

平成 28 年度 宮崎大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
 工 (物質環境化学を除く)・医 (医)・農・教育文化 (中学数学・中学社
 会・理科・技術・家庭・初等教育・特別支援・社会システム) 学部
 平成 28 年 2 月 25 日

- 工学部 [1] [2] [3] [4] 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部 [2] [3] [4] [5] [6] 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 教育文化 (中学数学) 学部 [1] [4] [7] [8] [9] 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 教育文化 (中学 [社会, 理科, 技術, 家庭], 初等教育, 特別支援, 社会システム) 学部・農学部 [7] [10] [11] 数 I・II・A・B (90 分)

1 次の各問に答えよ。ただし, $\log x$ は x の自然対数を表す。

(1) 次の関数を微分せよ。

(a) $y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$

(b) $y = \log \sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}}$

(2) 次の定積分の値を求めよ。

(a) $\int_0^2 |e^x - 2| dx$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin^2(2x) dx$

(c) $\int_1^e \frac{\sqrt{1 + \log x}}{x} dx$

(d) $\int_2^4 \frac{2x^3 + x^2 - 2x + 2}{x^4 + x^2 - 2} dx$

2 複素数 z の方程式 $z^3 + i = z^2 + iz$ (i は虚数単位) の 3 つの解を, その偏角 θ (ただし, $0 \leq \theta < 2\pi$) の小さい順に α, β, γ とする。複素数平面上で, α, β, γ を表す点をそれぞれ A, B, C とし, 直線 AC に関して B と対称な点を D , 直線 AB に関して C と対称な点を E とする。このとき, 次の各問に答えよ。

(1) α, β, γ を $x + yi$ (x, y は実数) の形でそれぞれ表せ。

(2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

(3) 複素数平面上で, 3 点 A, D, E を通る円周上のどの複素数 z も,
 $z\bar{z} + sz + t\bar{z} + u = 0$ を満たすような複素数の定数 s, t, u を求めよ。

3 $y > 0$ とするとき、不等式

$$y^{\frac{2}{x}} + y^{-\frac{2}{x}} - 6(y^{\frac{1}{x}} + y^{-\frac{1}{x}}) + 10 \leq 0$$

について、次の各問に答えよ。

- (1) $X = y^{\frac{1}{x}} + y^{-\frac{1}{x}}$ とするとき、この不等式を、 X を用いて表せ。
- (2) この不等式を満たす点 (x, y) の全体が表す図形を座標平面上に図示せよ。

4 A と B は、赤球 2 個と白球 1 個が入った袋をそれぞれ 1 つずつ持っている。次のような試行を考える。

A と B が、それぞれ自分の持っている袋の中から無作為に球を 1 つ選び、色を見てからもとの袋に戻す。

上の試行を n ($n \geq 2$) 回繰り返したとき、 n 回の試行の中で A と B が取り出した球の色が一致することが少なくとも 1 回起こるが続けては起こらない確率を P_n とする。このとき、次の各問に答えよ。

- (1) 1 回の試行で、A と B が取り出した球の色が一致する確率を求めよ。
- (2) P_2, P_3 を求めよ。
- (3) $n \geq 4$ のとき、

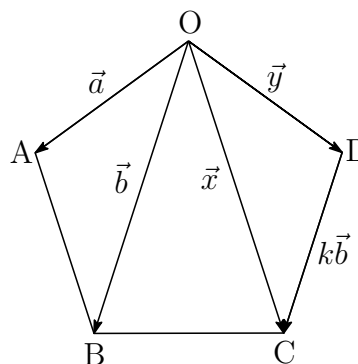
$$P_n = \frac{4}{9}P_{n-1} + \frac{20}{81}P_{n-2} + \frac{5 \cdot 4^{n-1}}{9^n}$$

が成り立つことを示せ。

5 一辺の長さ 1 の正五角形 OABCD について、OB と DC は平行である。

$$\begin{aligned} \vec{OA} &= \vec{a}, \quad \vec{OB} = \vec{b}, \quad \vec{OC} = \vec{x}, \\ \vec{OD} &= \vec{y}, \quad \vec{DC} = k\vec{b} \quad (k \text{ は実数}) \end{aligned}$$

とするとき、次の各問に答えよ。



- (1) k の値を求め、 \vec{x}, \vec{y} を、 \vec{a} と \vec{b} を用いてそれぞれ表せ。
- (2) \vec{a} と \vec{b} のなす角を θ とするとき、 $\cos \theta$ の値を求めよ。
- (3) \vec{a} と \vec{x} の内積を求めよ。

6 $k > 0$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする. 座標平面上の原点 O , 点 $A(0, 1)$ に対し, 第一象限の点 P を, $\angle AOP = \theta$ を満たすように円 $D: x^2 + y^2 = 1$ 上にとり, 直線 OP と直線 $x = k\theta$ との交点を Q とする. θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で動かすときの点 Q の軌跡を曲線 $y = f(x)$ とし, 関数 $y = g(x) = \frac{f(x)}{x}$ で定める曲線を C とする. このとき, 次の各問に答えよ.

