平成 26 年度　宮崎大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
工 (物質環境化学を除く)・医 (医)・農・教育文化 (中学数学・中学社会・理科・技術・家庭・初等教育・特別支援・社会システム) 学部
平成 26 年 2 月 25 日

- 工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ 数 II・III・A・B (120 分)
- 医学部は，$\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{6}$ ～ $\boxed{8}$ 数 II・III・A・B (120 分)
- 教育文化 (中学数学) 学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{9}$ ～ $\boxed{11}$ 数 II・III・A・B (120 分)
- 教育文化 (中学 [社会，理科，技術，家庭]，初等教育，特別支援，社会システム) 学部・農学部は，$\boxed{9}$, $\boxed{10}$, $\boxed{12}$ 数 II・A・B (90 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ．ただし，e は自然対数の底を表す.

(1) 次の関数を微分せよ.

(a) $y = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$

(b) $y = (x+2)\sqrt{x^2 + 2x + 5}$

(2) 次の定積分の値を求めよ.

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x)\sin(5x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 3x + 2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_1^2 x^5 e^{x^3}\,dx$

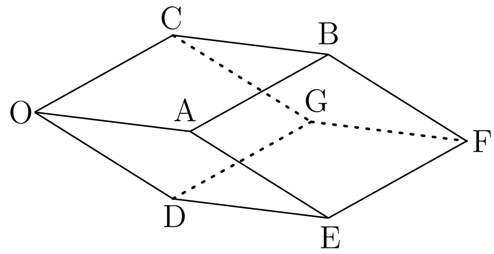
$\boxed{\mathbf{2}}$ 曲線 $C_1 : y = \cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上の点 $(t,\ \cos t)$ $\left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ における曲線 C_1 の接線を ℓ とする．また，2 直線 $x = 0$，$x = \dfrac{\pi}{2}$ と接線 ℓ との交点をそれぞれ A，B とし，放物線 $C_2 : y = -\dfrac{x^2}{2} + ax + c$ が 2 点 A，B を通るものとする．このとき，次の各問に答えよ.

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ.

(2) 2 曲線 C_1，C_2 と 2 直線 $x = 0$，$x = \dfrac{\pi}{2}$ で囲まれる部分の面積を S とする．S を，a と c を用いて表せ.

(3) (2) の S が最小となる t の値を求めよ.

3 右図の平行六面体において，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とし，△ACD と線分 OF の交点を H とする．さらに，四面体 OACD が 1 辺の長さ 1 の正四面体であるとする．このとき，次の各問に答えよ．



(1) △ACD の重心が点 H に一致することを示し，2 つの線分 OH と HF の比 OH : HF を求めよ．

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{HE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HF}}$ の値を求めよ．

(3) △HEF の面積を求めよ．

4 t を定数とする 2 次方程式 $z^2 - tz + t - \dfrac{1}{2} = 0$ について，次の各問に答えよ．ただし，定数 t は実数とする．

(1) この 2 次方程式が実数解をもち，すべての解が -1 以上 1 以下であるような定数 t の値の範囲を求めよ．

(2) この 2 次方程式が 2 つの共役な虚数解 $z = x \pm yi$ (x，y は実数，i は虚数単位) をもち，$x^2 + y^2 \leqq 1$ を満たすような定数 t の値の範囲を求めよ．

5 不等式

$$\log_x y < 2 + 3\log_y x$$

の表す領域を座標平面上に図示せよ．

6 $a > 0$，$a \neq 1$，$b > 0$ とする．このとき，変数 x の関数

$$f(x) = 4x^2 + 4x\log_a b + 1$$

について，次の各問に答えよ．

(1) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が重解を持つようなすべての a，b を，座標平面上の点 $(a,\ b)$ として図示せよ．

(2) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が $0 < x < \dfrac{1}{2}$ の範囲内にただ 1 つの解を持つようなすべての a，b を，座標平面上の点 $(a,\ b)$ として図示せよ．

(3) 放物線 $y = f(x)$ の頂点の座標を $(X,\ Y)$ とする．点 $(a,\ b)$ が (2) の条件を満たしながら動くとき，点 $(X,\ Y)$ の軌跡を座標平面上に図示せよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が，$a_1 = 1$，$b_1 = 1$ および

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 6b_n & (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

で定められているとき，次の各問に答えよ．

(1) $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たす定数 α，β の組を 2 組求めよ．

(2) a_n を，n を用いて表せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ 白球 6 個と黒球 4 個がある．

はじめに，白球 6 個を横 1 列に並べる．次に，

　1 から 6 の目がそれぞれ $\dfrac{1}{6}$ の確率で出るサイコロを 1 つ投げて，出た目の数が a であれば，並んでいる球の左から a 番目の球の左に黒球を 1 個入れる

