{-\frac{1}{9}P_n + \frac{2}{3}}$$

(4) (3) の結果から　$P_{n+1} - \dfrac{3}{5} = -\dfrac{1}{9}\left(P_n - \dfrac{3}{5}\right)$

ゆえに　$P_n - \dfrac{3}{5} = \left(P_1 - \dfrac{3}{5}\right)\left(-\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}$　　よって　$\boldsymbol{P_n = \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5}\left(-\dfrac{1}{9}\right)^n}$

補足 $(*)$ の第2・3式から　$Q_{n+1} - R_{n+1} = \dfrac{1}{3}(Q_n - R_n)$

$Q_1 = R_1 = \dfrac{2}{9}$ であるから　　$Q_n = R_n$

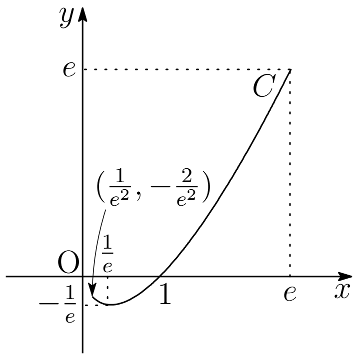
よって　　$Q_n = R_n = \dfrac{1}{2}(1 - P_n) = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{5}\left(-\dfrac{1}{9}\right)^n$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $f(x) = x\log x$ より　$\boldsymbol{f'(x) = \log x + 1}$，　$\boldsymbol{f''(x) = \dfrac{1}{x}}$

(2) (1) の結果から，増減および凹凸は次のようなる．

x	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	e
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$-\frac{2}{e^2}$	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	e

極小値 $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \boldsymbol{-\dfrac{1}{e}}$，**変曲点なし**



(3) $f(x) = x\log x$ の原始関数の 1 つを $F(x) = \dfrac{x^2}{4}(2\log x - 1)$ とおくと

$$F\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\frac{5}{4e^4},\quad F(1) = -\frac{1}{4},\quad F(e) = \frac{e^2}{4}$$

よって

$$\begin{aligned} S &= -\int_{\frac{1}{e^2}}^{1} f(x)\,dx + \int_1^e f(x)\,dx \\ &= -\Big[\,F(x)\,\Big]_{\frac{1}{e^2}}^{1} + \Big[\,F(x)\,\Big]_1^e \\ &= F\left(\frac{1}{e^2}\right) - 2F(1) + F(e) = \boldsymbol{-\frac{5}{4e^4} + \frac{1}{2} + \frac{e^2}{4}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$

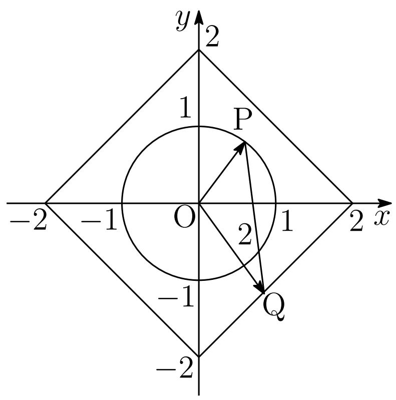
$= |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = 1$，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = 2$ より

$$2^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + 1^2$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 - 3)$

$\sqrt{2} \leqq |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| \leqq 2$ であるから



$$-\frac{1}{2} \leqq \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \leqq \frac{1}{2}$$　よって　最大値 $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$，最小値 $\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$

(2) 直線 PQ に垂線 OH を引くと，H は直線 PQ 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \quad (t \text{ は実数})$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} = 0$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = -\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2}$$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 + 2t\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + t^2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$

$$= |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 - \frac{2(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}})^2}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2} + \frac{(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}})^2}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2}$$

$$= \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}})^2}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2} = 1 - \frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}})^2$$

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}) = \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - 1$

ゆえに　$-\frac{3}{2} \leqq \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \leqq -\frac{1}{2}$　したがって　$\frac{7}{16} \leqq |\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2 \leqq \frac{15}{16}$

よって，求める最大値は $\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{4}}$，最小値は $\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{4}}$

補足 点 A から直線 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\vec{v}$ に引いた垂線の長さは (t は媒介変数)