- (1) $r(\theta) = OQ$ とするとき, $\lim_{\theta \rightarrow +0} r(\theta)$ の値を求めよ.
- (2) 点 Q がつねに円 D の内部にあるための k の条件を求めよ.
- (3) 関数 $g(x)$ の増減と凹凸を調べ, 曲線 C の概形をかけ.
- (4) 曲線 C と x 軸および 2 直線 $x = \frac{\pi}{4}k$, $x = \frac{\pi}{3}k$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を, k を用いて表せ.

7 $\triangle ABC$ において, $\angle C = 90^\circ$, $AB : AC = 5 : 4$ とする. 辺 BC の点 C 側の延長上に, $CA = CD$ となる点 D をとる. 辺 AB の中点を E とし, 点 B から直線 AD に下した垂線を BF とするとき, 次の各問に答えよ.

- (1) $EF = EC$ を示せ.
- (2) 面積比 $\triangle ABC : \triangle CEF$ を求めよ.

8 2 以上の自然数 n と自然数 a について, 和

$$1 \cdot (1 + a) + 2 \cdot (2 + a) + \cdots + (n - 1) \{ (n - 1) + a \}$$

を S とおく. このとき, 次の各問に答えよ.

- (1) 6 と n が互いに素であるとき, すべての自然数 a に対して, S は n で割り切れることを示せ.
- (2) n を 6 で割った余りが 2 であるとき, すべての奇数 a に対して, S は n で割り切れることを示せ.
- (3) n を 6 で割った余りが 3 であるとき, すべての自然数 a に対して, S を n で割った余りを, n を用いて表せ. ただし, 求める余りは, 0 以上 $n - 1$ 以下の範囲で求めよ.

9 $r > 0$ とするとき、関数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を

$$f_1(x) = e^{-rx},$$

$$f_{n+1}(x) = nre^{-(n+1)rx} \int_0^x f_n(t)e^{(n+1)rt} dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める. このとき、次の各問に答えよ.

- (1) 関数 $f_2(x)$, $f_3(x)$ を求めよ.
- (2) 関数 $f_n(x)$ を推測し、その推測が正しいことを、数学的帰納法を用いて証明せよ.
- (3) $n \geq 3$, $x > 0$ のとき、関数 $f_n(x)$ の極値を求めよ.

10 A と B は、赤球 2 個と白球 1 個が入った袋をそれぞれ 1 つずつ持っている. 次のような試行を考える.

A と B が、それぞれ自分の持っている袋の中から無作為に球を 1 つ選び、色を見てからもとの袋に戻す.

このとき、次の各問に答えよ.

- (1) 1 回の試行で、A と B が取り出した球の色が一致する確率を求めよ.
- (2) 上の試行を 3 回繰り返したとき、3 回の試行の中で A と B が取り出した球の色が一致することが少なくとも 1 回起こるが続けては起こらない確率を求めよ.
- (3) 上の試行を 4 回繰り返したとき、4 回の試行の中のどこかで、A と B が取り出した球の色が一致することが 2 回続けて起こり、かつ 3 回以上続けて起こらない確率を求めよ.

11 関数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2|x + 1| + 1$ に対し、座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とする. 点 $P(t, f(t))$ ($t > -1$) における曲線 C の接線に垂直で、点 P を通る直線を l とする. このとき、次の各問に答えよ.

- (1) 直線 l の方程式を、 t を用いて表せ.
- (2) 直線 l が点 $(-1, f(-1))$ を通るとき、 t の中で最も小さいものを求めよ.
- (3) (2) で求めた t が定める直線 l と曲線 C によって囲まれる部分の面積を求めよ.

