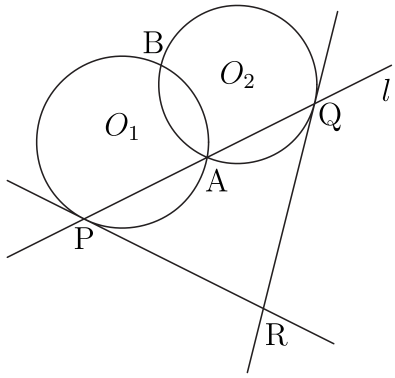
平成27年度　宮崎大学２次試験後期日程 (数学問題)
教育文化学部 (中学校数学)　平成27年3月12日

- 数I・II・III・A・B (120分)

1 右図において，2つの円O_1とO_2が異なる2点A，Bで交わっている．点Aを通り，円O_1，O_2と交わる直線lをひき，直線lと円O_1との交点のうち点Aと異なるものをP，直線lと円O_2との交点のうち点Aと異なるものをQとする．なお，点Aは線分PQ上にあるとする．さらに，点Pにおける円O_1の接線と点Qにおける円O_2の接線との交点をRとする．このとき，4点P，Q，R，Bは同一円周上にあることを示せ．



2 座標平面において，連立不等式

$$\begin{cases} \log_2(2y+x+10) \leqq \log_2(10-x)+\log_8(x+1)^3 \\ \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x}{6} \geqq 0 \end{cases}$$

を満たす点$(x,\ y)$の全体が表す図形をDとするとき，次の各問いに答えよ．

(1) 図形Dを図示せよ．

(2) 図形D上の点$(x,\ y)$に対し，$x-y$のとりうる値の範囲を求めよ．

3 AD//BCである台形ABCDにおいて，$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{BCD}=\dfrac{\pi}{3}$，$\mathrm{AD}=1$，$\mathrm{BC}=2$とする．辺ABの中点をM，辺BC上の点をPとし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$とする．$\overrightarrow{\mathrm{MC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DP}}$のとき，$\overrightarrow{\mathrm{DP}}$を，$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

4 1から6までの数字が1つずつ書かれた6枚のカードがある．この6枚のカードをよくきって横に1列に並べる．現れた数字が左からa_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6であったとき，

$$S=|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+|a_3-a_4|+|a_4-a_5|+|a_5-a_6|$$

とおく．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $S\geqq 5$であることを示し，$S=5$である確率を求めよ．

(2) $S=6$である確率を求めよ．

(3) $S=7$である確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 原点をOとする座標平面において，点$(1,\ 0)$をAとし，y軸上の動点$(0,\ b)$ $(-\sqrt{3} \leqq b \leqq 0)$をBとする．さらに，直線BA上に$\mathrm{BP}=2$となる点$\mathrm{P}(x,\ y)$ $(x \geqq 0)$をとる．$\angle\mathrm{BAO}=\theta$とするとき，次の各問に答えよ．

(1) xとyを，それぞれθを用いて表せ．

(2) yの最大値を求めよ．

(3) yをxの式で表せ．

(4) 点Pの軌跡とx軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

正解

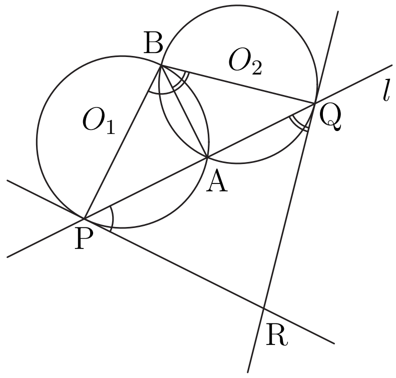
$\boxed{1}$ 接弦定理により

$$\angle\mathrm{PBA} = \angle\mathrm{QPR}, \quad \angle\mathrm{QBA} = \angle\mathrm{PQR}$$

したがって　$\angle\mathrm{PBQ} = \angle\mathrm{PBA} + \angle\mathrm{QBA}$
$= \angle\mathrm{QPR} + \angle\mathrm{PQR}$
$= 180^\circ - \angle\mathrm{PRQ}$

