平成28年度　宮崎大学2次試験前期日程(数学問題)
工(物質環境化学を除く)・医(医)・農・教育文化(中学数学・中学社会・理科・技術・家庭・初等教育・特別支援・社会システム)学部
平成28年2月25日

- 工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 医学部は，$\boxed{2}$ ～ $\boxed{6}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 教育文化(中学数学)学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{4}$, $\boxed{7}$ ～ $\boxed{9}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 教育文化(中学[社会，理科，技術，家庭]，初等教育，特別支援，社会システム)学部・農学部は，$\boxed{7}$, $\boxed{10}$, $\boxed{11}$ 数I・II・A・B (90分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す.

(1) 次の関数を微分せよ.

(a) $y = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

(b) $y = \log\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}}$

(2) 次の定積分の値を求めよ.

(a) $\displaystyle\int_0^2 |\,e^x - 2\,|\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin^2(2x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{1+\log x}}{x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_2^4 \frac{2x^3+x^2-2x+2}{x^4+x^2-2}\,dx$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 複素数 z の方程式 $z^3+i = z^2+iz$ (i は虚数単位) の3つの解を，その偏角 θ (ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$) の小さい順に α，β，γ とする．複素数平面上で，α，β，γ を表す点をそれぞれ A，B，C とし，直線 AC に関して B と対称な点を D，直線 AB に関して C と対称な点を E とする．このとき，次の各問に答えよ.

(1) α，β，γ を $x+yi$ (x，y は実数) の形でそれぞれ表せ.

(2) $\triangle$ABC の面積を求めよ.

(3) 複素数平面上で，3点 A，D，E を通る円周上のどの複素数 z も，$z\overline{z}+sz+t\overline{z}+u=0$ を満たすような複素数の定数 s，t，u を求めよ.

3 $y>0$ とするとき，不等式

$$y^{\frac{2}{x}}+y^{-\frac{2}{x}}-6(y^{\frac{1}{x}}+y^{-\frac{1}{x}})+10 \leqq 0$$

について，次の各問に答えよ．

(1) $X=y^{\frac{1}{x}}+y^{-\frac{1}{x}}$ とするとき，この不等式を，X を用いて表せ．

(2) この不等式を満たす点 $(x,\ y)$ の全体が表す図形を座標平面上に図示せよ．

4 A と B は，赤球 2 個と白球 1 個が入った袋をそれぞれ 1 つずつ持っている．次のような試行を考える．

A と B が，それぞれ自分の持っている袋の中から無作為に球を 1 つ選び，色を見てからもとの袋に戻す．

上の試行を n $(n \geqq 2)$ 回繰り返したとき，n 回の試行の中で A と B が取り出した球の色が一致することが少なくとも 1 回起こるが続けては起こらない確率を P_n とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 1 回の試行で，A と B が取り出した球の色が一致する確率を求めよ．

(2) P_2，P_3 を求めよ．

(3) $n \geqq 4$ のとき，

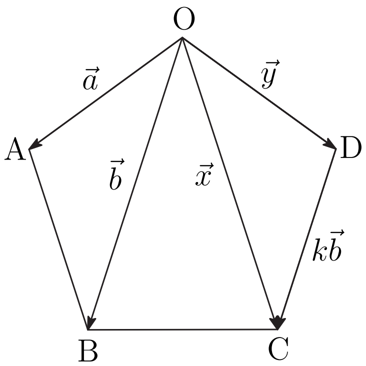
$$P_n=\frac{4}{9}P_{n-1}+\frac{20}{81}P_{n-2}+\frac{5\cdot 4^{n-1}}{9^n}$$

が成り立つことを示せ．

5 一辺の長さ 1 の正五角形 OABCD について，OB と DC は平行である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{x},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{y},\quad \overrightarrow{\mathrm{DC}}=k\vec{b}\quad (k \text{ は実数})$$

とするとき，次の各問に答えよ．



(1) k の値を求め，$\vec{x}$，$\vec{y}$ を，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いてそれぞれ表せ．

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(3) $\vec{a}$ と $\vec{x}$ の内積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ $k > 0$，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．座標平面上の原点 O，点 A(0, 1) に対し，第一象限の点 P を，$\angle\mathrm{AOP} = \theta$ を満たすように円 $D : x^2 + y^2 = 1$ 上にとり，直線 OP と直線 $x = k\theta$ との交点を Q とする．θ を $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で動かすときの点 Q の軌跡を曲線 $y = f(x)$ とし，関数 $y = g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ で定める曲線を C とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $r(\theta) = \mathrm{OQ}$ とするとき，$\displaystyle\lim_{\theta \to +0} r(\theta)$ の値を求めよ．