解答例

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad (1) \quad (a) \quad y' &= \frac{(x)'(1+e^{\frac{1}{x}}) - x(1+e^{\frac{1}{x}})'}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2} = \frac{1(1+e^{\frac{1}{x}}) - x(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}})'}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2} \\ &= \frac{1+e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2} = \frac{x+(x+1)e^{\frac{1}{x}}}{x(1+e^{\frac{1}{x}})^2} \end{aligned}$$

$$(b) \quad y = \log \sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}} = \log(\sqrt{1+x^2}+x) \text{ より}$$

$$y' = \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)'}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (a) \quad \int_0^2 |x^2-2| dx &= -\int_0^{\log 2} (e^x-2) dx + \int_{\log 2}^2 (e^x-2) dx \\ &= -\left[e^x-2x \right]_0^{\log 2} + \left[e^x-2x \right]_{\log 2}^2 \\ &= (e^0-2\cdot 0) + (e^2-2\cdot 2) - 2(e^{\log 2}-2\log 2) \\ &= e^2 + 4\log 2 - 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin^2(2x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x \cos 4x \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x \sin 4x - \frac{1}{32} \cos 4x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{1}{36}\pi^2 + \frac{\sqrt{3}}{48}\pi + \frac{3}{64} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c) \quad \int_1^e \frac{\sqrt{1+\log x}}{x} dx &= \int_1^e (1+\log x)^{\frac{1}{2}}(1+\log x)' dx \\ &= \left[\frac{2}{3}(1+\log x)^{\frac{3}{2}} \right]_1^e = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d) \quad \int_2^4 \frac{2x^3+x^2-2x+2}{x^4+x^2-2} dx &= \int_2^4 \frac{2x(x^2-1)+(x^2+2)}{(x^2-1)(x^2+2)} dx \\ &= \int_2^4 \left(\frac{2x}{x^2+2} + \frac{1}{x^2-1} \right) dx \\ &= \left[\log(x^2+2) + \frac{1}{2} \log \frac{x-1}{x+1} \right]_2^4 \\ &= 2\log 3 - \frac{1}{2} \log 5 \end{aligned}$$



- 2 (1) $z^3 + i = z^2 + iz$ より $(z-1)(z^2-i) = 0$ ゆえに $z=1, z^2=i$
 $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ であるから, $z^2=i$ について $z = \cos \theta + i \sin \theta$ とすると

$$2\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad (n \text{ は整数}) \quad \text{ゆえに} \quad \theta = \frac{\pi}{4} + n\pi$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ より} \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$$

よって, 偏角に注意すると

$$\alpha = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$\beta = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$\gamma = \cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

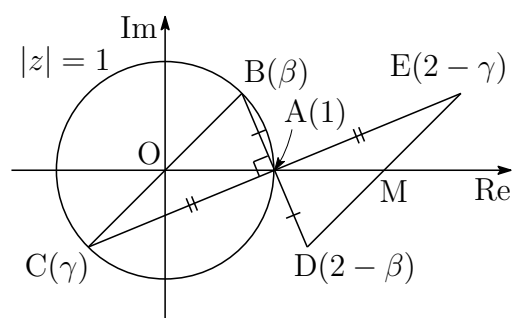
- (2) (1) の結果から

$$\angle AOB = \frac{\pi}{4}, \quad \angle COA = \frac{3}{4}\pi$$

$$|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1 \text{ であるから}$$

$$\triangle AOB = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\triangle COA = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \sin \frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{4}$$



$$\text{よって} \quad \triangle ABC = \triangle AOB + \triangle COA = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- (3) 3点 A, B, C を通る円は, BC を直径とする円であるから $AB \perp AC$ したがって, A に関して D, E はそれぞれ B, C と対称であるから

$$D(2-\beta), \quad E(2-\gamma)$$

このとき, $\angle DAE = \frac{\pi}{2}$ であるから, 3点 A, D, E を通る円は, DE を直径とする円である. DE の中点 (中心) を M とすると, $\beta + \gamma = 0$ であるから, $M(2)$. また, 円の半径 AM は $2-1=1$.

したがって, この円の方程式は $|z-2|=1$ となり, $|z-2|^2=1$ より

$$(z-2)(\bar{z}-2) = 1 \quad \text{整理すると} \quad z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} + 3 = 0$$

$$\text{よって} \quad s = -2, \quad t = -2, \quad u = 3$$

■

3 (1) $y^{\frac{2}{x}} + y^{-\frac{2}{x}} = \left(y^{\frac{1}{x}} + y^{-\frac{1}{x}}\right)^2 - 2$ であるから、与えられた不等式は

$$\left(y^{\frac{1}{x}} + y^{-\frac{1}{x}}\right)^2 - 6\left(y^{\frac{1}{x}} + y^{-\frac{1}{x}}\right) + 8 \leq 0 \quad \text{よって} \quad X^2 - 6X + 8 \leq 0$$