ゆえに　$\angle\mathrm{PBQ} + \angle\mathrm{PRQ} = 180^\circ$

よって，4 点 P，Q，R，B は同一円周上にある．



$\boxed{2}$ (1) 第 1 式から

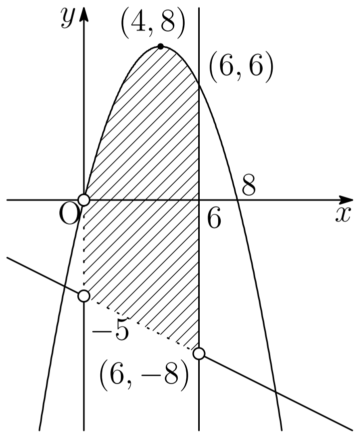
$$\log_2(2y + x + 10) \leqq \log_2(10 - x) + \log_2(x + 1) = \log_2(10 - x)(x + 1)$$

原不等式の真数が正であることに注意して

$$0 < 2y + x + 10 \leqq (10 - x)(x + 1),$$
$$10 - x > 0, \quad x + 1 > 0$$

また，第 2 式から　$0 < \dfrac{x}{6} \leqq 1$

すなわち　$\begin{cases} 0 < x \leqq 6 \\ y > -\dfrac{1}{2}x - 5 \\ y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2 + 4x \end{cases}$



よって，D の表す図形は，右の図の斜線部分．ただし，境界線の実線は含むが，点線および ◦ は含まない．

(2) $k = x - y$ とおくと，これは傾き 1 の直線を表す．(1) の結果から，求める範囲は，D の境界線 $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 4x$ $(0 < x \leqq 6)$ および点 $(6, -8)$ に注目すればよい．この境界線の接線で傾きが 1 となるのは，$y' = -x + 4$ より

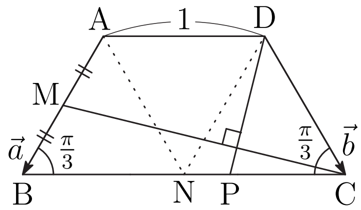
$$-x + 4 = 1 \quad \text{ゆえに，接点の座標は} \quad \left(3,\ \frac{15}{2}\right)$$

この接点を通る傾き 1 の直線は　$x - y = -\dfrac{9}{2}$

点 $(6, -8)$ を通る傾き 1 の直線は　$x - y = 14$

よって，求める値の範囲は　$\boldsymbol{-\dfrac{9}{2} \leqq x - y < 14}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ BC の中点を N とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DN}} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{DC}} = \overrightarrow{\mathrm{AN}} = \vec{b},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BN}} = \overrightarrow{\mathrm{NC}} = \vec{b} - \vec{a},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{BN}} = 2(\vec{b} - \vec{a})$$

ゆえに $\quad \overrightarrow{\mathrm{MC}} = \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \dfrac{1}{2}\vec{a} + 2(\vec{b} - \vec{a}) = \dfrac{1}{2}(-3\vec{a} + 4\vec{b})$

P は NC 上の点であるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{DP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{DN}} + t\overrightarrow{\mathrm{DC}} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

ここで $\quad |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{MC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{DP}}$ より

$$\{-3\vec{a} + 4\vec{b}\}\cdot\{(1-t)\vec{a} + t\vec{b}\} = 0$$
$$3(t-1)|\vec{a}|^2 + (4-7t)\vec{a}\cdot\vec{b} + 4t|\vec{b}|^2 = 0$$
$$3(t-1) + \frac{1}{2}(4-7t) + 4t = 0$$

これを解いて $\quad t = \dfrac{2}{7} \quad$ よって $\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{DP}} = \dfrac{5}{7}\vec{a} + \dfrac{2}{7}\vec{b}}$

$\boxed{4}$ (1) $a_i \neq a_{i+1}$ より，$|a_i - a_{i+1}| \geqq 1$ であるから $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$

$$S = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + |a_3 - a_4| + |a_4 - a_5| + |a_5 - a_6| \geqq 5$$

$S = 5$ であるのは，次の 2 通り

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1

6 枚のカードの並べ方の総数は　6! (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{2}{6!} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{360}}$