(2) 点 Q がつねに円 D の内部にあるための k の条件を求めよ．

(3) 関数 $g(x)$ の増減と凹凸を調べ，曲線 C の概形をかけ．

(4) 曲線 C と x 軸および 2 直線 $x = \dfrac{\pi}{4}k$，$x = \dfrac{\pi}{3}k$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を，k を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\angle\mathrm{C} = 90^\circ$，$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 5 : 4$ とする．辺 BC の点 C 側の延長上に，CA = CD となる点 D をとる．辺 AB の中点を E とし，点 B から直線 AD に下した垂線を BF とするとき，次の各問に答えよ．

(1) EF = EC を示せ．

(2) 面積比 $\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{CEF}$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ 2 以上の自然数 n と自然数 a について，和

$$1\cdot(1+a) + 2\cdot(2+a) + \cdots + (n-1)\{(n-1)+a\}$$

を S とおく．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 6 と n が互いに素であるとき，すべての自然数 a に対して，S は n で割り切れることを示せ．

(2) n を 6 で割った余りが 2 であるとき，すべての奇数 a に対して，S は n で割り切れることを示せ．

(3) n を 6 で割った余りが 3 であるとき，すべての自然数 a に対して，S を n で割った余りを，n を用いて表せ．ただし，求める余りは，0 以上 $n-1$ 以下の範囲で求めよ．

9 $r>0$ とするとき，関数 $f_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を

$$f_1(x)=e^{-rx},$$
$$f_{n+1}(x)=nre^{-(n+1)rx}\int_0^x f_n(t)e^{(n+1)rt}\,dt \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

によって定める．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 関数 $f_2(x)$，$f_3(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $f_n(x)$ を推測し，その推測が正しいことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) $n\geqq 3$，$x>0$ のとき，関数 $f_n(x)$ の極値を求めよ．

10 A と B は，赤球 2 個と白球 1 個が入った袋をそれぞれ 1 つずつ持っている．次のような試行を考える．

A と B が，それぞれ自分の持っている袋の中から無作為に球を 1 つ選び，色を見てからもとの袋に戻す．

このとき，次の各問に答えよ．

(1) 1 回の試行で，A と B が取り出した球の色が一致する確率を求めよ．

(2) 上の試行を 3 回繰り返したとき，3 回の試行の中で A と B が取り出した球の色が一致することが少なくとも 1 回起こるが続けては起こらない確率を求めよ．

(3) 上の試行を 4 回繰り返したとき，4 回の試行の中のどこかで，A と B が取り出した球の色が一致することが 2 回続けて起こり，かつ 3 回以上続けて起こらない確率を求めよ．

11 関数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+2|x+1|+1$ に対し，座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする．点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ $(t>-1)$ における曲線 C の接線に垂直で，点 P を通る直線を ℓ とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 直線 ℓ の方程式を，t を用いて表せ．

(2) 直線 ℓ が点 $(-1,\ f(-1))$ を通るとき，t の中で最も小さいものを求めよ．

(3) (2) で求めた t が定める直線 ℓ と曲線 C によって囲まれる部分の面積を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) (a) $$y' = \frac{(x)'\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right) - x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)'}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2} = \frac{1\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right) - x\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)'}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$$

$$= \frac{1+e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{x+(x+1)e^{\frac{1}{x}}}{x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}}$$

(b) $y = \log\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}} = \log(\sqrt{1+x^2}+x)$ より

$$y' = \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)'}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1}{\sqrt{1+x^2}+x} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

(2) (a) $$\int_0^2 |\,e^x - 2\,|\,dx = -\int_0^{\log 2}(e^x-2)\,dx + \int_{\log 2}^2 (e^x-2)\,dx$$

$$= -\Big[\ e^x - 2x\ \Big]_0^{\log 2} + \Big[\ e^x - 2x\ \Big]_{\log 2}^2$$

$$= (e^0 - 2{\cdot}0) + (e^2 - 2{\cdot}2) - 2(e^{\log 2} - 2\log 2)$$

$$= \boldsymbol{e^2 + 4\log 2 - 7}$$

(b) $$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin^2(2x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x\cos 4x\right)dx$$

$$= \left[\ \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x\sin 4x - \frac{1}{32}\cos 4x\ \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{36}\pi^2 + \frac{\sqrt{3}}{48}\pi + \frac{3}{64}}$$

(c) $$\int_1^e \frac{\sqrt{1+\log x}}{x}\,dx = \int_1^e (1+\log x)^{\frac{1}{2}}(1+\log x)'\,dx$$

$$= \left[\ \frac{2}{3}(1+\log x)^{\frac{3}{2}}\ \right]_1^e = \boldsymbol{\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)}$$