(2) (1)の結果から $(X-2)(X-4) \leq 0$ ゆえに $2 \leq X \leq 4$

ここで、 $t = y^{\frac{1}{x}}$ とおくと ($t > 0$), $X = t + \frac{1}{t}$ であるから

$$2 \leq t + \frac{1}{t} \leq 4$$

$t > 0$ であるから

$$t^2 - 2t + 1 \geq 0 \quad \text{かつ} \quad t^2 - 4t + 1 \leq 0$$

上の第1式から $(t-1)^2 \geq 0$, 第2式から $2 - \sqrt{3} \leq t \leq 2 + \sqrt{3}$

これらを同時に満たす t の値の範囲は $2 - \sqrt{3} \leq t \leq 2 + \sqrt{3}$

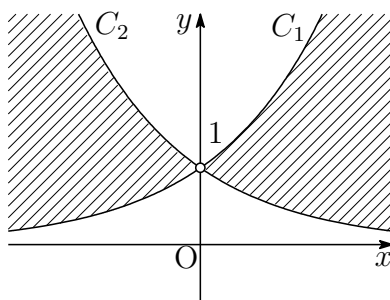
したがって $2 - \sqrt{3} \leq y^{\frac{1}{x}} \leq 2 + \sqrt{3}$

このとき、 $y > 0$ および $x \neq 0$ であることに注意して

$$x > 0 \text{ のとき} \quad (2 - \sqrt{3})^x \leq y \leq (2 + \sqrt{3})^x$$

$$x < 0 \text{ のとき} \quad (2 + \sqrt{3})^x \leq y \leq (2 - \sqrt{3})^x$$

2曲線を $C_1: y = (2 + \sqrt{3})^x$, $C_2: y = (2 - \sqrt{3})^x$ とおくと、点 (x, y) が表す領域は、点 $(0, 1)$ を除く図の斜線部分である。ただし境界線を含む。



注意 $0 < a < b$ とし、2つの関数 $f(x) = a^x$, $g(x) = b^x$ のグラフを考えると、次の大小関係が理解しやすい。

$$x > 0 \text{ のとき} \quad f(x) < g(x), \quad x < 0 \text{ のとき} \quad f(x) > g(x)$$



4 (1) A, B が赤球で一致する確率は $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

A, B が白球で一致する確率は $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

これらの事象は互いに排反であるから $\frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$

(2) A, B が取り出す球の色が一致する確率を p , 一致しない確率を q とすると

$$p = \frac{5}{9}, \quad q = 1 - p = \frac{4}{9}$$

よって $P_2 = pq + qp = 2pq$

$$= 2 \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{40}{81}$$

$$P_3 = pqp + pqq + qpq + qqp = pq(p + 3q)$$

$$= \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} \left(\frac{5}{9} + 3 \times \frac{4}{9} \right) = \frac{340}{729}$$

(3) A と B が n 回の試行の中で取り出す球の色が一致することが少なくとも 1 回起こるが続けては起こらない事象は、次の i) ~ iii) の和事象である。このとき、i), ii), iii) は互いに排反である。

i) A と B が 1 回目に取り出す球の色が一致せず、2 回目から n 回目にかけて、一致することが少なくとも 1 回起こるが続けては起こらない。

ii) A と B が 1 回目に取り出す球の色が一致し、2 回目に一致せず、3 回目から n 回目にかけて、一致することが少なくとも 1 回起こるが続けては起こらない。

iii) A と B が 1 回目に取り出す球の色が一致し、2 回目から n 回目にかけて一致しない。

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad P_n &= \frac{4}{9}P_{n-1} + \frac{5}{9} \times \frac{4}{9}P_{n-2} + \frac{5}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \\ &= \frac{4}{9}P_{n-1} + \frac{20}{81}P_{n-2} + \frac{5 \cdot 4^{n-1}}{9^n} \end{aligned}$$



- 5 (1) $t = OB = OC = BD$ とし, OC と BD の交点を E とすると, $BC = BE = 1$ より

$$CE = DE = t - 1$$

$\triangle OBC \sim \triangle BCE$ より $OB : BC = BC : CE$ であるから

$$t : 1 = 1 : t - 1$$

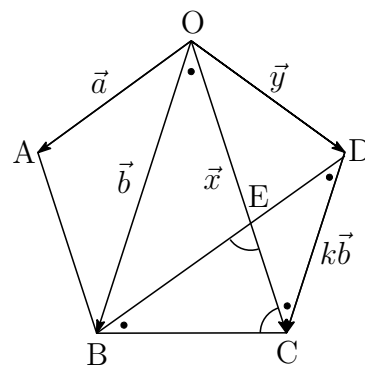
したがって $t^2 - t - 1 = 0 \dots \textcircled{1}$

$t > 0$ に注意して, これを解くと $t = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

よって $k = \frac{CD}{OB} = \frac{1}{t} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

$$\vec{x} = t\vec{AB} = t(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\begin{aligned} \vec{y} &= \vec{OC} + \vec{CD} = \vec{x} - k\vec{b} = t(\vec{b} - \vec{a}) - k\vec{b} = -t\vec{a} + (t - k)\vec{b} \\ &= -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\vec{a} + \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)\vec{b} = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\vec{a} + \vec{b} \end{aligned}$$



