平成 27 年度　宮崎大学２次試験前期日程 (数学問題)
工 (物質環境化学を除く)・医 (医)・農・教育文化 (中学数学・中学社会・理科・技術・家庭・初等教育・特別支援・社会システム) 学部
平成 27 年 2 月 25 日

- 工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部は，$\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ 〜 $\boxed{7}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 教育文化 (中学数学) 学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{8}$ 〜 $\boxed{10}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 教育文化 (中学 [社会，理科，技術，家庭]，初等教育，特別支援，社会システム) 学部・農学部は，$\boxed{10}$ 〜 $\boxed{12}$ 数 I・II・A・B (90 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(1) 次の関数を微分せよ．

(a) $y = \sin(\cos x)$

(b) $y = \dfrac{e^{2x}}{x+1}$

(2) 次の定積分の値を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} |\,\sin x \cos x\,|\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3+2x^2-3}{x^2-1}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{1} \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \sqrt{\frac{3}{4-3x^2}} \right) dx$

(d) $\displaystyle\int_1^{2} x^3 \log x\,dx$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 平面上に 3 点 O，A，B があり，OA $=2$，OB $=3$，$\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{3}$ とする．点 A から直線 OB に垂線を下ろし，直線 OB との交点を H とする．また，点 B から直線 OA に垂線を下ろし，直線 OA との交点を I とする．直線 AH と直線 BI の交点を P とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，次の各問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) 線分 OP の長さを求めよ．

3 座標平面上に点Pがあり，次のルールにより，点Pは移動する．

a，b，cの文字がそれぞれ1つずつ書かれた球3個が入った袋から，1個取り出してそこに書かれている文字を読み，その文字が

aのとき，点Pはx軸の正の方向へ1だけ移動し，
bのとき，点Pはx軸の負の方向へ1だけ移動し，
cのとき，点Pはy軸の正の方向へ1だけ移動する．

最初，点Pは原点Oにあるものとする．この試行を，取り出した球を元に戻しながら，5回続けて行う．例えば，これによって得られた5個の文字が順に$b \to a \to c \to c \to a$であるとすれば，上のルールにより，点Pの位置の座標は，

$$(0,\ 0) \to (-1,\ 0) \to (0,\ 0) \to (0,\ 1) \to (0,\ 2) \to (1,\ 2)$$

と変化する．

このとき，次の各問に答えよ．

(1) y軸上で点Pの移動が終了する場合，終了したときの位置の座標をすべて求めよ．

(2) 点Pの移動が終了する位置の相異なる座標の個数を求めよ．

(3) 点Pの移動が終了する位置の座標$(x,\ y)$が$|\,x\,| \leqq 1$，$1 \leqq y \leqq 2$となる確率を求めよ．

4 $a \geqq 0$，$b \geqq 0$とする．このとき，変数xの関数

$$\begin{aligned} f(x) = \cos 2x \cos x + 2a \sin 2x - 2\cos 2x - 8a \sin x \\ -(b+1)\cos x + 2(b+1) \end{aligned}$$

について，次の各問に答えよ．

(1) $X = \sin x$，$Y = \cos x$とおくとき，

$$f(x) = (Y - \boxed{\text{ア}})(-\boxed{\text{イ}}X^2 + \boxed{\text{ウ}}X - b)$$

と表せる．ア，イ，ウに入る数，またはa，bを用いた文字式を求めよ．

(2) 方程式$f(x) = 0$が$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$の範囲内に少なくとも1つの解をもつようなすべての$a$，$b$を座標平面上の点$(a,\ b)$として図示せよ．

$\boxed{5}$ 数列 $\{a_n\}$ は

$$\sqrt[3]{3}\,{a_{n+2}}^3 = {a_n}^4, \quad a_n > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たしている．$a_1 = 1$，$a_2 = 2$ のとき，a_{2k-1}(k は自然数) を，k を用いて表せ．

$\boxed{6}$ $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$ を満たす θ について，$r(\theta) = \sqrt{2\cos 2\theta}$ とするとき，座標平面上で円 $x^2 + y^2 = \{r(\theta)\}^2$ と直線 $y = (\tan\theta)x$ は 2 つの交点をもつ．そのうち，x 座標が正であるものを P とし，P の x 座標を $f(\theta)$，y 座標を $g(\theta)$ とする．θ を $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$ の範囲で動かしたときの点 P の軌跡を C とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $f(\theta)$，$g(\theta)$ を求めよ．

(2) $g(\theta)$ の最大値を求めよ．

(3) 曲線 C と x 軸，直線 $x = f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

$\boxed{7}$ n を 2 以上の自然数とする．1 つの袋に 1 から n までの数を 1 つずつ書いた n 個の球と，数 0 を書いた 2 個の球が入っている．これら $(n+2)$ 個の球が入っている袋から，元に戻すことなく，1 個ずつ 3 回球を取り出し，その 3 個に書かれている数を取り出した順に a，b，c とする．事象 $a + b \leqq c$ の起こる確率を $P(n)$ とするとき，次の各問に答えよ．