(d) $$\int_2^4 \frac{2x^3+x^2-2x+2}{x^4+x^2-2}\,dx = \int_2^4 \frac{2x(x^2-1)+(x^2+2)}{(x^2-1)(x^2+2)}\,dx$$

$$= \int_2^4\left(\frac{2x}{x^2+2} + \frac{1}{x^2-1}\right)dx$$

$$= \left[\ \log(x^2+2) + \frac{1}{2}\log\frac{x-1}{x+1}\ \right]_2^4$$

$$= \boldsymbol{2\log 3 - \frac{1}{2}\log 5}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $z^3+i=z^2+iz$ より　$(z-1)(z^2-i)=0$　ゆえに　$z=1,\ z^2=i$

$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ であるから，$z^2=i$ について $z=\cos\theta+i\sin\theta$ とすると

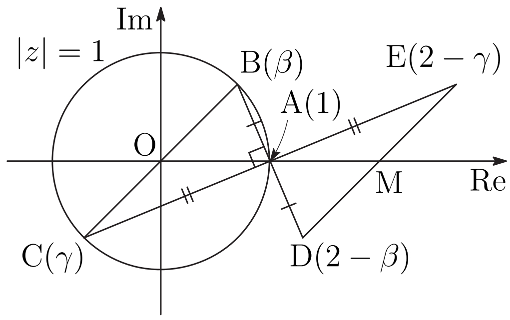
$$2\theta=\frac{\pi}{2}+2n\pi\ (n\text{ は整数})\quad\text{ゆえに}\quad\theta=\frac{\pi}{4}+n\pi$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より　　$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$

よって，偏角に注意すると

$$\alpha=\cos 0+i\sin 0=\mathbf{1}$$
$$\beta=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i}$$
$$\gamma=\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi=\boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i}$$

(2) (1) の結果から



$$\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{4},\quad\angle\mathrm{COA}=\frac{3}{4}\pi$$

$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ であるから

$$\triangle\mathrm{AOB}=\frac{1}{2}\cdot1^2\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$\triangle\mathrm{COA}=\frac{1}{2}\cdot1^2\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

よって　　$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{AOB}+\triangle\mathrm{COA}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(3) 3 点 A，B，C を通る円は，BC を直径とする円であるから　AB⊥AC

したがって，A に関して D，E はそれぞれ B，C と対称であるから

$$\mathrm{D}(2-\beta),\quad\mathrm{E}(2-\gamma)$$

このとき，$\angle\mathrm{DAE}=\frac{\pi}{2}$ であるから，3 点 A，D，E を通る円は，DE を直径とする円である．DE の中点 (中心) を M とすると，$\beta+\gamma=0$ であるから，M(2)．また，円の半径 AM は $2-1=1$.

したがって，この円の方程式は $|z-2|=1$ となり，$|z-2|^2=1$ より

$$(z-2)(\overline{z}-2)=1\quad\text{整理すると}\quad z\overline{z}-2z-2\overline{z}+3=0$$

よって　　$\boldsymbol{s=-2,\ t=-2,\ u=3}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y^{\frac{2}{x}}+y^{-\frac{2}{x}}=\left(y^{\frac{1}{x}}+y^{-\frac{1}{x}}\right)^2-2$ であるから，与えられた不等式は

$$\left(y^{\frac{1}{x}}+y^{-\frac{1}{x}}\right)^2-6\left(y^{\frac{1}{x}}+y^{-\frac{1}{x}}\right)+8\leqq 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{X^2-6X+8\leqq 0}$$

(2) (1) の結果から　$(X-2)(X-4)\leqq 0$　ゆえに　$2\leqq X\leqq 4$

ここで，$t=y^{\frac{1}{x}}$ とおくと $(t>0)$，$X=t+\dfrac{1}{t}$ であるから

$$2\leqq t+\frac{1}{t}\leqq 4$$

$t>0$ であるから

$$t^2-2t+1\geqq 0 \quad \text{かつ} \quad t^2-4t+1\leqq 0$$

上の第 1 式から　$(t-1)^2\geqq 0$,　第 2 式から　$2-\sqrt{3}\leqq t\leqq 2+\sqrt{3}$

これらを同時に満たす t の値の範囲は　$2-\sqrt{3}\leqq t\leqq 2+\sqrt{3}$

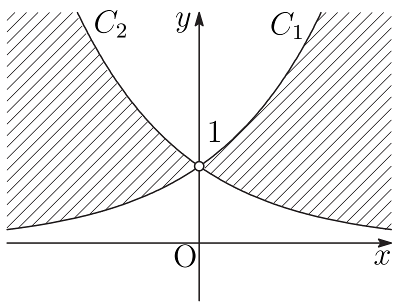
したがって　$2-\sqrt{3}\leqq y^{\frac{1}{x}}\leqq 2+\sqrt{3}$

このとき，$y>0$ および $x\neq 0$ であることに注意して

$x>0$ のとき　$(2-\sqrt{3})^x\leqq y\leqq (2+\sqrt{3})^x$

$x<0$ のとき　$(2+\sqrt{3})^x\leqq y\leqq (2-\sqrt{3})^x$

2 曲線を $C_1: y=(2+\sqrt{3})^x$，$C_2: y=(2-\sqrt{3})^x$ とおくと，点 $(x,\ y)$ が表す領域は，点 $(0,\ 1)$ を除く図の斜線部分である．ただし境界線を含む.