- (2) $\triangle OAB$ に余弦定理を適用すると

$$\cos \theta = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = \frac{1^2 + t^2 - 1^2}{2 \cdot 1 \cdot t} = \frac{t}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

- (3) $|\vec{b}| = t$, $\cos \theta = \frac{t}{2}$, および $\textcircled{1}$ に注意して

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 1 \cdot t \cdot \frac{t}{2} = \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}(t + 1)$$

よって $\vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{a} \cdot t(\vec{b} - \vec{a}) = t(\vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{a}|^2)$

$$= t \left\{ \frac{1}{2}(t + 1) - 1^2 \right\} = \frac{1}{2}(t^2 - t) = \frac{1}{2}$$

別解 $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2 \left(\frac{t}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{2}t^2 - 1 = \frac{1}{2}(t + 1) - 1 = \frac{1}{2}(t - 1)$

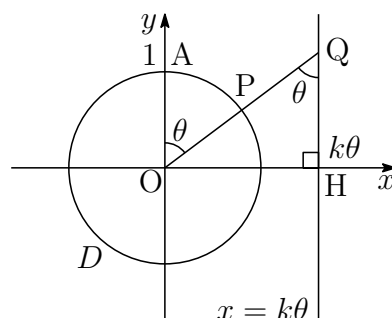
よって $\vec{a} \cdot \vec{x} = |\vec{a}| |\vec{x}| \cos 2\theta = 1 \cdot t \cdot \frac{1}{2}(t - 1) = \frac{1}{2}(t^2 - t) = \frac{1}{2}$



- 6 (1) 直線 $x = k\theta$ と x 軸との交点を H とすると、 $\triangle OQH$ について、 $OQ \sin \theta = OH$ であるから

$$r(\theta) \sin \theta = k\theta \quad \text{ゆえに} \quad r(\theta) = \frac{k\theta}{\sin \theta}$$

$$\text{よって} \quad \lim_{\theta \rightarrow +0} r(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow +0} k \cdot \frac{\theta}{\sin \theta} = k$$



- (2) $r(\theta) = \frac{k\theta}{\sin \theta}$ を微分すると

$$r'(\theta) = \frac{k(\sin \theta - \theta \cos \theta)}{\sin^2 \theta} = \frac{k(\tan \theta - \theta) \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

ここで、 $h(\theta) = \tan \theta - \theta$ とすると

$$h'(\theta) = \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 = \tan^2 \theta$$

上式から、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $h'(\theta) > 0$ であるから

$$h(\theta) > h(0) \quad \text{すなわち} \quad h(\theta) > 0$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ のとき} \quad r'(\theta) = \frac{kh(\theta) \cos \theta}{\sin^2 \theta} > 0$$

$r(\theta) = \frac{k\theta}{\sin \theta}$ は単調増加であるから、点 Q がつねに D の内部にあるとき

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} r(\theta) < 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\pi}{2}k < 1$$

このとき、 $k > 0$ に注意して $0 < k < \frac{2}{\pi}$

- (3) (1) の図から、点 $Q(x, y)$ は

$$x = k\theta, \quad y = r(\theta) \cos \theta = \frac{k\theta}{\sin \theta} \cdot \cos \theta = \frac{k\theta}{\tan \theta}$$

$$\text{上の 2 式から } \theta \text{ を消去すると} \quad y = \frac{x}{\tan \frac{x}{k}} \quad \text{ゆえに} \quad f(x) = \frac{x}{\tan \frac{x}{k}}$$

$$\text{したがって} \quad g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{\tan \frac{x}{k}}$$

$g(x) = \left(\tan \frac{x}{k}\right)^{-1}$ を微分すると

$$g'(x) = -\left(\tan \frac{x}{k}\right)^{-2} \left(\tan \frac{x}{k}\right)' = -\frac{\cos^2 \frac{x}{k}}{\sin^2 \frac{x}{k}} \cdot \frac{1}{k} \cos^2 \frac{x}{k} = -\frac{1}{k \sin^2 \frac{x}{k}}$$

$g'(x) = -\frac{1}{k} \left(\sin \frac{x}{k}\right)^{-2}$ を微分すると

$$g''(x) = \frac{2}{k} \left(\sin \frac{x}{k}\right)^{-3} \left(\sin \frac{x}{k}\right)' = \frac{2}{k} \cdot \frac{1}{\sin^3 \frac{x}{k}} \cdot \frac{1}{k} \cos \frac{x}{k} = \frac{2}{k^2} \cdot \frac{\cos \frac{x}{k}}{\sin^3 \frac{x}{k}}$$