(1) $P(3)$ を求めよ．

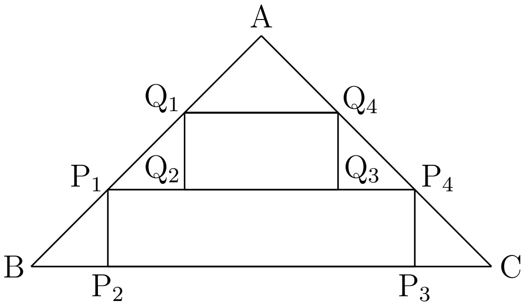
(2) n を偶数とするとき，$P(n)$ を，n を用いて表せ．

$\boxed{8}$ 四面体 OABC の 3 辺 OA，AB，BC 上に，それぞれ点 P，Q，R がある．OP = PA，AQ = 2QB とし，点 R は点 B とは異なるものとする．△PQR の重心を H とするとき，次の各問に答えよ．ただし，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を用いて表せ．

(2) △ABC の重心を G とする．3 点 O，G，H が同一直線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

9 右図の $\triangle$ABC は $\angle$A $= 90^\circ$ で AB $= 1$ の直角二等辺三角形である．この $\triangle$ABC の中に右図のように長方形 $\mathrm{P_1P_2P_3P_4}$ と長方形 $\mathrm{Q_1Q_2Q_3Q_4}$ をおき，頂点 $\mathrm{P_1}$ と $\mathrm{Q_1}$ が線分 AB 上に，頂点 $\mathrm{P_4}$ と $\mathrm{Q_4}$ が線分 AC 上にあるようにする．さらに，頂点 $\mathrm{P_2}$ と $\mathrm{P_3}$ がともに線分 BC 上に，頂点 $\mathrm{Q_2}$ と $\mathrm{Q_3}$ がともに線分 $\mathrm{P_1P_4}$ 上にあるようにする．$x = \mathrm{BP_2}$，$y = \mathrm{P_1Q_2}$ とするとき，次の各問に答えよ．



(1) 長方形 $\mathrm{P_1P_2P_3P_4}$ の面積と長方形 $\mathrm{Q_1Q_2Q_3Q_4}$ の面積の和を，x と y を用いて表せ．

(2) x の値を固定して y の値を変化させるとき，長方形 $\mathrm{P_1P_2P_3P_4}$ の面積と長方形 $\mathrm{Q_1Q_2Q_3Q_4}$ の面積の和の最大値を $S(x)$ とおく．このとき，$S(x)$ を，x を用いて表せ．

(3) x の値を変化させるとき，(2) で求めた $S(x)$ の最大値を求めよ．

10 初項 $a_1 = 0$ と漸化式

$$a_{n+1} = (1-r)r^{n-1} + r^2 a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

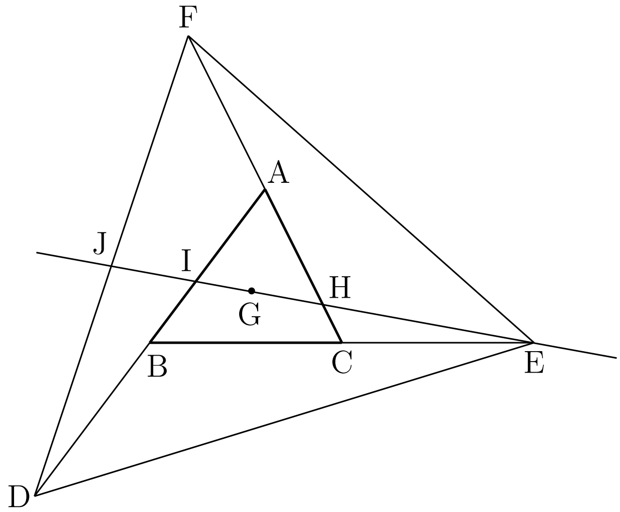
によって与えられる数列 $\{a_n\}$ について，次の各問に答えよ．ただし，$r \neq 0$，$r \neq 1$ とする．

(1) a_2，a_3，a_4 を，r を用いてそれぞれ表せ．

(2) 第 n 項 a_n を推測して，それが正しいことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を計算し，r，n を用いて表せ．

11 右図の△ABCにおいて，辺AB上の延長上にAB = BDとなる点Dがある．同様に，辺BCの延長上にBC = CEとなる点Eが，辺CAの延長上にCA = AFとなる点Fがそれぞれある．
△ABCの重心をGとし，直線GEと線分AC，AB，FDとの交点をそれぞれH，I，Jとする．このとき，次の比を求めよ．