という操作を 4 回繰り返す．

　例えば，

1 回目に 1 の目
2 回目に 5 の目
3 回目に 5 の目
4 回目に 2 の目

が出た場合の球の並びの変化は次の図のようになる．

はじめ	○○○○○○
1 回目の操作の後	●○○○○○○
2 回目の操作の後	●○○○●○○○
3 回目の操作の後	●○○○●●○○○
4 回目の操作の後	●●○○○●●○○○

　最終的な 10 個の球の並びにおいて，一番左にある白球よりも左にある黒球の個数を k とするとき，次の各問に答えよ．

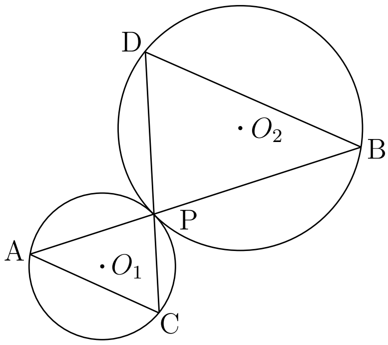
(1) $k = 0$ である確率を求めよ．

(2) $k = 1$ である確率を求めよ．

(3) k の期待値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ 次の問に答えよ．

(1) 右図のように半径 r_1 の円 O_1 と半径 r_2 の円 O_2 が外接している．円 O_1 と円 O_2 の接点を P とする．円 O_1 の周上に点 P と異なる点 A をとり，線分 AP の延長と円 O_2 の交点を B とする．また，円 O_1 の周上に点 P，点 A と異なる点 C をとり，線分 CP の延長と円 O_2 の交点を D とする．

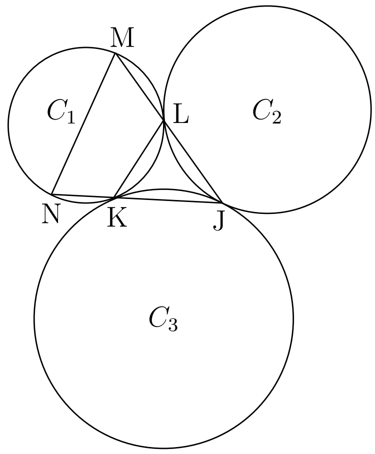


このとき，次の (a)，(b) に答えよ．

(a) 点 P における円 O_1 の接線を利用して，AC//BD であることを示せ．

(b) 円 O_1 の中心と円 O_2 の中心を結ぶ直線を利用して，点 P は線分 AB を $r_1 : r_2$ に内分することを示せ．

(2) 右図のように半径 3 の円 C_1，半径 4 の円 C_2，半径 5 の円 C_3 が互いに外接している．円 C_2 と円 C_3 の接点を J，円 C_3 と円 C_1 の接点を K，円 C_1 と円 C_2 の接点を L とする．線分 JL の延長と円 C_1 の交点を M とし，線分 JK の延長と円 C_1 の交点を N とする．



このとき，四角形 KLMN の面積は △JLK の面積の何倍であるかを求めよ．

$\boxed{\mathbf{10}}$ A，B，C の 3 人がそれぞれある地域の東公園，西公園および北公園のいずれかに行こうとしている．この 3 人は次のように，硬貨の表裏によって，どの公園に行くのかを決める．

・A は手持ちの硬貨を 1 枚投げて，表が出たら東公園に行く．裏が出たら西公園に行く．

・B は手持ちの硬貨を 1 枚投げて，表が出たら西公園に行く．裏が出たら，もう 1 度その硬貨を投げて，表が出たら東公園に行き，裏が出たら北公園に行く．

・C は手持ちの硬貨を 1 枚投げて，表が出たら北公園に行く．裏が出たら，もう 1 度その硬貨を投げて，表が出たら東公園に行き，裏が出たら西公園に行く．

ただし，3 人が使用する硬貨は，表，裏がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で出るものとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) A と B が同じ公園に行く確率を求めよ．ただし，C はどの公園に行ってもよいものとする．

(2) B と C が同じ公園に行く確率を求めよ．ただし，A はどの公園に行ってもよいものとする．

(3) 3 人が同じ公園に行く確率を求めよ．

(4) 少なくとも 2 人が同じ公園に行く確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{11}}$ 座標平面上において，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という．n を自然数とし，放物線 $y = x^2$，直線 $x = n$ および x 軸で囲まれた図形を S_n とする．S_n の境界上にある格子点の個数を a_n とし，S_n の境界を除いた内部にある格子点の個数を b_n とするとき，次の各問に答えよ．

(1) a_n を，n を用いて表せ．

(2) b_n を，n を用いて表せ．

(3) S_n の面積を c_n とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{a_n}{2} + b_n - c_n\right)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{12}}$ 放物線 $C : y = x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ $(t > 0)$ における C の接線を ℓ とする．直線 $x = -1$，放物線 C および接線 ℓ で囲まれる図形の面積を S_1，直線 $x = 5t$，放物線 C および接線 ℓ で囲まれる図形の面積を S_2 とし，$R = S_2 - S_1$ とおく．このとき，次の各問に答えよ．