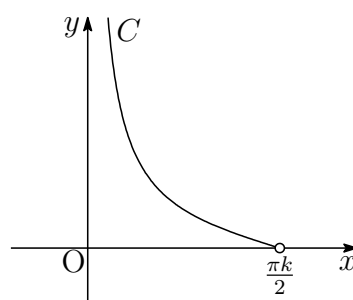
このとき, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ および $x = k\theta$ から

$$0 < x < \frac{\pi}{2}k$$

この範囲において $g'(x) < 0$, $g''(x) > 0$
ゆえに, $g(x)$ は単調減少で, 下に凸である.

また $\lim_{x \rightarrow +0} g(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi k}{2} - 0} g(x) = 0$

よって, 曲線 C のグラフの概形は右の図のようになる.



(4) 求める立体の体積を V とすると
$$V = \pi \int_{\frac{\pi}{4}k}^{\frac{\pi}{3}k} \frac{1}{\tan^2 \frac{x}{k}} dx$$

$$x = k\theta \text{ より } \frac{dx}{d\theta} = k \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline x & \frac{\pi}{4}k & \rightarrow & \frac{\pi}{3}k \\ \hline \theta & \frac{\pi}{4} & \rightarrow & \frac{\pi}{3} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } V &= \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{k}{\tan^2 \theta} d\theta = \pi k \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1 \right) d\theta \\ &= \pi k \left[-\frac{1}{\tan \theta} - \theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \pi k \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{12} \right) \end{aligned}$$

■

- 7 (1) $\angle AFB = \angle ACB = 90^\circ$ であるから、2点F, Cは、ABを直径とする円周上にある。このとき、Eはこの円の中心であるから

$$EF = EC$$

- (2) $\angle C = 90^\circ$, $AB : AC = 5 : 4$ より

$$\begin{aligned} AB : AC : BC &= 5 : 4 : \sqrt{5^2 - 4^2} \\ &= 5 : 4 : 3 \end{aligned}$$

条件から、 $k > 0$ とし

$$AB = 5k, \quad BC = 3k, \quad AC = CD = 4k, \quad AD = 4\sqrt{2}k$$

とおく。△ABDの面積により

$$\frac{1}{2}BD \cdot AC = \frac{1}{2}AD \cdot BF \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{2}7k \cdot 4k = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2}k \cdot BF$$

$$\text{これから} \quad BF = \frac{7\sqrt{2}}{2}k, \quad AF = \sqrt{AB^2 - BF^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}k$$

$$\text{ゆえに} \quad AF : FD = 1 : 7 \quad \text{また} \quad AE : EB = 1 : 1, \quad BC : CD = 3 : 4$$

△ABDの面積を S とすると

$$\triangle ABC = \frac{3}{7}S$$

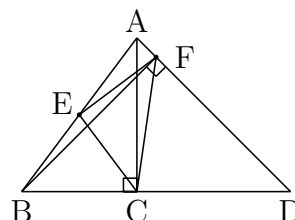
$$\triangle AEF = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}S = \frac{1}{16}S$$

$$\triangle BCE = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}S = \frac{3}{14}S$$

$$\triangle CDF = \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{8}S = \frac{1}{2}S$$

$$\text{したがって} \quad \triangle CEF = S - \frac{1}{16}S - \frac{3}{14}S - \frac{1}{2}S = \frac{25}{112}S$$

$$\text{よって} \quad \triangle ABC : \triangle CEF = \frac{3}{7}S : \frac{25}{112}S = 48 : 25$$

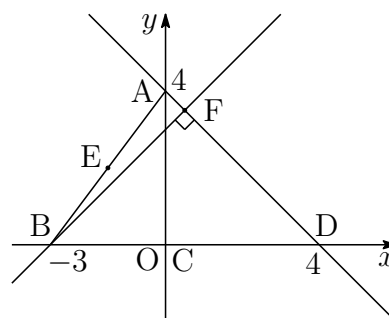


別解 $\angle C = 90^\circ$, $AB : AC = 5 : 4$ より

$$\begin{aligned} AB : AC : BC &= 5 : 4 : \sqrt{5^2 - 4^2} \\ &= 5 : 4 : 3 \end{aligned}$$

Cを原点とし, 条件から

$$A(0, 4), B(-3, 0), D(4, 0)$$



とおき, 求める三角形の面積比を示してもよい.