注意 $0<a<b$ とし，2 つの関数 $f(x)=a^x$，$g(x)=b^x$ のグラフを考えると，次の大小関係が理解しやすい.

$$x>0 \text{ のとき } f(x)<g(x), \quad x<0 \text{ のとき } f(x)>g(x)$$

$\boxed{4}$ (1) A，B が赤球で一致する確率は $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$

A，B が白球で一致する確率は $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$

これらの事象は互いに排反であるから $\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{9}=\boldsymbol{\dfrac{5}{9}}$

(2) A，B が取り出す球の色が一致する確率を p，一致しない確率を q とすると

$$p=\frac{5}{9},\quad q=1-p=\frac{4}{9}$$

よって
$$\begin{aligned}P_2&=pq+qp=2pq\\&=2\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{9}=\boldsymbol{\frac{40}{81}}\\P_3&=pqp+pqq+qpq+qqp=pq(p+3q)\\&=\frac{5}{9}\times\frac{4}{9}\left(\frac{5}{9}+3\times\frac{4}{9}\right)=\boldsymbol{\frac{340}{729}}\end{aligned}$$

(3) A と B が n 回の試行の中で取り出す球の色が一致することが少なくとも 1 回起こるが続けては起こらない事象は，次の i)〜iii) の和事象である．このとき，i)，ii)，iii) は互いに排反である．

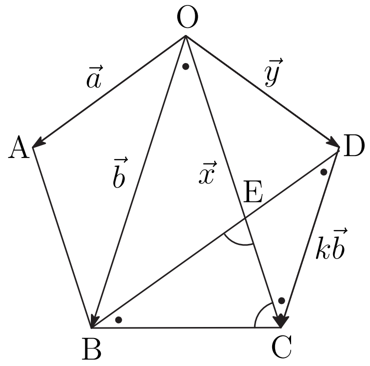
i) A と B が 1 回目に取り出す球の色が一致せず，2 回目から n 回目にかけて，一致することが少なくとも 1 回起こるが続けては起こらない．

ii) A と B が 1 回目に取り出す球の色が一致し，2 回目に一致せず，3 回目から n 回目にかけて，一致することが少なくとも 1 回起こるが続けては起こらない．

iii) A と B が 1 回目に取り出す球の色が一致し，2 回目から n 回目にかけて一致しない．

よって
$$\begin{aligned}P_n&=\frac{4}{9}P_{n-1}+\frac{5}{9}\times\frac{4}{9}P_{n-2}+\frac{5}{9}\times\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\\&=\frac{4}{9}P_{n-1}+\frac{20}{81}P_{n-2}+\frac{5\cdot 4^{n-1}}{9^n}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $t = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \mathrm{BD}$ とし，OC と BD の交点を E とすると，$\mathrm{BC} = \mathrm{BE} = 1$ より



$$\mathrm{CE} = \mathrm{DE} = t - 1$$

$\triangle\mathrm{OBC} \backsim \triangle\mathrm{BCE}$ より $\mathrm{OB} : \mathrm{BC} = \mathrm{BC} : \mathrm{CE}$ であるから

$$t : 1 = 1 : t - 1$$

したがって　　$t^2 - t - 1 = 0$　$\cdots$①

$t > 0$ に注意して，これを解くと　$t = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

よって　　$k = \dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{OB}} = \dfrac{1}{t} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$

$$\vec{x} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}} = t(\vec{b} - \vec{a}) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}+1}{2}(\vec{b} - \vec{a})}$$

$$\begin{aligned}\vec{y} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \vec{x} - k\vec{b} = t(\vec{b} - \vec{a}) - k\vec{b} = -t\vec{a} + (t-k)\vec{b} \\ &= -\frac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{a} + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\vec{b} = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{a} + \vec{b}}\end{aligned}$$

(2) $\triangle\mathrm{OAB}$ に余弦定理を適用すると

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\mathrm{OA}{\cdot}\mathrm{OB}} = \frac{1^2 + t^2 - 1^2}{2{\cdot}1{\cdot}t} = \frac{t}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}+1}{4}}$$