(1) R の値を，t を用いて表せ．

(2) R の最小値を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) (a) $y' = \dfrac{(\cos x)'(1-\sin x) - \cos x(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2}$

$$= \frac{-\sin x(1-\sin x) - \cos x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} = \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2} = \boldsymbol{\frac{1}{1-\sin x}}$$

(b) $y' = (x+2)'\sqrt{x^2+2x+5} + (x+2)(\sqrt{x^2+2x+5}\,)'$

$$= \sqrt{x^2+2x+5} + (x+2) \times \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$$

$$= \frac{(x^2+2x+5)+(x+2)(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \boldsymbol{\frac{2x^2+5x+7}{\sqrt{x^2+2x+5}}}$$

(2) (a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\,dx = \int_1^2 \frac{(e^x-e^{-x})'}{e^x-e^{-x}}\,dx = \Big[\ \log\big|e^x-e^{-x}\big|\ \Big]_1^2$

$$= \log\left|\frac{e^2-e^{-2}}{e-e^{-1}}\right| = \log\left|\frac{(e+e^{-1})(e-e^{-1})}{e-e^{-1}}\right|$$

$$= \boldsymbol{\log\left(e+\frac{1}{e}\right)}$$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x)\sin(5x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2x - \cos 8x)\,dx$

$$= \frac{1}{2}\Big[\ \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 8x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{32}}$$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+3x^2}{x^2+3x+2}\,dx = \int_0^1\left(x+\frac{2}{x+1}-\frac{4}{x+2}\right)dx$

$$= \Big[\ \frac{x^2}{2} + 2\log|x+1| - 4\log|x+2|\ \Big]_0^1$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2} + \log\frac{64}{81}}$$

(d) $t = x^3$ とおくと $\quad \dfrac{dt}{dx} = 3x^2$

x と t の対応は右のようになる.

x	$1 \to 2$
t	$1 \to 8$

したがって $\displaystyle\int_1^2 x^5 e^{x^3}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{3}x^3 e^{x^3}\cdot 3x^2 dx$

$$= \int_1^8 \frac{1}{3}te^t\,dx = \Big[\ \frac{1}{3}(t-1)e^t\ \Big]_1^8 = \boldsymbol{\frac{7}{3}e^8}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y = \cos x$ を微分すると　$y' = -\sin x$

C_1 上の点 $(t,\ \cos t)$ における接線 ℓ の方程式は

$$y - \cos t = -\sin t \cdot (x - t) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -x \sin t + t \sin t + \cos t}$$

(2) $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，C_1，C_2 はともに上に凸である．また

$$-\frac{x^2}{2} + ax + c \geqq -x \sin t + t \sin t + \cos t \geqq \cos x$$

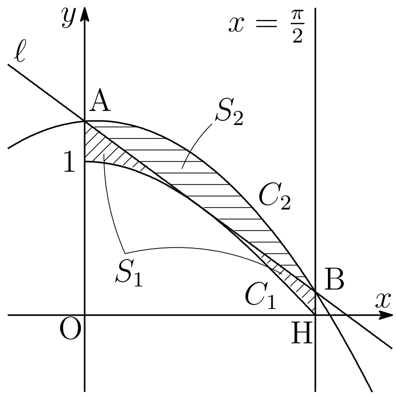
したがって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left(-\frac{x^2}{2} + ax + c \right) - \cos x \right\} dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{ax^2}{2} + cx - \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{-\frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi^2 a}{8} + \frac{\pi c}{2} - 1} \end{aligned}$$

(3) 直線 ℓ の方程式に $x = 0,\ \dfrac{\pi}{2}$ に代入して

$\mathrm{A}(0,\ t \sin t + \cos t)$，

$\mathrm{B}\left(\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2} \sin t + t \sin t + \cos t \right)$



B から x 軸に垂線 BH を引く．$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，ℓ と C_1，ℓ と C_2 で囲まれた部分の面積を，それぞれ S_1，S_2 とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \text{台形 OABH} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left\{ \left(-\frac{\pi}{2} \sin t + t \sin t + \cos t \right) + (t \sin t + \cos t) \right\} - \Big[\sin x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \left(-\frac{\pi}{4} \sin t + t \sin t + \cos t \right) - 1 \end{aligned}$$

S_2 は，C_2 の 2 次の係数に注意して　　$S_2 = \dfrac{1}{6} \left| -\dfrac{1}{2} \right| \left(\dfrac{\pi}{2} - 0 \right)^3 = \dfrac{\pi^3}{96}$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi}{2} \left(-\frac{\pi}{4} \sin t + t \sin t + \cos t \right) - 1 + \frac{\pi^3}{96}$$

したがって　$\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{\pi}{2} \left(t - \dfrac{\pi}{4} \right) \cos t$