$$E \text{ は } AB \text{ の中点であるから } E\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$$

$$\text{直線 } AD \text{ の方程式は } y = -x + 4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{直線 } BF \text{ の方程式は } y = x + 3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を解いて } F\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$\text{したがって } \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$$

$$\triangle CEF = \frac{1}{2} \left| -\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \right| = \frac{25}{8}$$

$$\text{よって } \triangle ABC : \triangle CEF = 6 : \frac{25}{8} = \mathbf{48 : 25}$$



$$\begin{aligned}
 \boxed{8} \quad (1) \quad S &= \sum_{k=1}^{n-1} k(k+a) = \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 + ak) \\
 &= \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) + \frac{1}{2}an(n-1) \\
 &= \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1+3a) \quad \cdots (*)
 \end{aligned}$$

$$(*) \text{ より } S = n \times \frac{(n-1)(2n-1+3a)}{6} \quad \cdots \textcircled{1}$$

S は整数であるから、6 と n が互いに素であるとき

$$(n-1)(2n-1+3a)$$

は6で割り切れる。よって、 $\textcircled{1}$ により、 S は n で割り切れる。

(2) $(*)$ より

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{6}n(n-1)\{2(n-2)+3(a+1)\} \\
 &= n(n-1) \left(\frac{n-2}{3} + \frac{a+1}{2} \right) \quad \cdots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

条件から、 $n-2$ は6で割り切れ、 $a+1$ は偶数であるから

$$\frac{n-2}{3} + \frac{a+1}{2}$$

は整数である。よって、 $\textcircled{2}$ により、 S は n で割り切れる。

(3) $(*)$ より

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{6}n\{(n-3)+2\}\{2(n-3)+3a+5\} \\
 &= \frac{1}{6}n\{2(n-3)^2+3(a+3)(n-3)+6(a+1)+4\} \\
 &= n \left\{ \frac{(n-3)^2}{3} + \frac{(a+3)(n-3)}{2} + a+1 \right\} + \frac{2}{3}n \quad \cdots \textcircled{3}
 \end{aligned}$$

条件から、 $n-3$ は6で割り切れ、 a は自然数であるから

$$\frac{(n-3)^2}{3} + \frac{(a+3)(n-3)}{2} + a+1$$

は整数である。このことと S が整数であることから、 $\frac{2}{3}n$ は整数である。

$0 \leq \frac{2}{3}n < n$ および $\textcircled{3}$ により、 S を n で割った余りは $\frac{2}{3}n$ ■

9 (1) 与えられた関数列により

$$\begin{aligned}
 f_2(x) &= re^{-2rx} \int_0^x f_1(t)e^{2rt} dt = re^{-2rx} \int_0^x e^{rt} dt \\
 &= e^{-2rx} \left[e^{rt} \right]_0^x = e^{-2rx}(e^{rx} - 1) \\
 f_3(x) &= 2re^{-3rx} \int_0^x f_2(t)e^{3rt} dt = 2re^{-3rx} \int_0^x (e^{2rt} - e^{rt}) dt \\
 &= e^{-3rx} \left[e^{2rt} - 2e^{rt} \right]_0^x = e^{-3rx}(e^{2rx} - 2e^{rx} + 1) \\
 &= e^{-3rx}(e^{rx} - 1)^2
 \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$f_n(x) = e^{-nrx}(e^{rx} - 1)^{n-1} \quad \dots (A)$$

と推測する.

[1] $n = 1$ のとき $f_1(x) = e^{-rx}(e^{rx} - 1)^0 = e^{-rx}$

よって, $n = 1$ のとき, (A) が成り立つ.

[2] $n = k$ のとき (A) が成り立つ, すなわち

$$f_k(x) = e^{-krx}(e^{rx} - 1)^{k-1}$$

であると仮定すると

$$\begin{aligned}
 f_{k+1}(x) &= kre^{-(k+1)rx} \int_0^x f_k(t)e^{(k+1)rt} dt \\
 &= kre^{-(k+1)rx} \int_0^x (e^{rx} - 1)^{k-1} e^{rt} dt \\
 &= e^{-(k+1)rx} \int_0^x k(e^{rt} - 1)^{k-1} (e^{rt} - 1)' dt \\
 &= e^{-(k+1)rx} \left[(e^{rt} - 1)^k \right]_0^x = e^{-(k+1)rx}(e^{rx} - 1)^k
 \end{aligned}$$

よって, $n = k + 1$ のときも (A) が成り立つ.

[1], [2] から, すべての自然数 n について (A) が成り立つ.