(3) $|\vec{b}| = t$，$\cos\theta = \dfrac{t}{2}$，および ① に注意して

$$\vec{a}{\cdot}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 1{\cdot}t{\cdot}\frac{t}{2} = \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}(t+1)$$

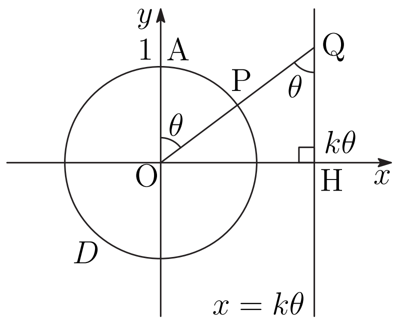
よって　　$\vec{a}{\cdot}\vec{x} = \vec{a}{\cdot}t(\vec{b} - \vec{a}) = t(\vec{a}{\cdot}\vec{b} - |\vec{a}|^2)$

$$= t\left\{\frac{1}{2}(t+1) - 1^2\right\} = \frac{1}{2}(t^2 - t) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

別解 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\dfrac{t}{2}\right)^2 - 1 = \dfrac{1}{2}t^2 - 1 = \dfrac{1}{2}(t+1) - 1 = \dfrac{1}{2}(t-1)$

よって　　$\vec{a}{\cdot}\vec{x} = |\vec{a}||\vec{x}|\cos 2\theta = 1{\cdot}t{\cdot}\dfrac{1}{2}(t-1) = \dfrac{1}{2}(t^2 - t) = \dfrac{1}{2}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 直線 $x = k\theta$ と x 軸との交点を H とすると，△OQH について，$\mathrm{OQ}\sin\theta = \mathrm{OH}$ であるから



$$r(\theta)\sin\theta = k\theta \quad \text{ゆえに} \quad r(\theta) = \frac{k\theta}{\sin\theta}$$

よって $\displaystyle \lim_{\theta\to+0} r(\theta) = \lim_{\theta\to+0} k\cdot\frac{\theta}{\sin\theta} = \boldsymbol{k}$

(2) $r(\theta) = \dfrac{k\theta}{\sin\theta}$ を微分すると

$$r'(\theta) = \frac{k(\sin\theta - \theta\cos\theta)}{\sin^2\theta} = \frac{k\cos\theta(\tan\theta - \theta)}{\sin^2\theta}$$

ここで，$h(\theta) = \tan\theta - \theta$ とすると

$$h'(\theta) = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 = \tan^2\theta$$

上式から，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき，$h'(\theta) > 0$ であるから

$$h(\theta) > h(0) \quad \text{すなわち} \quad h(\theta) > 0$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき $\quad r'(\theta) = \dfrac{k\cos\theta h(\theta)}{\sin^2\theta} > 0$

$r(\theta) = \dfrac{k\theta}{\sin\theta}$ は単調増加であるから，点 Q がつねに D の内部にあるとき

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0} r(\theta) < 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\pi}{2}k < 1$$

このとき，$k > 0$ に注意して $\quad \boldsymbol{0 < k < \dfrac{2}{\pi}}$

(3) (1) の図から，点 Q$(x,\ y)$ は

$$x = k\theta, \quad y = r(\theta)\cos\theta = \frac{k\theta}{\sin\theta}\cdot\cos\theta = \frac{k\theta}{\tan\theta}$$

上の 2 式から θ を消去すると $\quad y = \dfrac{x}{\tan\frac{x}{k}} \quad$ ゆえに $\quad f(x) = \dfrac{x}{\tan\frac{x}{k}}$

したがって $\quad g(x) = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{\tan\frac{x}{k}}$

$g(x) = \left(\tan\dfrac{x}{k}\right)^{-1}$ を微分すると

$$g'(x) = -\left(\tan\frac{x}{k}\right)^{-2}\left(\tan\frac{x}{k}\right)' = -\frac{\cos^2\frac{x}{k}}{\sin^2\frac{x}{k}}\cdot\frac{\frac{1}{k}}{\cos^2\frac{x}{k}} = -\frac{1}{k\sin^2\frac{x}{k}}$$

$g'(x) = -\dfrac{1}{k}\left(\sin\dfrac{x}{k}\right)^{-2}$ を微分すると

$$g''(x) = \frac{2}{k}\left(\sin\frac{x}{k}\right)^{-3}\left(\sin\frac{x}{k}\right)' = \frac{2}{k}\cdot\frac{1}{\sin^3\frac{x}{k}}\cdot\frac{1}{k}\cos\frac{x}{k} = \frac{2}{k^2}\cdot\frac{\cos\frac{x}{k}}{\sin^3\frac{x}{k}}$$