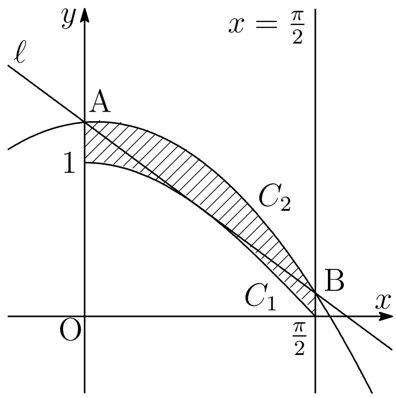
S の増減表は，右のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$(\frac{\pi}{2})$
$\frac{dS}{dt}$		$-$	0	$+$	
S		↘	極小	↗	

よって，S は $\boldsymbol{t = \dfrac{\pi}{4}}$ で最小となる．

別解 直線 ℓ の方程式に $x=0,\ \dfrac{\pi}{2}$ に代入して

$$\mathrm{A}(0,\ t\sin t+\cos t),$$
$$\mathrm{B}\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\sin t+t\sin t+\cos t\right)$$



$y=-\dfrac{x^2}{2}+ax+c$ が 2 点 A，B を通るから

$$c=t\sin t+\cos t$$
$$-\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}a+c=-\frac{\pi}{2}\sin t+t\sin t+\cos t$$

上の 2 式から c を消去すると

$$-\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}a=-\frac{\pi}{2}\sin t \quad \text{ゆえに} \quad a=\frac{\pi}{4}-\sin t$$

(2) の結果で得た $S=-\dfrac{\pi^3}{48}+\dfrac{\pi^2}{8}a+\dfrac{\pi}{2}c-1$ を t で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt}&=\frac{\pi^2}{8}\cdot\frac{da}{dt}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{dc}{dt}\\&=\frac{\pi^2}{8}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{4}-\sin t\right)+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{d}{dt}(t\sin t+\cos t)\\&=\frac{\pi^2}{8}(-\cos t)+\frac{\pi}{2}t\cos t\\&=\frac{\pi}{2}\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\cos t\end{aligned}$$

(以下，同様)

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1)
$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}$$

△ACD と線分 OF の交点 H は，実数 k を用いて
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\overrightarrow{\mathrm{OF}}=k(\vec{a}+\vec{c}+\vec{d})$$
$$=k\vec{a}+k\vec{c}+k\vec{d}$$

このとき，H は平面 ACD 上にあるから
$$k+k+k=1 \quad ゆえに \quad k=\frac{1}{3}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{c}+\vec{d})$　　よって，H は △ACD の重心である.

また，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ より　**OH : HF = 1 : 2**

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{a}+\vec{d}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{HE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(\vec{a}+\vec{d})-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{c}+\vec{d})$
$$=\frac{1}{3}(2\vec{a}-\vec{c}+2\vec{d})$$

(1) の結果より　　$\overrightarrow{\mathrm{HF}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{c}+\vec{d})$

ここで　$|\vec{a}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\frac{1}{2}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{HE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HF}}=\left\{\frac{1}{3}(2\vec{a}-\vec{c}+2\vec{d})\right\}\cdot\left\{\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{c}+\vec{d})\right\}$
$$=\frac{2}{9}(2|\vec{a}|^2-|\vec{c}|^2+2|\vec{d}|^2+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{d}+4\vec{d}\cdot\vec{a})$$
$$=\frac{2}{9}\left(2\cdot1^2-1^2+2\cdot1^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

(3) (2) の結果により
$$|\overrightarrow{\mathrm{HE}}|^2=\frac{1}{9}(4|\vec{a}|^2+|\vec{c}|^2+4|\vec{d}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{c}-4\vec{c}\cdot\vec{d}+8\vec{d}\cdot\vec{a})$$
$$=\frac{1}{9}\left(4\cdot1^2+1^2+4\cdot1^2-4\cdot\frac{1}{2}-4\cdot\frac{1}{2}+8\cdot\frac{1}{2}\right)=1$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{HF}}|^2=\frac{4}{9}(|\vec{a}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{d}+2\vec{d}\cdot\vec{a})$$
$$=\frac{4}{9}\left(1^2+1^2+1^2+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{8}{3}$$

△HEF の面積を S とすると
$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{HE}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{HF}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{HE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HF}})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{1\cdot\frac{8}{3}-\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{3}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(z)=z^2-tz+t-\dfrac{1}{2}=\left(z-\dfrac{t}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}t^2+t-\dfrac{1}{2}$ とおくと

$$f\left(\frac{t}{2}\right)=-\frac{1}{4}t^2+t-\frac{1}{2},\quad f(-1)=2t+\frac{1}{2},\quad f(1)=\frac{1}{2}>0$$