(1) CH : HA

(2) BI : IA

(3) DJ : JF

12 曲線$C : y = |x^2 - 6x|$と直線$\ell : y = kx$ (kは実数) について，次の各問に答えよ．

(1) 曲線Cを座標平面上に図示せよ．

(2) 曲線Cと直線ℓが異なる3つの共有点をもつようなkの値の範囲を求めよ．

(3) (2) のとき，曲線Cと直線ℓで囲まれた2つの部分の面積の和が最小になるようなkの値を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) (a) $t=\cos x$ とおくと，$y=\sin t$ より $\dfrac{dy}{dt}=\cos t,\quad \dfrac{dt}{dx}=-\sin x$

よって $\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx}=\cos t\cdot(-\sin x)=\boldsymbol{-\cos(\cos x)\cdot\sin x}$

(b) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2e^{2x}(x+1)-e^{2x}\cdot 1}{(x+1)^2}=\boldsymbol{\dfrac{(2x+1)e^{2x}}{(x+1)^2}}$

(2) (a) $\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$

$\left|\dfrac{1}{2}\sin 2\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right|=\left|\dfrac{1}{2}\sin 2x\right|$ であるから，$\left|\dfrac{1}{2}\sin 2x\right|$ の周期は $\dfrac{\pi}{2}$

よって $\quad \displaystyle\int_0^{\pi}|\sin x\cos x|\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\mathbf{1}$

(b) $$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^3+2x^2-3}{x^2-1}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x+2+\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+2x+\log(x+1)\right]_0^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\frac{9}{8}+\log\frac{3}{2}}$$

(c) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ で $x=2\sin\theta$ とおくと

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow \frac{\pi}{6}$

$\dfrac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$

したがって $$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\Big[\,\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$$

$\displaystyle\int_0^1\sqrt{\frac{3}{4-3x^2}}\,dx$ で $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$ とおくと

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow \frac{\pi}{3}$

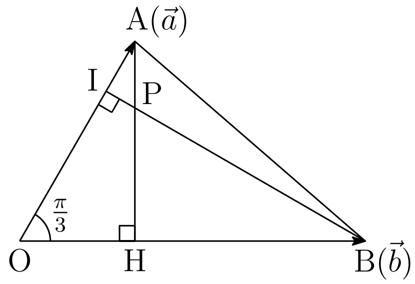
$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta$

したがって $$\int_0^1\sqrt{\frac{3}{4-3x^2}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\frac{3}{4-4\sin^2\theta}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\Big[\,\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}$$

よって $$\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\sqrt{\frac{3}{4-3x^2}}\right)dx=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

(d) $$\int_1^2 x^3\log x\,dx=\int_1^2\left(\frac{x^4}{4}\right)'\log x\,dx=\left[\frac{x^4}{4}\log x\right]_1^2-\int_1^2\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$=4\log 2-\left[\frac{x^4}{16}\right]_1^2=\boldsymbol{4\log 2-\frac{15}{16}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\mathrm{OH} = \mathrm{OA}\cos\dfrac{\pi}{3} = 2\cdot\dfrac{1}{2} = 1$



ゆえに $\quad \dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OB}} = \dfrac{1}{3}$

よって $\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{1}{3}\vec{b}}$

(2) (1) と同様にして $\quad \mathrm{OI} = \mathrm{OB}\cos\dfrac{\pi}{3} = 3\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

ゆえに $\quad \dfrac{\mathrm{OI}}{\mathrm{OA}} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$ $\qquad$ よって $\quad \overrightarrow{\mathrm{OI}} = \dfrac{3}{4}\vec{a}$

上式および (1) の結果から $\quad \vec{a} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OI}}$，$\vec{b} = 3\overrightarrow{\mathrm{OH}}$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\vec{a} + y\vec{b}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3y\overrightarrow{\mathrm{OH}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{4}{3}x\overrightarrow{\mathrm{OI}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

P は 2 直線 AH，IB 上の点であるから

$$x + 3y = 1, \quad \frac{4}{3}x + y = 1 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{1}{9}$$

よって $\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{2}{3}\vec{a} + \dfrac{1}{9}\vec{b}}$

(3) $|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = 3$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{3} = 2\cdot 3\cdot\dfrac{1}{2} = 3$ より，(2) の結果から

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 &= \left|\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b}\right|^2 \\ &= \frac{4}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{4}{27}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{1}{81}|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{21}{9}\end{aligned}$$

よって $\qquad \mathrm{OP} = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{21}}{3}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) a，b，c の文字が書かれた球を取り出した個数をそれぞれ k_a，k_b，k_c とすると，y 軸上で点Pの移動が終了する場合，$k_a = k_b$，$k_a + k_b + k_c = 5$ より

$k_a = k_b = 0$ のとき　　$k_c = 5$

$k_a = k_b = 1$ のとき　　$k_c = 3$

$k_a = k_b = 2$ のとき　　$k_c = 1$

よって，求める点Pの座標は　　$\mathbf{(0,\ 5),\ (0,\ 3),\ (0,\ 1)}$

(2) 点Pの移動が終了する位置の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x = k_a - k_b, \quad y = 5 - (k_a + k_b) \quad (0 \leqq k_a + k_b \leqq 5)$$