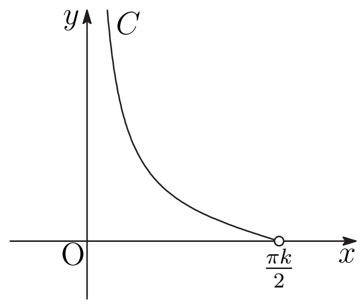
このとき，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ および $x = k\theta$ から

$$0 < x < \frac{\pi}{2}k$$

この範囲において　$g'(x) < 0$，$g''(x) > 0$

ゆえに，$g(x)$ は単調減少で，下に凸である．

また　$\displaystyle\lim_{x\to+0} g(x) = \infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi k}{2}-0} g(x) = 0$



よって，曲線 C のグラフの概形は右の図のようになる．

(4) 求める立体の体積を V とすると　$V = \pi\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}k}^{\frac{\pi}{3}k}\frac{1}{\tan^2\frac{x}{k}}\,dx$

$x = k\theta$ より　$\dfrac{dx}{d\theta} = k$

x	$\frac{\pi}{4}k \longrightarrow \frac{\pi}{3}k$
θ	$\frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

よって　

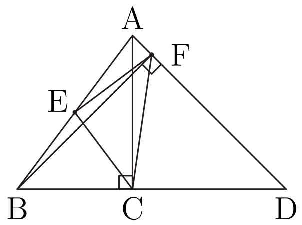
$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{k}{\tan^2\theta}\,d\theta = \pi k\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\sin^2\theta} - 1\right)d\theta \\ &= \pi k\left[-\frac{1}{\tan\theta} - \theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{\pi k\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{12}\right)} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $\angle\mathrm{AFB} = \angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$ であるから，2 点 F，C は，AB を直径とする円周上にある．このとき，E はこの円の中心であるから

$$\mathrm{EF} = \mathrm{EC}$$

(2) $\angle\mathrm{C} = 90^\circ$，$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 5 : 4$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} : \mathrm{AC} : \mathrm{BC} &= 5 : 4 : \sqrt{5^2 - 4^2} \\ &= 5 : 4 : 3\end{aligned}$$



条件から，$k > 0$ とし

$$\mathrm{AB} = 5k, \quad \mathrm{BC} = 3k, \quad \mathrm{AC} = \mathrm{CD} = 4k, \quad \mathrm{AD} = 4\sqrt{2}k$$

とおく．$\triangle\mathrm{ABD}$ の面積により

$$\frac{1}{2}\mathrm{BD}\cdot\mathrm{AC} = \frac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BF} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{2}7k\cdot 4k = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}k\cdot\mathrm{BF}$$

これから　$\mathrm{BF} = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}k$，　$\mathrm{AF} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{BF}^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}k$

ゆえに　$\mathrm{AF} : \mathrm{FD} = 1 : 7$　また　$\mathrm{AE} : \mathrm{EB} = 1 : 1$，　$\mathrm{BC} : \mathrm{CD} = 3 : 4$

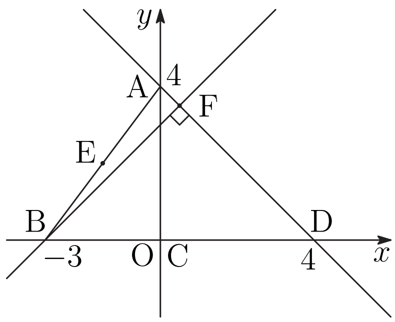
$\triangle\mathrm{ABD}$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{3}{7}S \\ \triangle\mathrm{AEF} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}S = \frac{1}{16}S \\ \triangle\mathrm{BCE} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}S = \frac{3}{14}S \\ \triangle\mathrm{CDF} &= \frac{4}{7}\cdot\frac{7}{8}S = \frac{1}{2}S\end{aligned}$$

したがって　$\triangle\mathrm{CEF} = S - \dfrac{1}{16}S - \dfrac{3}{14}S - \dfrac{1}{2}S = \dfrac{25}{112}S$

よって　$\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{CEF} = \dfrac{3}{7}\mathrm{S} : \dfrac{25}{112}\mathrm{S} = \mathbf{48 : 25}$

別解 $\angle\mathrm{C} = 90^\circ$，$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 5 : 4$ より



$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} : \mathrm{BC} = 5 : 4 : \sqrt{5^2 - 4^2}$$
$$= 5 : 4 : 3$$

C を原点とし，条件から

$$\mathrm{A}(0,\ 4),\ \mathrm{B}(-3,\ 0),\ \mathrm{C}(4,\ 0)$$

とおき，求める三角形の面積比を示してもよい．

E は AB の中点であるから　$\mathrm{E}\left(-\dfrac{3}{2},\ 2\right)$

直線 AD の方程式は　　$y = -x + 4 \quad \cdots ①$

直線 BF の方程式は　　$y = x + 3 \quad \cdots ②$

①，② を解いて　$\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$

したがって　　$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot 3 \cdot 4 = 6$

$$\triangle\mathrm{CEF} = \frac{1}{2}\left|-\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{2} - 2\cdot\frac{1}{2}\right| = \frac{25}{8}$$