$f(z)=0$ の解が $-1\leqq z\leqq 1$ であるとき，次式を満たせばよい．

$$-1\leqq\frac{t}{2}\leqq 1\cdots①,\quad f\left(\frac{t}{2}\right)\leqq 0\cdots②,\quad f(-1)\geqq 0\cdots③$$

① より　$-2\leqq t\leqq 2\cdots①'$

② より　$-\dfrac{1}{4}t^2+t-\dfrac{1}{2}\leqq 0$　ゆえに　$t\leqq 2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}\leqq t\cdots②'$

③ より　$2t+\dfrac{1}{2}\geqq 0$　ゆえに　$t\geqq -\dfrac{1}{4}\cdots③'$

①′，②′，③′ を同時に満たす範囲を求めると　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{4}\leqq t\leqq 2-\sqrt{2}}$

(2) 2 次方程式 $z^2-tz+t-\dfrac{1}{2}=0\cdots(*)$ が虚数解をもつので

$$(-t)^2-4\cdot 1\left(t-\frac{1}{4}\right)<0\quad すなわち\quad t^2-4t+2<0$$

これを解いて　$2-\sqrt{2}<t<2+\sqrt{2}\quad\cdots④$

2 次方程式 $(*)$ の 2 解が $x\pm yi$ であるから，解と係数の関係により

$$(x+yi)(x-yi)=t-\frac{1}{2}\quad ゆえに\quad x^2+y^2=t-\frac{1}{2}$$

$x^2+y^2\leqq 1$ であるから

$$t-\frac{1}{2}\leqq 1\quad ゆえに\quad t\leqq\frac{3}{2}\quad\cdots⑤$$

④，⑤ の共通範囲を求めると　$\boldsymbol{2-\sqrt{2}<t\leqq\dfrac{3}{2}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 不等式 $\log_x y < 2 + 3\log_y x$ の底および真数から

$$x \neq 1,\ y \neq 1,\ x > 0,\ y > 0$$

不等式を変形すると　$\log_x y - 2 - \dfrac{3}{\log_x y} < 0$

$(\log_x y)^2$ を掛けると　$\log_x y(\log_x y + 1)(\log_x y - 3) < 0$

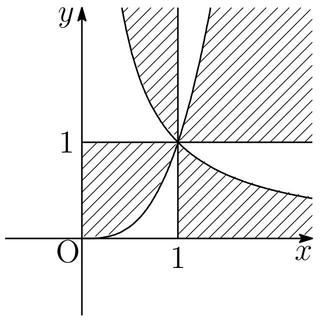
ゆえに　$\log_x y < -1,\quad 0 < \log_x y < 3$

したがって　$\log_x y < \log_x \dfrac{1}{x},\quad \log_x 1 < \log_x y < \log_x x^3$

(i) $0 < x < 1$ のとき　$y > \dfrac{1}{x},\quad x^3 < y < 1$

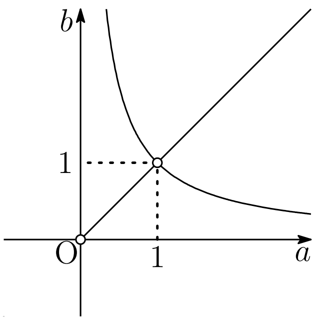
(ii) $x > 1$ のとき　$y < \dfrac{1}{x},\quad 1 < y < x^3$

(i)，(ii) より，求める領域は，次の図の斜線部分で，ただし境界線を含まない．



$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$D/4=(2\log_a b)^2-4\cdot 1$$
$$=4(\log_a b+1)(\log_a b-1)$$



2 次方程式 $f(x)=0$ が重解をもつとき，$D=0$ であるから

$$\log_a b=\pm 1 \quad \text{ゆえに} \quad b=a,\ b=\frac{1}{a}$$

よって，点 $(a,\ b)$ の表す図形は　$b=a,\ b=\dfrac{1}{a}\ (a>0,\ a\neq 1)$

(2)　(i) 重解をもつとき，(1) の結果から $\log_a b=\pm 1$ であるから，$f(x)=0$ は

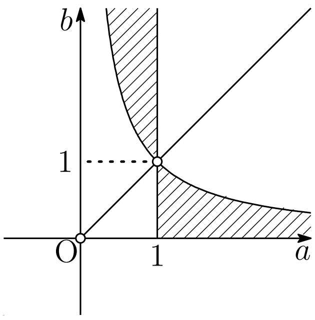
$$4x^2\pm 4x+1=0 \quad \text{ゆえに} \quad (2x\pm 1)^2=0$$

この解は，$0<x<\dfrac{1}{2}$ ではないので不適．

(ii) $0<x<\dfrac{1}{2}$ の範囲に重解でない解もつとき，

$f(0)=1>0$ より $f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$ であるから

$$4\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\cdot\frac{1}{2}\log_a b+1<0$$