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{|\vec{v}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 - (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}})^2}}{|\vec{v}|}}$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2=\mathrm{AB}^2$ であるから

$$\angle\mathrm{BCA}=90^\circ$$

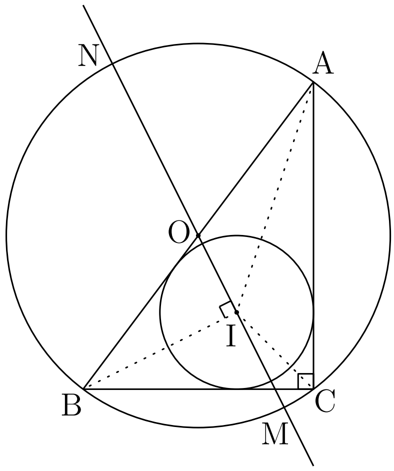
AB は △ABC の外接円の直径であるから

$$R=\frac{1}{2}\mathrm{AB}=\mathbf{5}$$

$\triangle\mathrm{IBC}+\triangle\mathrm{ICA}+\triangle\mathrm{IAB}=\triangle\mathrm{ABC}$ より

$$\frac{1}{2}\cdot 6r+\frac{1}{2}\cdot 8r+\frac{1}{2}\cdot 10r=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8$$

これを解いて　　$\boldsymbol{r=2}$



(2) $\overrightarrow{\mathrm{CB}}=6\vec{e}$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=8\vec{f}$ となる直交する単位ベクトル $\vec{e}$，$\vec{f}$ を用いると

$$\overrightarrow{\mathrm{CI}}=2\vec{e}+2\vec{f},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CO}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}})=3\vec{e}+4\vec{f},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\overrightarrow{\mathrm{CI}}-\overrightarrow{\mathrm{CO}}=(2\vec{e}+2\vec{f})-(3\vec{e}+4\vec{f})=-\vec{e}-2\vec{f}$$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{OI}}|^2=|\vec{e}|^2+4|\vec{f}|^2=5$　よって　$\mathbf{OI}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$

(3) $\mathrm{IM}=\mathrm{OM}-\mathrm{OI}=\boldsymbol{5-\sqrt{5}}$，$\mathrm{IN}=\mathrm{ON}+\mathrm{OI}=\boldsymbol{5+\sqrt{5}}$

(4) 求める最小値は　$2\sqrt{R^2-r^2}=2\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2}=\boldsymbol{4\sqrt{5}}$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{IB}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}-\overrightarrow{\mathrm{CI}}=6\vec{e}-(2\vec{e}+2\vec{f})=4\vec{e}-2\vec{f}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IB}}=(-\vec{e}-2\vec{f})\cdot(4\vec{e}-2\vec{f})=0$$

$\mathrm{OI}\perp\mathrm{IB}$ より，d の最小値は

$$2|\overrightarrow{\mathrm{IB}}|=2\sqrt{4^2+(-2)^2}=\boldsymbol{4\sqrt{5}}$$

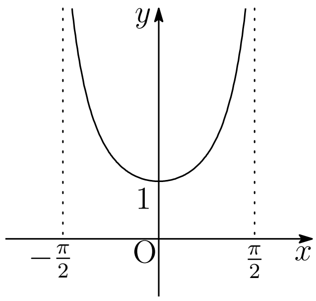
$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^3 x}=(\cos x)^{-3}$ より

$$f'(x)=-3(\cos x)^{-4}(-\sin x)=3\sin x(\cos x)^{-4}=\frac{3\sin x}{\cos^4 x}$$
$$f''(x)=3\cos x(\cos x)^{-4}+3\sin x\cdot(-4)(\cos x)^{-5}(-\sin x)$$
$$=3(\cos x)^{-3}+12\sin^2 x(\cos x)^{-5}=\frac{3(1+3\sin^2 x)}{\cos^5 x}$$

$f(x)$ の増減，極値，C の凹凸は，次のようになる．

x	$(-\frac{\pi}{2})$	$\cdots$	0	$\cdots$	$(\frac{\pi}{2})$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	
$f(x)$		↘	1	↗	

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)=\infty$$



よって　極小値 $\boldsymbol{f(0)=1}$，**変曲点はない．**

(2) $$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\cos x}{\sin x+1}-\frac{\cos x}{\sin x-1}\right)dx=\frac{1}{2}\Big[\ \log\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|\ \Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\boldsymbol{\log(2+\sqrt{3})}$$