よって　　$\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{CEF} = 6 : \dfrac{25}{8} = \mathbf{48 : 25}$

$\boxed{8}$ (1)
$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n-1} k(k+a) = \sum_{k=1}^{n-1}(k^2+ak) \\ &= \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) + \frac{1}{2}an(n-1) \\ &= \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1+3a) \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

$(*)$ より　$S = n \times \dfrac{(n-1)(2n-1+3a)}{6} \quad \cdots ①$

S は整数であるから，6 と n が互いに素であるとき

$$(n-1)(2n-1+3a)$$

は 6 で割り切れる．よって，① により，S は n で割り切れる．

(2) $(*)$ より

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6}n(n-1)\{2(n-2)+3(a+1)\} \\ &= n(n-1)\left(\frac{n-2}{3} + \frac{a+1}{2}\right) \quad \cdots ② \end{aligned}$$

条件から，$n-2$ は 6 で割り切れ，$a+1$ は偶数であるから

$$\frac{n-2}{3} + \frac{a+1}{2}$$

は整数である．よって，② により，S は n で割り切れる．

(3) $(*)$ より

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6}n\{(n-3)+2\}\{2(n-3)+3a+5\} \\ &= \frac{1}{6}n\{2(n-3)^2+3(a+3)(n-3)+6(a+1)+4\} \\ &= n\left\{\frac{(n-3)^2}{3} + \frac{(a+3)(n-3)}{2} + a + 1\right\} + \frac{2}{3}n \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

条件から，$n-3$ は 6 で割り切れ，a は自然数であるから

$$\frac{(n-3)^2}{3} + \frac{(a+3)(n-3)}{2} + a + 1$$

は整数である．このことと S が整数であることから，$\dfrac{2}{3}n$ は整数である．

$0 \leqq \dfrac{2}{3}n < n$ および ③ により，S を n で割った余りは　$\boldsymbol{\dfrac{2}{3}n}$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) 与えられた関数列により

$$f_2(x) = re^{-2rx}\int_0^x f_1(t)e^{2rt}\,dt = re^{-2rx}\int_0^x e^{rt}\,dt$$
$$= e^{-2rx}\Big[\,e^{rt}\,\Big]_0^x = \boldsymbol{e^{-2rx}(e^{rx}-1)}$$
$$f_3(x) = 2re^{-3rx}\int_0^x f_2(t)e^{3rt}\,dt = 2re^{-3rx}\int_0^x (e^{2rt}-e^{rt})\,dt$$
$$= e^{-3rx}\Big[\,e^{2rt}-2e^{rt}\,\Big]_0^x = e^{-3rx}(e^{2rx}-2e^{rx}+1)$$
$$= \boldsymbol{e^{-3rx}(e^{rx}-1)^2}$$

(2) (1) の結果から

$$f_n(x) = e^{-nrx}(e^{rx}-1)^{n-1} \quad \cdots\text{(A)}$$

と推測する.

［1］ $n=1$ のとき　$f_1(x) = e^{-rx}(e^{rx}-1)^0 = e^{-rx}$
よって，$n=1$ のとき，(A) が成り立つ.

［2］ $n=k$ のとき (A) が成り立つ，すなわち

$$f_k(x) = e^{-krx}(e^{rx}-1)^{k-1}$$

であると仮定すると

$$f_{k+1}(x) = kre^{-(k+1)rx}\int_0^x f_k(t)e^{(k+1)rt}\,dt$$
$$= kre^{-(k+1)rx}\int_0^x (e^{rx}-1)^{k-1}e^{rt}\,dt$$
$$= e^{-(k+1)rx}\int_0^x k(e^{rt}-1)^{k-1}(e^{rt}-1)'\,dt$$
$$= e^{-(k+1)rx}\Big[\,(e^{rt}-1)^k\,\Big]_0^x = e^{-(k+1)rx}(e^{rx}-1)^k$$

よって，$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ.

［1］,［2］から，すべての自然数 n について (A) が成り立つ.