ここで，$j = k_a$，$k = k_a + k_b$ とおくと $(0 \leqq j \leqq k$，$0 \leqq k \leqq 5)$，
$k_b = k - j$ であるから

$$x = j - (k - j) = 2j - k, \quad y = 5 - k \quad \cdots (*)$$

直線 $y = 5 - k$ 上に，点 $(x,\ y)$ は，$0 \leqq j \leqq k$ の $k + 1$ 個.
よって，求める座標の個数は

$$\sum_{k=0}^{5}(k+1) = 1+2+3+4+5+6 = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7 = \mathbf{21}$$

(3) $1 \leqq y \leqq 2$ より，$k = 3,\ 4$ であるから

$$k = 3 \text{ のとき } x = 2j - 3, \qquad k = 4 \text{ のとき } x = 2j - 4$$

また，$|\,x\,| \leqq 1$ であるから　　$(k,\ j) = (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 2)$

$k_a = j$，$k_b = k - j$，$k_c = 5 - k$ であるから，上の $(k,\ j)$ に対して

$$(k_a,\ k_b,\ k_c) = (1,\ 2,\ 2),\ (2,\ 1,\ 2),\ (2,\ 2,\ 1)$$

これらの場合の数は　　$\dfrac{5!}{1!2!2!} \times 3 = 90$

よって，求める確率は　　$\dfrac{90}{3^5} = \mathbf{\dfrac{10}{27}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) a，$b+1$ に着目して整理すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos 2x(\cos x - 2) + 2a(\sin 2x - 4\sin x) - (b+1)(\cos x - 2) \\ &= \cos 2x(\cos x - 2) + 4a\sin x(\cos x - 2) - (b+1)(\cos x - 2) \\ &= (\cos x - 2)\{\cos 2x + 4a\sin x - (b+1)\} \\ &= (\cos x - 2)(-2\sin^2 x + 4a\sin x - b) \\ &= (Y-2)(-2X^2 + 4aX - b) \end{aligned}$$

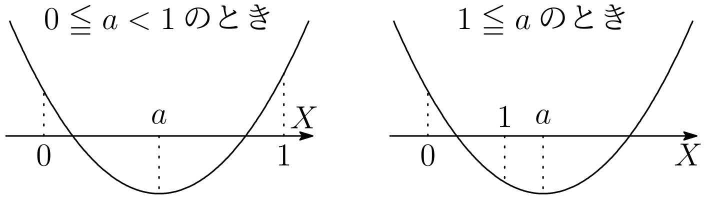
(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 \leqq X \leqq 1$，$0 \leqq Y \leqq 1$
$Y - 2 \neq 0$ であるから，$f(x) = 0$ を満たすとき

$$-2X^2 + 4aX - b = 0 \quad \text{すなわち} \quad 2X^2 - 4aX + b = 0$$

ここで，$G(X) = 2X^2 - 4aX + b$ とおくと

$$G(X) = 2(X-a)^2 - 2a^2 + b$$

方程式 $G(X) = 0$ が $0 \leqq X \leqq 1$ の範囲内に少なくとも 1 つの解をもてばよいから，$G(0) = b \geqq 0$ に注意して，次の場合に分けて考える．



(i) $0 \leqq a < 1$ のとき，$G(a) \leqq 0$ より

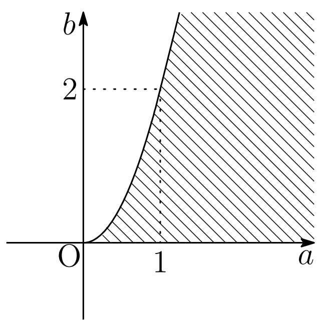
$$-2a^2 + b \leqq 0 \quad \text{すなわち} \quad b \leqq 2a^2$$

(ii) $1 \leqq a$ のとき，$G(1) \leqq 0$ より

$$2 - 4a + b \leqq 0 \quad \text{すなわち} \quad b \leqq 4a - 2$$

よって　$0 \leqq b \leqq 2a^2 \quad (0 \leqq a < 1)$
　　　　$0 \leqq b \leqq 4a - 2 \quad (1 \leqq a)$

点 $(a,\ b)$ の表す領域は，右の図の斜線部分で，境界線を含む．



$\boxed{\mathbf{5}}$ $a_n > 0$ であるから，$\sqrt[3]{3}{a_{n+2}}^3 = {a_n}^4$ の両辺を 3 を底とする対数をとると

$$\frac{1}{3} + 3\log_3 a_{n+2} = 4\log_3 a_n$$

$n = 2k-1$ (k は自然数) とおくと

$$\frac{1}{3} + 3\log_3 a_{2k+1} = 4\log_3 a_{2k-1}$$

さらに，$b_k = \log_3 a_{2k-1} \cdots$ ① とおくと (k は自然数)

$$b_1 = \log_3 a_1 = 0, \quad \frac{1}{3} + 3b_{k+1} = 4b_k$$

したがって　$b_{k+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}\left(b_k - \dfrac{1}{3}\right)$