(3) $$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\sin x)'}{\cos^2 x}\,dx=\Big[\ \frac{\sin x}{\cos^2 x}\ \Big]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\cdot\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\,dx$$
$$=2\sqrt{3}+2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos x}\,dx-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^3 x}\,dx$$

よって　$$S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^3 x}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos x}\,dx+\sqrt{3}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})+\sqrt{3}}$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1)

$$\begin{array}{r|rl} 5 & 147 & \\ \hline 5 & 29 & \cdots\ 2 \\ \hline 5 & 5 & \cdots\ 4 \\ \hline & 1 & \cdots\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rl} 8 & 147 & \\ \hline 8 & 18 & \cdots\ 3 \\ \hline & 2 & \cdots\ 2 \end{array}$$

よって　$\mathbf{147 = 1042_{(5)} = 223_{(8)}}$

(2) 2桁の五進数 $\boxed{a}\boxed{b}_{(5)}$ の位の順序を逆にした2桁の八進数 $\boxed{b}\boxed{a}_{(8)}$ が等しいと仮定すると (a，b は4以下の自然数)

$$5a + b = 8b + a \quad \text{ゆえに} \quad 4a = 7b$$

上の第2式は7の倍数であるが，$4a$ は7の倍数ではない．

よって，条件をみたす a，b は存在しない．

(3) 3桁の五進数 $\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}_{(5)}$ の位の順序を逆にした3桁の八進数 $\boxed{c}\boxed{b}\boxed{a}_{(8)}$ が等しいとき ($a,\ c = 1, 2, 3, 4$，$b = 0, 1, 2, 3, 4$)

$$5^2a + 5b + c = 8^2c + 8b + a \quad \text{整理すると} \quad 8a = b + 21c$$

したがって　　$a - b = 7(3c - a)$

上式は7の倍数であるから，$-3 \leqq a - b \leqq 4$ に注意すると

$$a - b = 0,\ 3c - a = 0 \quad \text{すなわち} \quad a = b = 3c$$

これを満たす $a,\ b,\ c$ の組は　$a = b = 3,\ c = 1$

よって　　$331_{(5)} = 133_{(8)} = \mathbf{91}$

$\boxed{\mathbf{10}}$ (1) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ より　$f'(x) = 2x - 3$

C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2 - 3t + 2)$ における接線の方程式は

$$y - (t^2 - 3t + 2) = (2t - 3)(x - t)$$

すなわち　$\boldsymbol{y = (2t - 3)x - t^2 + 2}$

(2) (1) で求めた接線が点 $(2, -1)$ を通るとき

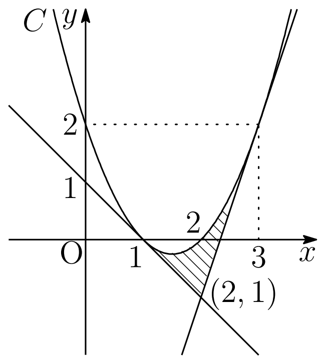
$$-1 = (2t - 3)\cdot 2 - t^2 + 2 \quad \text{整理すると} \quad t^2 - 4t + 3 = 0$$

これを解いて　$t = 1,\ 3$

よって，(1) の結果から

$$\begin{cases} \textbf{接点}\ \mathbf{(1,\ 0)} \\ \textbf{接線}\ \boldsymbol{y = -x + 1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \textbf{接点}\ \mathbf{(3,\ 2)} \\ \textbf{接線}\ \boldsymbol{y = 3x - 7} \end{cases}$$

(3) 右の図から，求める面積 S は



$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \{(x^2 - 3x + 2) - (-x + 1)\}dx \\ &\quad + \int_2^3 \{(x^2 - 3x + 2) - (-3x + 7)\}dx \\ &= \int_1^2 (x-1)^2\,dx + \int_2^3 (x-3)^2\,dx \\ &= \left[\ \frac{1}{3}(x-1)^3\ \right]_1^2 + \left[\ \frac{1}{3}(x-3)^2\ \right]_2^3 = \boldsymbol{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

補足 2 つの接点 $(1,\ 0)$，$(3,\ 2)$ を通る直線 $y = x - 1$ と $C : y = x^2 - 3x + 2$ で囲まれた部分の面積は $2S$ となる[1]．実際

$$\int_1^3 \{x - 1 - (x^2 - 3x + 1)\}\,dx = -\int_1^3 (x-1)(x-3)\,dx = \frac{4}{3}$$

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf (p.6 を参照)