$\log_a b<-1\cdots(*)$ となるから

$$\log_a b<\log_a \frac{1}{a}$$

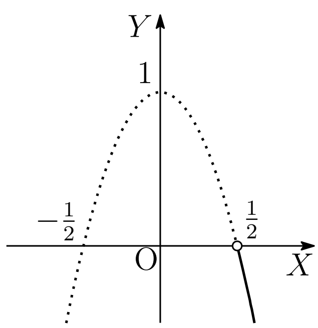
よって　$0<a<1$ のとき $b>\dfrac{1}{a}$，　$a>1$ のとき $0<b<\dfrac{1}{a}$

点 $(a,\ b)$ の表す図形は，右の図の斜線部分．ただし，境界線を含まない．

(3) $f(x)=4\left(x+\dfrac{1}{2}\log_a b\right)^2-(\log_a b)^2+1$ より，

$y=f(x)$ の頂点 $(X,\ Y)$ は

$$X=-\frac{1}{2}\log_a b, \quad Y=-(\log_a b)^2+1$$



上の 2 式および $(*)$ から

$$Y=-4X^2+1 \quad \left(X>\frac{1}{2}\right)$$

よって，$(X,\ Y)$ の表す軌跡は，右の図の実線部分である．

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 6b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases} \quad \cdots (*)$

上式の第 1 式から

$$b_n = \frac{1}{6}(a_{n+1} - 2a_n), \quad b_{n+1} = \frac{1}{6}(a_{n+2} - 2a_{n+1}) \quad \cdots (**)$$

これらを第 2 式に代入すると

$$\frac{1}{6}(a_{n+2} - 2a_{n+1}) = 2a_n + 3 \times \frac{1}{6}(a_{n+1} - 2a_n)$$

整理すると　$a_{n+2} - 5a_{n+1} - 6a_n = 0 \quad \cdots ①$

$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \cdots ②$ より

$$a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0 \quad \cdots ③$$

①，③ より　$\alpha + \beta = 5, \ \alpha\beta = -6$

ゆえに，α，β を解とする 2 次方程式は　$x^2 - 5x - 6 = 0$

よって，α，β の組は，これを解いて　$\boldsymbol{(\alpha, \ \beta) = (-1, \ 6), \ (6, -1)}$

(2) $(*)$ の第 1 式から　$a_2 = 2a_1 + 6b_1 = 2 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 8$

(1) の結果を ② に代入すると

$$\begin{cases} a_{n+2} + a_{n+1} = 6(a_{n+1} + a_n) \\ a_{n+2} - 6a_{n+1} = -(a_{n+1} - 6a_n) \end{cases}$$

したがって　$a_{n+1} + a_n = 6^{n-1}(a_2 + a_1) = 9 \cdot 6^{n-1}$

$a_{n+1} - 6a_n = (-1)^{n-1}(a_2 - 6a_1) = 2 \cdot (-1)^{n-1}$

上の 2 式から　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{9 \cdot 6^{n-1} - 2 \cdot (-1)^{n-1}}{7}}$

(3) $(**)$ の第 1 式に (2) の結果を代入すると

$$b_n = \frac{1}{6}\left(\frac{9 \cdot 6^n - 2 \cdot (-1)^n}{7} - 2 \times \frac{9 \cdot 6^{n-1} - 2 \cdot (-1)^{n-1}}{7}\right) = \frac{6^n + (-1)^{n-1}}{7}$$

上式および (2) の結果から　$\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{9 \cdot 6^{n-1} - 2 \cdot (-1)^{n-1}}{6^n + (-1)^{n-1}}$

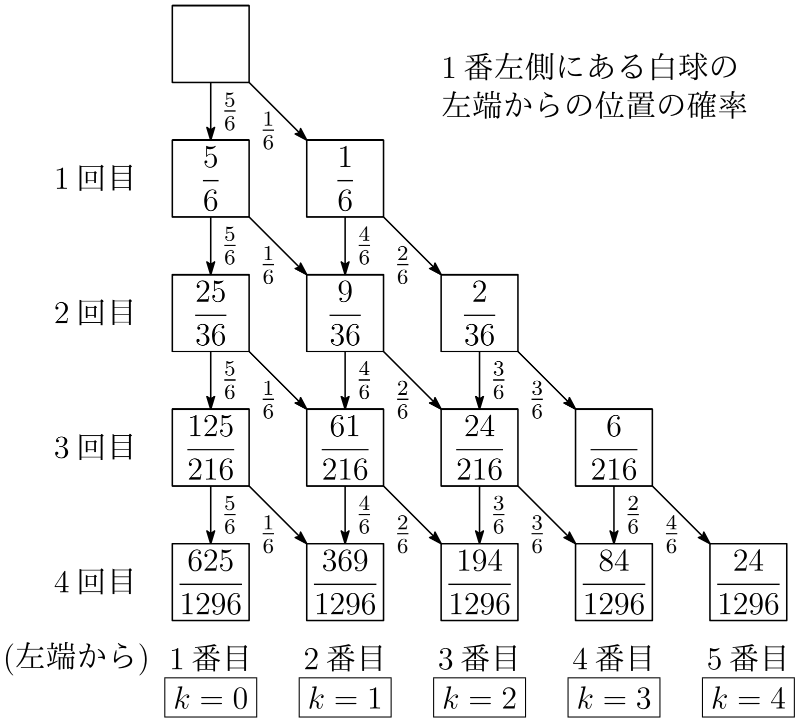
よって　$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{9 - 2\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}}{6 + \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}} = \frac{9}{6} = \boldsymbol{\frac{3}{2}}$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $k=0$ となるのは，4 回とも 1 以外の目が出る確率であるから