数列 $\left\{b_k - \dfrac{1}{3}\right\}$ は，初項 $-\dfrac{1}{3}$，公比 $\dfrac{4}{3}$ の等比数列であるから

$$b_k - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1} \quad \text{ゆえに} \quad b_k = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}\right\}$$

① から　$\log_3 a_{2k-1} = \dfrac{1}{3}\left\{1 - \left(\dfrac{4}{3}\right)^{k-1}\right\}$　よって　$\boldsymbol{a_{2k-1} = 3^{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}\right\}}}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $f(\theta) = x = r(\theta)\cos\theta = \boldsymbol{\sqrt{2\cos 2\theta}\ \cos\theta}$

$g(\theta) = y = r(\theta)\sin\theta = \boldsymbol{\sqrt{2\cos 2\theta}\ \sin\theta}$

(2) (1) の結果から

$$\{g(\theta)\}^2 = 2\cos 2\theta\sin^2\theta = 2(1-2\sin^2\theta)\sin^2\theta$$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$ より，$t = \sin^2\theta$，$h(t) = \{g(\theta)\}^2$ とおくと

$$h(t) = 2(1-2t)t = -4\left(t-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{1}{4}\right)$$

したがって，$h(t)$ の最大値は　$h\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{4}$

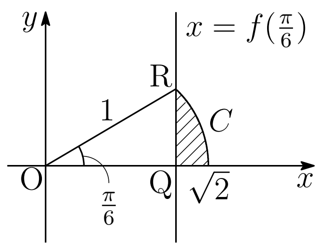
$g(\theta) \geqq 0$ であるから，$h(t)$ が最大のとき，$g(\theta)$ は最大となる．

よって，$g(\theta)$ の最大値は

$$t = \frac{1}{4} \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{6}\ \text{のとき，最大値}\ \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき　$r\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2\cos\dfrac{\pi}{3}} = 1$

右の図において



$$\mathrm{OR} = r\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\mathrm{OQ} = \mathrm{OR}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathrm{RQ} = \mathrm{OR}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

求める面積を S とすると，図の斜線部分であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \{r(\theta)\}^2\,d\theta - \triangle\mathrm{ORQ} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos 2\theta\,d\theta - \frac{1}{2}\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{RQ} \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ \sin 2\theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{8}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $n=3$ のとき，0, 0, 1, 2, 3 の数が書かれた 5 個の球を，数 0 が書かれた 2 個の球を 0_1, 0_2 と区別する．

0_1, 0_2, 1, 2, 3 の 5 つから 3 つとる a, b, c の順列の総数は

$$ {}_5\mathrm{P}_3 = 5\cdot4\cdot3 = 60 \text{ (通り)} $$

$a+b \leqq c$ となる $(a,\ b)$ の組は c の値により，次の場合に分けられる．

(i) $c=1$ のとき，0_1, 0_2 の 2 つを並べる順列の総数であるから

$$ 2! = 2\cdot1 = 2 \text{ (通り)} $$

(ii) $c=2$ のとき，0_1, 0_2, 1 の 3 つから 2 つとる順列の総数であるから

$$ {}_3\mathrm{P}_2 = 3\cdot2 = 6 \text{ (通り)} $$

(iii) $c=3$ のとき，0_1, 0_2, 1, 2 の 4 つから 2 つとる順列の総数であるから

$$ {}_4\mathrm{P}_2 = 4\cdot3 = 12 \text{ (通り)} $$

よって $\qquad P(3) = \dfrac{2+6+12}{60} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$

(2) (iv) $a+b=c \cdots ①$ を満たすのは $c \geqq 3$，$a \neq 0$，$b \neq 0$ のときである．
c が奇数のとき，① を満たす $(a,\ b)$ の組数は下に示した　$c-1$ (組)

$$ (a,\ b) = (1,\ c-1),\ (2,\ c-2), \cdots, (c-1,\ 1) $$

c が偶数のとき，$a \neq b$ により，① を満たす $(a,\ b)$ の組数は　$c-2$ (組)

したがって，① を満たす $(a,\ b)$ の組数は

$$ c-1-\frac{1+(-1)^c}{2} = c-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(-1)^{c-1} \quad (c \geqq 3) $$