(3) $f_n(x) = e^{-nrx}(e^{rx} - 1)^{n-1}$ ($n \geq 3$) を微分すると

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= -nre^{-nrx}(e^{rx} - 1)^{n-1} + e^{-nrx} \cdot (n-1)(e^{rx} - 1)^{n-2} \cdot re^{rx} \\ &= re^{-nrx}(e^{rx} - 1)^{n-2} \{-n(e^{rx} - 1) + (n-1)e^{rx}\} \\ &= re^{-nrx}(e^{rx} - 1)^{n-2}(n - e^{rx}) \end{aligned}$$

$x > 0$ のとき, $f'_n(x) = 0$ とすると

$$n - e^{rx} = 0 \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{1}{r} \log n$$

したがって, $f_n(x)$ の増減表は

x	(0)	...	$\frac{1}{r} \log n$...
$f'_n(x)$		+	0	-
$f_n(x)$		↗	極大	↘

よって, $x = \frac{1}{r} \log n$ で極大値 $\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}$ をとる. ■

10 (1) A, B が赤球で一致する確率は $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

A, B が白球で一致する確率は $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

これらの事象は互いに排反であるから $\frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$

(2) A, B が取り出す球の色が一致する確率を p , 一致しない確率を q とすると

$$p = \frac{5}{9}, \quad q = 1 - p = \frac{4}{9}$$

よって $pqp + pqq + qpq + qqp = pq(p + 3q)$

$$= \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} \left(\frac{5}{9} + 3 \times \frac{4}{9} \right) = \frac{340}{729}$$

(3) 求める確率は

$$\begin{aligned} &ppqp + ppqq + qppq + pqpp + qqpp \\ &= 2p^3q + 3p^2q^2 = p^2q(2p + 3q) \\ &= \left(\frac{5}{9}\right)^2 \times \frac{4}{9} \times \left(2 \times \frac{5}{9} + 3 \times \frac{4}{9}\right) = \frac{2200}{6561} \end{aligned}$$
■

11 (1) $x \geq -1$ のとき $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$, $f'(x) = -x + 2$

l の方程式は ($t > -1$), $t \neq 2$ のとき $y - f(t) = -\frac{1}{f'(t)}(x - t)$

ゆえに $y - \left(-\frac{1}{2}t^2 + 2t + 3\right) = -\frac{1}{-t + 2}(x - t)$

よって $t \neq 2$ のとき $y = \frac{1}{t - 2}(x - t) - \frac{1}{2}t^2 + 2t + 3$

$t = 2$ のとき $x = 2$

(2) $f(-1) = \frac{1}{2}$ であるから, l が $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ を通るとき

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{t - 2}(-1 - t) - \frac{1}{2}t^2 + 2t + 3$$

整理すると $t^3 - 6t^2 + 5t + 12 = 0$ ゆえに $(t + 1)(t - 3)(t - 4) = 0$

これを満たす t の中で ($t > -1$), 最小の t の値は $t = 3$

(3) $t = 3$ を (1) の結果に代入すると $l: y = x + \frac{3}{2}$

$C: y = -\frac{1}{2}x^2 + 2|x + 1| + 1$ は

$$x \leq -1 \text{ のとき } y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$$

$$x \geq -1 \text{ のとき } y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$$

l と C の共有点の x 座標は

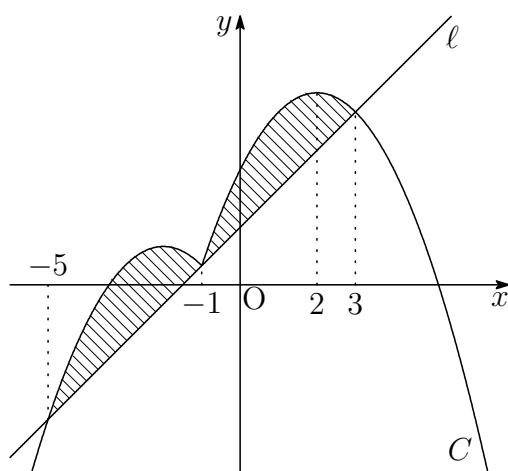
$x \leq -1$ のとき

$$-\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 = x + \frac{3}{2} \quad \text{これを解いて } x = -5, -1$$

$x \geq -1$ のとき

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 = x + \frac{3}{2} \quad \text{これを解いて } x = -1, 3$$

ℓ と C で囲まれた部分は、下の図の斜線部分である。



したがって、求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-5}^{-1} \left\{ \left(-\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 \right) - \left(x + \frac{3}{2} \right) \right\} dx \\
 &\quad + \int_{-1}^3 \left\{ \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 \right) - \left(x + \frac{3}{2} \right) \right\} dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{-5}^{-1} (x+5)(x+1) dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^3 (x+1)(x-3) dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \{-1 - (-5)\}^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \{3 - (-1)\}^3 = \frac{32}{3}
 \end{aligned}$$