(2) $S = 6$ で，$1 \leqq a_1 \leqq 3$ であるものは，次の 2 通り．

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	2	3	4	6	5
2	1	3	4	5	6

上の表で，数字を逆に並べたものも $S = 6$ である．

よって，求める確率は　$\dfrac{2 \times 2}{6!} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{180}}$

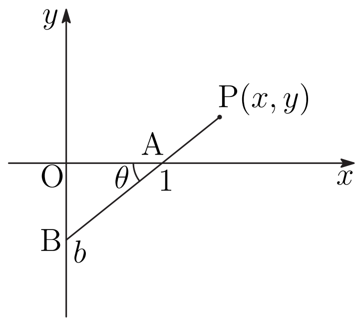
(3) $S = 7$ で，$1 \leqq a_1 \leqq 3$ であるものは，次の 8 通り．

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	2	3	6	5	4
3	2	1	4	5	6
1	2	3	5	4	6
1	2	3	5	6	4
1	2	4	3	5	6
1	3	2	4	5	6
2	1	3	4	6	5
3	1	2	4	5	6

上の表で，数字を逆に並べたものも $S = 7$ である．

よって，求める確率は　$\dfrac{2 \times 8}{6!} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{45}}$

5 (1) BP $= 2$ であるから，右の図より



$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (0, -\tan\theta),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = (2\cos\theta,\ 2\sin\theta),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}}$$
$$= (2\cos\theta,\ 2\sin\theta - \tan\theta)$$

よって　$\boldsymbol{x = 2\cos\theta,\ y = 2\sin\theta - \tan\theta}$

(2) $-\sqrt{3} \leqq b \leqq 0$ より　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$　ゆえに　$\dfrac{1}{2} \leqq \cos\theta \leqq 1$

$y = 2\sin\theta - \tan\theta$ を微分すると

$$\frac{dy}{d\theta} = 2\cos\theta - \frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{2\cos^3\theta - 1}{\cos^2\theta}$$

$\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} < 1$ より，$2\cos^3\theta - 1 = 0$ の解が 1 つ存在し，それを α とすると

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
y		↗	極大	↘	

上の増減表より，y は $\theta = \alpha$ で最大となる．$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ であるから

$$\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \sqrt[2]{4} - 1,$$
$$y = \sin\alpha\left(2 - \frac{1}{\cos\alpha}\right) = \sin\alpha\left(\frac{1}{\cos^3\alpha} - \frac{1}{\cos\alpha}\right)$$
$$= \tan^3\alpha = (\sqrt[3]{4} - 1)^{\frac{3}{2}}$$

よって，求める最大値は　$\boldsymbol{(\sqrt[3]{4} - 1)^{\frac{3}{2}}}$

(3) (1) の結果から　$1 \leqq x \leqq 2$,

$$\cos\theta = \frac{x}{2},\quad \sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

よって　$y = \sin\theta\left(2 - \dfrac{1}{\cos\theta}\right) = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4}}\left(2 - \dfrac{2}{x}\right)$

$$\boldsymbol{= \sqrt{4 - x^2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\quad (1 \leqq x \leqq 2)}$$

(4) $x = 2\cos\theta$ より，$\dfrac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta$

x	$1 \longrightarrow 2$
θ	$\frac{\pi}{3} \longrightarrow 0$

(1) の結果から，求める面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \int_1^2 y\,dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^0 (2\sin\theta - \tan\theta)(-2\sin\theta)d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(4\sin^2\theta - \frac{2\sin^2\theta}{\cos\theta}\right) d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{2(1-\cos 2\theta) + 2\cos\theta + \left(\frac{-\cos\theta}{1-\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)\right\} d\theta \\
&= \left[\ 2\theta - \sin 2\theta + 2\sin\theta + \log\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\ \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\log(2-\sqrt{3})}
\end{aligned}
$$

別解 $\mathrm{AP} = \mathrm{BP} - \mathrm{AB} = 2 - \dfrac{1}{\cos\theta}$ より

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{AP}^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(2 - \frac{1}{\cos\theta}\right)^2 d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(2 - \frac{2}{\cos\theta} + \frac{1}{2\cos^2\theta}\right) d\theta \\
&= \left[\ 2\theta + \log\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} + \frac{1}{2}\tan\theta\ \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\log(2-\sqrt{3})
\end{aligned}
$$