(v) a，b の少なくとも 1 つが 0 で $a+b \leqq c$ $(c \geqq 3)$ を満たす $(a,\ b)$ の組数は，0_1, 0_2, 1, 2, $\cdots$, $c-1$ の $c+1$ 個から 2 個とる順列の総数から 1, 2, $\cdots$, $c-1$ の $c-1$ 個から 2 個とる順列の総数を引いたものであるから

$$ {}_{c+1}\mathrm{P}_2 - {}_{c-1}\mathrm{P}_2 = (c+1)c-(c-1)(c-2) = 4c-2 $$

$a+b \leqq c \cdots$ ② を満たす c の値は　$c \geqq 1$

c の値に対して ② を満たす $(a,\ b)$ の組の総数を $f(c)$ とする．

$c \geqq 3$ のとき，(iv)，(v) から

$$\begin{aligned} f(c) &= \sum_{k=3}^{c}\left\{k-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(-1)^{k-1}\right\}+4c-2 \\ &= \frac{1}{2}(c-2)(3+c)-\frac{3}{2}(c-2)+\frac{1}{2}\times\frac{1-(-1)^{c-2}}{1-(-1)}+4c-2 \\ &= \frac{1}{2}c^2+3c-\frac{7}{4}+\frac{1}{4}(-1)^{c-1} \qquad \cdots(*) \end{aligned}$$

(i)，(ii) から　　$f(1)=2,\quad f(2)=6$

上の結果から，$c=1,\ 2$ のときも $(*)$ は成立するから

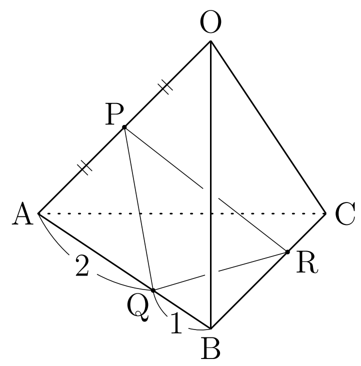
$$\begin{aligned} \sum_{c=1}^{n} f(c) &= \sum_{c=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}c^2+3c-\frac{7}{4}+\frac{1}{4}(-1)^{c-1}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{7}{4}n+\frac{1}{4}\cdot\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} \\ &= \frac{1}{12}n(2n^2+21n-2)+\frac{1}{8}\{1-(-1)^n\} \end{aligned}$$

n が偶数のとき　　$\displaystyle\sum_{c=1}^{n} f(c)=\frac{1}{12}n(2n^2+21n-2)$

よって

$$\begin{aligned} P(n) &= \frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{P}_3}\sum_{c=1}^{n} f(c) \\ &= \frac{1}{(n+2)(n+1)n}\times\frac{1}{12}n(2n^2+21n-2) \\ &= \boldsymbol{\frac{2n^2+21n-2}{12(n+1)(n+2)}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) 条件から，P は線分 OA の中点，Q は線分 AB を 2 : 1 に内分する点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$$

よって，△PQR の重心 H の位置ベクトルは

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{5}{18}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OR}}}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から $\quad \overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{5}{18}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OR}}$

O，G，H は同一直線上にあるから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{5}{18}k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{9}k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{\mathrm{OR}}\quad\cdots①$$

G は平面 ABR 上の点であるから

$$\frac{5}{18}k+\frac{2}{9}k+\frac{1}{3}k=1\quad すなわち\quad k=\frac{6}{5}$$

これを ① に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{15}\vec{b}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

また，G は △ABC の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

上の 2 式から $\quad \frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{15}\vec{b}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

よって $\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{5}{6}\vec{c}}$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $\mathrm{Q_1Q_2} = 2z$ とし，求める面積を S とすると

$$S = \triangle\mathrm{ABC} - x^2 - y^2 - z^2 \quad \cdots ①$$

$2x + 2y + 2z = \mathrm{BC} = \sqrt{2}$ であるから

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} - (x+y) \quad \cdots ②$$

② を ① に代入すると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} - x^2 - y^2 - \left\{\frac{1}{\sqrt{2}} - (x+y)\right\}^2 \\ &= \frac{1}{2} - x^2 - y^2 - \left\{\frac{1}{2} - \sqrt{2}(x+y) + (x+y)^2\right\} \\ &= \boldsymbol{-2x^2 - 2xy - 2y^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} S &= -2y^2 + (\sqrt{2} - 2x)y - 2x^2 + \sqrt{2}x \\ &= -2\left(y^2 - \frac{\sqrt{2}-2x}{2}y\right) - 2x^2 + \sqrt{2}x \\ &= -2\left(y - \frac{\sqrt{2}-2x}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{2}-2x}{4}\right)^2 - 2x^2 + \sqrt{2}x \\ &= -2\left(y - \frac{\sqrt{2}-2x}{4}\right)^2 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$y = \dfrac{\sqrt{2}-2x}{4}$ のとき，S は最大値 $-\dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{1}{4}$ をとる．

よって $\qquad \boldsymbol{S(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{1}{4}}$

(3) (2) の結果から $\quad S(x) = -\dfrac{3}{2}\left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 + \dfrac{1}{3} \quad \left(0 < x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

よって，$S(x)$ は，$x = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$ をとる．

補足 (1) の結果は，x，y の対称式であるから，S が最大値をとるとき $\quad x = y$

このとき $\qquad S = -6x^2 + 2\sqrt{2}x = -6\left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 + \dfrac{1}{3}$