(3) $f_n(x)=e^{-nrx}(e^{rx}-1)^{n-1}$ $(n \geqq 3)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= -nre^{-nrx}(e^{rx}-1)^{n-1}+e^{-nrx}\cdot(n-1)(e^{rx}-1)^{n-2}\cdot re^{rx} \\ &= re^{-nrx}(e^{rx}-1)^{n-2}\{-n(e^{rx}-1)+(n-1)e^{rx}\} \\ &= re^{-nrx}(e^{rx}-1)^{n-2}(n-e^{rx}) \end{aligned}$$

$x>0$ のとき，$f_n'(x)=0$ とすると

$$n-e^{rx}=0 \quad \text{すなわち} \quad x=\frac{1}{r}\log n$$

したがって，$f_n(x)$ の増減表は

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{r}\log n$	$\cdots$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$
$f_n(x)$		↗	極大	↘

よって，$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{r}\log n}$ で極大値 $\boldsymbol{\dfrac{(n-1)^{n-1}}{n^n}}$ をとる．

$\boxed{10}$ (1) A，B が赤球で一致する確率は $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$

A，B が白球で一致する確率は $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$

これらの事象は互いに排反であるから $\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{9}=\boldsymbol{\dfrac{5}{9}}$

(2) A，B が取り出す球の色が一致する確率を p，一致しない確率を q とすると

$$p=\frac{5}{9},\quad q=1-p=\frac{4}{9}$$

よって　$pqp+pqq+qpq+qqp=pq(p+3q)$

$$=\frac{5}{9}\times\frac{4}{9}\left(\frac{5}{9}+3\times\frac{4}{9}\right)=\boldsymbol{\frac{340}{729}}$$

(3) 求める確率は

$$\begin{aligned} &ppqp+ppqq+qppq+pqpp+qqpp \\ =&2p^3q+3p^2q^2=p^2q(2p+3q) \\ =&\left(\frac{5}{9}\right)^2\times\frac{4}{9}\times\left(2\times\frac{5}{9}+3\times\frac{4}{9}\right)=\boldsymbol{\frac{2200}{6561}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{11}}$ (1) $x \geqq -1$ のとき　$f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 3$，$f'(x) = -x + 2$

ℓ の方程式は $(t > -1)$，$t \neq 2$ のとき　$y - f(t) = -\dfrac{1}{f'(t)}(x - t)$

ゆえに　$y - \left(-\dfrac{1}{2}t^2 + 2t + 3\right) = -\dfrac{1}{-t+2}(x - t)$

よって　$t \neq 2$ のとき　$\boldsymbol{y = \dfrac{1}{t-2}(x - t) - \dfrac{1}{2}t^2 + 2t + 3}$

$t = 2$ のとき　$\boldsymbol{x = 2}$

(2) $f(-1) = \dfrac{1}{2}$ であるから，ℓ が $\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通るとき

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{t-2}(-1 - t) - \frac{1}{2}t^2 + 2t + 3$$

整理すると　$t^3 - 6t^2 + 5t + 12 = 0$　ゆえに　$(t+1)(t-3)(t-4) = 0$

これを満たす t の中で $(t > -1)$，最小の t の値は　$\boldsymbol{t = 3}$

(3) $t = 3$ を (1) の結果に代入すると　$\ell : y = x + \dfrac{3}{2}$

$C : y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2|x + 1| + 1$ は

$$x \leqq -1 \text{ のとき}\quad y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$$
$$x \geqq -1 \text{ のとき}\quad y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$$

ℓ と C の共有点の x 座標は

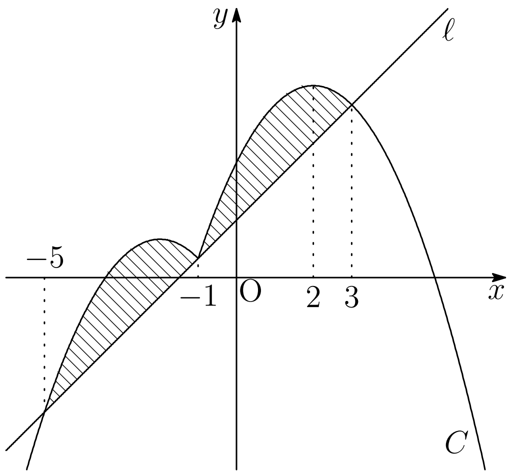
$x \leqq -1$ のとき

$$-\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 = x + \frac{3}{2} \quad \text{これを解いて}\quad x = -5, -1$$

$x \geqq -1$ のとき

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 = x + \frac{3}{2} \quad \text{これを解いて}\quad x = -1,\ 3$$

ℓ と C で囲まれた部分は，下の図の斜線部分である．



したがって，求める面積を S とすると

$$S=\int_{-5}^{-1}\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2-2x-1\right)-\left(x+\frac{3}{2}\right)\right\}dx$$

$$+\int_{-1}^{3}\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2+2x+3\right)-\left(x+\frac{3}{2}\right)\right\}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-5}^{-1}(x+5)(x+1)\,dx-\frac{1}{2}\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\{-1-(-5)\}^3+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\{3-(-1)\}^3=\mathbf{\frac{32}{3}}$$