$$\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \mathbf{\frac{625}{1296}}$$

(2) $k=1$ となるのは，1 番左側にある白球が，左端から 2 番目にある確率であるから，下の表により

$$\frac{369}{1296} = \mathbf{\frac{41}{144}}$$



(3) (2) の表により，求める k の期待値は

$$1\times\frac{369}{1296} + 2\times\frac{194}{1296} + 3\times\frac{84}{1296} + 4\times\frac{24}{1296} = \mathbf{\frac{1105}{1296}}$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) (a) P における共通接線 QR を引く．

接線と弦の作る角により

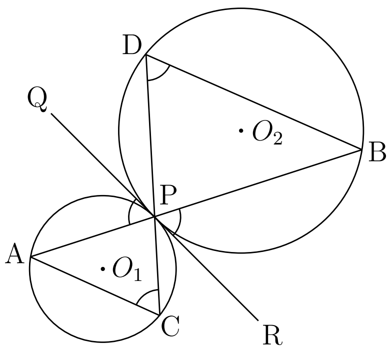
$$\angle\mathrm{QPA} = \angle\mathrm{ACP},\ \angle\mathrm{RPB} = \angle\mathrm{BDP}$$

また，2 直線 AB，QR の対頂角により

$$\angle\mathrm{QPA} = \angle\mathrm{RPB}$$

であるから，$\angle\mathrm{ACP} = \angle\mathrm{BDP}$ である．

錯角が等しいので，AC//BD



(b) △ACP と △BDP に正弦定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AP}}{\sin\angle\mathrm{ACP}} = 2r_1,\quad \frac{\mathrm{PB}}{\sin\angle\mathrm{BDP}} = 2r_2$$

$\angle\mathrm{ACP} = \angle\mathrm{BDP}$ より，$\sin\angle\mathrm{ACP} = \sin\angle\mathrm{BDP}$ であるから

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = r_1 : r_2$$

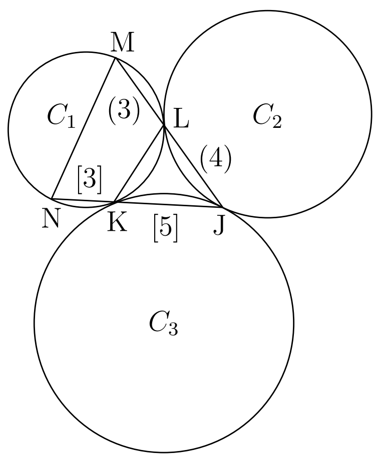
別解 (その 1) 2 直線 AB，$\mathrm{O_1O_2}$ の対頂角により，$\angle\mathrm{APO_1} = \angle\mathrm{BPO_2}$．

2 つの二等辺三角形 $\triangle\mathrm{APO_1}$，$\triangle\mathrm{BPO_2}$ の相似比を利用する．

(その 2) 2 円 O_1，O_2 の中心を通る直線とこれらの円の P 以外の交点を，それぞれ S，T とすると，$\angle\mathrm{APS} = \angle\mathrm{BPT}$ である．

2 つの直角三角形 △APS，△BPT の相似比を利用する．

(2) (1)(b) の結果により



$$\mathrm{ML} : \mathrm{LJ} = 3 : 4$$
$$\mathrm{NK} : \mathrm{KJ} = 3 : 5$$

したがって

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{JMN} : \triangle\mathrm{JLK} &= (3+4)(3+5) : 4\cdot 5\\ &= 56 : 20 = 14 : 5\end{aligned}$$

ゆえに，四角形 KLMN と △JLK の相似比は

$$\begin{aligned}(\triangle\mathrm{JMN} - \triangle\mathrm{JLK}) : \triangle\mathrm{JLK} &= (14-5) : 5\\ &= 9 : 5\end{aligned}$$

よって，四角形 KLMN の面積は △JLK の面積の $\boldsymbol{\dfrac{9}{5}}$ 倍．

$\boxed{\mathbf{10}}$ (1) A，B，C の 3 人が東公園，西公園，北公園に行く確率は，次のようになる．

	東	西	北
A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
B	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
C	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