よって，S は $x = y = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{3}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{10}}$ (1) $a_1=0$，$a_{n+1}=(1-r)r^{n-1}+r^2a_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$

上の漸化式に順次，$n=1,\ 2,\ 3$ を代入すると

$$a_2=(1-r)1+r^2a_1=1-r+r^2\cdot 0=\boldsymbol{1-r}$$
$$a_3=(1-r)r+r^2a_2=r-r^2+r^2(1-r)=\boldsymbol{r-r^3}$$
$$a_4=(1-r)r^2+r^2a_3=r^2-r^3+r^2(r-r^3)=\boldsymbol{r^2-r^5}$$

(2) (1) の結果から，第 n 項 a_n を

$$a_n=r^{n-2}-r^{2n-3} \quad \cdots(*)$$

と推測する.

［1］ $n=1$ のとき，$a_1=r^{-1}-r^{-1}=0$ であり，$(*)$ が成り立つ.

［2］ $n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つ，すなわち

$$a_k=r^{k-2}-r^{2k-3}$$

であると仮定すると

$$a_{k+1}=(1-r)r^{k-1}+r^2(r^{k-2}-r^{2k-3})=r^{k-1}-r^{2k-1}$$

となり，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ.

［1］，［2］から，すべての自然数 n について，$(*)$ が成り立つ.

(3) (2) の結果から $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{n}\{r^{k-1}-(r^2)^{k-1}\}$

(i) $r\neq -1$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k&=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{n}\{r^{k-1}-(r^2)^{k-1}\}\\&=\frac{1}{r}\left(\frac{r^n-1}{r-1}-\frac{r^{2n}-1}{r^2-1}\right)=\frac{1}{r}\left\{\frac{r^n-1}{r-1}-\frac{(r^n+1)(r^n-1)}{(r+1)(r-1)}\right\}\\&=\frac{r^n-1}{r(r+1)(r-1)}\{(r+1)-(r^n+1)\}=\boldsymbol{-\frac{(r^n-1)(r^{n-1}-1)}{(r+1)(r-1)}}\end{aligned}$$

(ii) $r=-1$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k&=-\sum_{k=1}^{n}\{(-1)^{k-1}-1\}\\&=-\left\{\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}-n\right\}=\boldsymbol{\frac{(-1)^n-1}{2}+n}\end{aligned}$$

補足 与えられた漸化式から

$$a_{n+1} - r^2 a_n = (1-r)r^{n-1}$$
$$\frac{a_{n+1}}{r^{2n+2}} - \frac{a_n}{r^{2n}} = \frac{1-r}{r^4}\left(r^{-1}\right)^{n-1}$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{a_{k+1}}{r^{2k+2}} - \frac{a_k}{r^{2k}}\right) = \frac{1-r}{r^4}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}$$
$$\frac{a_n}{r^{2n}} = \frac{1-r}{r^4} \times \frac{1-(r^{-1})^{n-1}}{1-r^{-1}} = -\frac{1-r^{-n+1}}{r^3}$$

よって　　$a_n = r^{n-2} - r^{2n-3}$

$a_1 = 0$ であるから，上式は $n=1$ のときも成り立つ．

したがって，一般項 a_n は　　$a_n = r^{n-2} - r^{2n-3}$

$\boxed{\mathbf{11}}$ (1) B，C の中点を M とし，直線 GE を ℓ とする．

△AMC と ℓ について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{GM}}\cdot\frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{HA}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{HA}}=1$$

したがって $\dfrac{\mathrm{CH}}{\mathrm{HA}}=\dfrac{1}{3}$ 　よって　$\mathbf{CH : HA = 1 : 3}$

(2) △ABC と ℓ について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{HA}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IB}}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$$

したがって $\dfrac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IB}}=\dfrac{3}{2}$ 　よって　$\mathbf{BI : IA = 2 : 3}$

(3) (1),(2) の結果から

$$\mathrm{AI} : \mathrm{ID} = 3 : 2+5 = 3 : 7, \quad \mathrm{FH} : \mathrm{HA} = 4+3 : 3 = 7 : 3$$

△ADF と ℓ について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{ID}}\cdot\frac{\mathrm{DJ}}{\mathrm{JF}}\cdot\frac{\mathrm{FH}}{\mathrm{HA}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3}{7}\cdot\frac{\mathrm{DJ}}{\mathrm{JF}}\cdot\frac{7}{3}=1$$

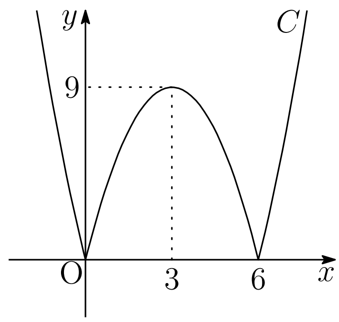
したがって $\dfrac{\mathrm{DJ}}{\mathrm{JF}}=1$ 　よって　$\mathbf{DJ : JF = 1 : 1}$