A と B が東公園に行く確率は　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$

A と B が西公園に行く確率は　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

よって，求める確率は　$\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{4}=\mathbf{\dfrac{3}{8}}$

(2) B と C が東公園に行く確率は　$\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}$

B と C が西公園に行く確率は　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$

B と C が北公園に行く確率は　$\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$

よって，求める確率は　$\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}=\mathbf{\dfrac{5}{16}}$

(3) 3 人が東公園に行く確率は　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{32}$

3 人が西公園に行く確率は　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}$

よって，求める確率は　$\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{16}=\mathbf{\dfrac{3}{32}}$

(4) A，B，C の 3 人が異なる公園に行くのは，次の場合である．

東　西　北
A　B　C $\cdots$ $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$
A　C　B $\cdots$ $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$
B　A　C $\cdots$ $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$
C　A　B $\cdots$ $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$

ゆえに，A，B，C の 3 人が異なる公園に行く確率は　$\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}=\dfrac{1}{4}$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$1-\dfrac{1}{4}=\mathbf{\dfrac{3}{4}}$

$\boxed{\mathbf{11}}$ (1) S_n の境界上ある格子点の個数は

(i) $x=0$ のとき，$(0,\ 0)$ の 1 個

(ii) $1 \leqq x \leqq n-1$ のとき，次の $2(n-1)$ 個

$$(1,\ 0),\ (2,\ 0),\ (3,\ 0), \cdots, (n-1,\ 0),$$
$$(1,\ 1^2),\ (2,\ 2^2),\ (3,\ 3^2), \cdots, (n-1,\ (n-1)^2)$$

(iii) $x=n$ のとき，次の n^2+1 個

$$(n,\ 0),\ (n,\ 1),\ (n,\ 2), \cdots, (n,\ n^2)$$

よって　$a_n = 1 + 2(n-1) + (n^2+1) = \boldsymbol{n(n+2)}$

(2) S_n の境界を除いた内部にある格子点の個数は

$x=k$ のとき $(2 \leqq k \leqq n-1)$，次の k^2-1 個

$$(k,\ 1),\ (k,\ 2), \cdots,\ (k,\ k^2-1)$$

よって
$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=2}^{n-1}(k^2-1) = \sum_{k=1}^{n-1}(k^2-1) \\ &= \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-(n-1) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(2n+3)} \end{aligned}$$

(3)
$$c_n = \int_0^n x^2\,dx = \left[\ \frac{x^3}{x}\ \right]_0^n = \frac{n^3}{3}$$

上式および (1)，(2) の結果により

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{2} + b_n - c_n &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n+2) + \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(2n+3) - \frac{n^3}{3} \\ &= \frac{n}{6} + 1 \end{aligned}$$

よって
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2}+b_n-c_n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{6}+1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{n}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

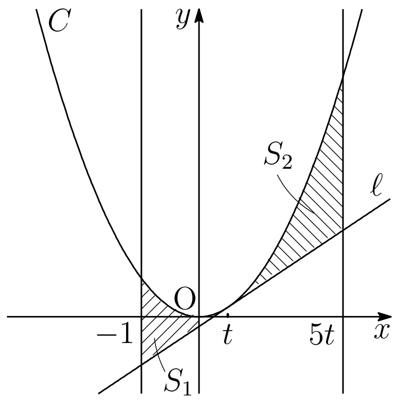
$\boxed{\mathbf{12}}$ (1) $y = x^2$ を微分すると　　$y' = 2x$

C 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は

$$y - t^2 = 2t(x - t)$$

ゆえに　　$y = 2tx - t^2$

したがって



$$S_1 = \int_{-1}^{t} \{x^2 - (2tx - t^2)\}\,dx$$

$$= \int_{-1}^{t} (x - t)^2\,dx$$

$$= \left[\ \frac{1}{3}(x - t)^3\ \right]_{-1}^{t} = \frac{1}{3}(t + 1)^3$$

$$S_2 = \int_{t}^{5t} \{x^2 - (2tx - t^2)\}dx = \int_{t}^{5t} (x - t)^2\,dx$$

$$= \left[\ \frac{1}{3}(x - t)^3\ \right]_{t}^{5t} = \frac{64}{3}t^3$$

よって　　$R = S_2 - S_1 = \dfrac{64}{3}t^3 - \dfrac{1}{3}(t + 1)^3 = \boldsymbol{21t^3 - t^2 - t - \dfrac{1}{3}}$

(2) (1) の結果から　$\dfrac{dR}{dt} = 63t^2 - 2t - 1 = (7t - 1)(9t + 1)$

$t > 0$ より，R の増減表は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{7}$	$\cdots$
$\frac{dR}{dt}$		$-$	0	$+$
R		$\searrow$	$-\frac{64}{147}$	$\nearrow$

よって，$t = \dfrac{1}{7}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{64}{147}}$ をとる．