12 (1) $|x^2-6x| = \begin{cases} (x-3)^2-9 & (x \leqq 0,\ 6 \leqq x) \\ -(x-3)^2+9 & (0 \leqq x \leqq 6) \end{cases}$

したがって

$$C : y = |x^2-6x|$$

のグラフは，右の図のようになる．



(2) $y=-x^2+6x$ を微分すると　$y'=-2x+6$

$y=-x^2+6x$ の $x=0$ における接線の傾きは　　$y'=6$

(1) のグラフから，C と ℓ が異なる 3 つの共有点をもつ k の値の範囲は

$$\boldsymbol{0<k<6}$$

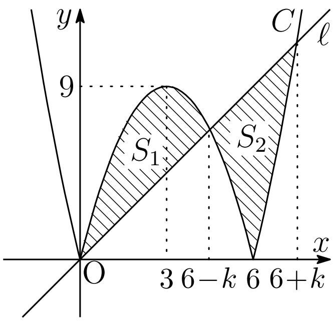
(3) C と ℓ の共有点の x 座標は

$x \leqq 0,\ 6 \leqq x$ のとき，

$$x^2-6x=kx \quad よって \quad x=0,\ 6+k$$

$0 \leqq x \leqq 6$ のとき，

$$-x^2+6x=kx \quad よって \quad x=0,\ 6-k$$



$0 \leqq x \leqq 6-k$ の範囲で C と ℓ で囲まれた部分の面積を S_1 とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{6-k} \{-x^2+6x-kx\}\,dx \\ &= -\int_0^{6-k} x(x-6+k)\,dx = \frac{1}{6}(6-k)^3 \end{aligned}$$

$f(x)=x(x-6)$ とし，この原始関数を $F(x)$ とする．

$6-k \leqq x \leqq 6+k$ の範囲で C と ℓ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{6-k}^{6+k} \{kx-|f(x)|\}\,dx \\ &= \left[\ \frac{1}{2}kx^2\ \right]_{6-k}^{6+k} + \int_{6-k}^{6} f(x)\,dx - \int_{6}^{6+k} f(x)\,dx \\ &= 12k^2 - F(6-k) - F(6+k) + 2F(6) \end{aligned}$$

C と ℓ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を $S(k)$ とすると，
$S(k) = S_1 + S_2$ より

$$S(k) = \frac{1}{6}(6-k)^3 + 12k^2 - F(6-k) - F(6+k) + 2F(6)$$

これを k について微分すると

$$\begin{aligned} S'(k) &= -\frac{1}{2}(6-k)^2 + 24k + f(6-k) - f(6+k) \\ &= -\frac{1}{2}(6-k)^2 + 24k + (k^2 - 6k) - (k^2 + 6k) \\ &= -\frac{1}{2}(k^2 - 36k + 36) \end{aligned}$$

$S'(k) = 0$ とすると　　$k = 6(3 \pm 2\sqrt{2}\,)$

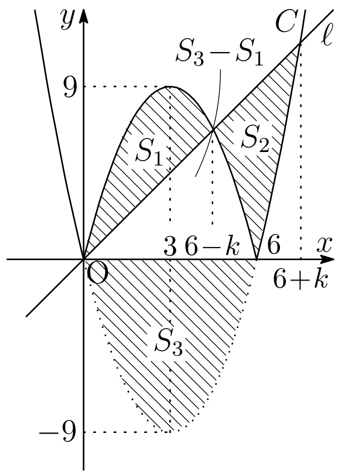
ここで　　$0 < 6(3 - 2\sqrt{2}\,) = \dfrac{6}{3 + 2\sqrt{2}} < 6 < 6(3 + 2\sqrt{2}\,)$

したがって，$0 \leqq k \leqq 6$ における $S(k)$ の増減表は，次のようになる．

k	0	$\cdots$	$6(3-2\sqrt{2}\,)$	$\cdots$	6
$S'(k)$		$-$	0	$+$	
$S(k)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，求める k の値は　　$\boldsymbol{k = 6(3 - 2\sqrt{2}\,)}$

補足 右の図から



$$S_3+(S_3-S_1)+S_2=\frac{1}{6}(6+k)^3$$

したがって

$$S(k)=S_1+S_2=\frac{1}{6}(6+k)^3+2S_1-2S_3$$

このとき

$$S_1=\frac{1}{6}(6-k)^3, \qquad S_3=\frac{1}{6}\cdot 6^3=36$$

よって
$$\begin{aligned}S(k)&=\frac{1}{6}(6+k)^3+2\times\frac{1}{6}(6-k)^3-2\times 36\\&=\frac{1}{6}(6+k)^3+\frac{1}{3}(6-k)^3-72\end{aligned}$$

これを微分すると
$$\begin{aligned}S'(k)&=\frac{1}{2}(6+k)^2-(6-k)^2\\&=-\frac{1}{2}(k^2-36k+36)\end{aligned}$$