平成 25 年度　宮崎大学２次試験前期日程 (数学問題)
工 (物質環境化学を除く)・医 (医)・農・教育文化 (中学数学・中学社会・理科・技術・家庭・初等教育・特別支援・社会システム) 学部
平成 25 年 2 月 25 日

- 工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ 数 II・III・A・B (120 分)
- 医学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{6}$ ～ $\boxed{9}$ 数 II・III・A・B (120 分)
- 教育文化 (中学数学) 学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$, $\boxed{10}$ 数 II・III・A・B (120 分)
- 教育文化 (中学 [社会，理科，技術，家庭]，初等教育，特別支援，社会システム) 学部・農学部は，$\boxed{5}$, $\boxed{11}$, $\boxed{12}$ 数 II・A・B (90 分)

$\boxed{\textbf{1}}$ 次の各問に答えよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(1) 次の関数を微分せよ．

(i) $y = \dfrac{x}{e^x}$

(ii) $y = \log\left(\dfrac{2+\sin x}{2-\sin x}\right)$

(2) 次の定積分の値を求めよ．

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2 - x}{2x+1}\,dx$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x\cos(x^2)\,dx$

(iii) $\displaystyle\int_0^1 x^3\log(x^2+1)\,dx$

(iv) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |e^{\cos x}\sin x|\,dx$

$\boxed{\textbf{2}}$ 次の各問に答えよ．

(1) 方程式 $2{\cdot}8^x - 3{\cdot}4^{x+1} + 5{\cdot}2^{x+1} + 24 = 0$ を満たすような実数 x をすべて求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ が，$a_1 = \sin^2\theta$，$a_{n+1} = 4a_n(1-a_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められているとき，次の (i)，(ii) に答えよ．

(i) a_2 と a_3 を，θ を用いて表せ．

(ii) a_n が θ と n を用いてどのように表されるのか予想し，それが正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 平面上に，1辺の長さが1の正三角形ABCをとり，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}$とおく．また，直線AC，BC上にそれぞれ点P，Qを$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=2\vec{b}$であるようにとる．線分PQの中点をRとし，直線AB上に点DをDR⊥PQであるようにとる．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{CR}}$を，$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DR}}$を，$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(3) 直線DRと直線BCの交点をEとするとき，線分CEの長さを求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 最初に袋の中に，赤球と白球が3個ずつ，合計6個入っている．この状態から次の①〜③の一連の操作を行う．

① 袋の中から無作為に3個の球を取り出す．

② ①で取り出した球は袋に戻さず，取り出した赤球の数だけ白球を袋に補充し，取り出した白球の数だけ赤球を袋に補充する．

③ ①，②の操作をもう一度繰り返す．

ただし，補充する赤球と白球は十分にあるものとする．①〜③の操作の後に，袋の中にある赤球の個数をaとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $a=3$となる確率を求めよ．

(2) aの期待値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 座標平面上に，半円$C : x^2+y^2=4$ (ただし，$x>0$) と放物線$D : x^2-6y+3=0$がある．半円C上の点P$(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ (ただし，$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$) における半円$C$の接線を$l$とするとき，次の各問に答えよ．

(1) 半円Cと放物線Dとの交点Qの座標を求めよ．

(2) 直線lが放物線Dに点Rにおいて接するとき，θの値と点Rの座標を求めよ．

(3) (2)のとき，半円Cと放物線Dおよび直線lによって囲まれる部分の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ $0 < r < 1$ を満たす実数 r について，座標平面上に，2 点 $\mathrm{P}_1(1,\ 0)$，$\mathrm{P}_2(1,\ r)$ がある．これらから点 $\mathrm{P}_{n+1}(x_{n+1},\ y_{n+1})$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ を次の規則に従って定める．

点 P_{n-1} から点 P_n に向かう方向を時計の針の回転と逆の向きに 90° 回転し，その方向に点 P_n から距離 r^n だけ進んだ点を P_{n+1} とする．

このとき，次の各問に答えよ．

(1) 点 P_4，P_8 の座標を，r を用いて表せ．

(2) $x = \displaystyle\lim_{m\to\infty} x_{4m}$，$y = \displaystyle\lim_{m\to\infty} y_{4m}$ とするとき，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標を，r を用いて表せ．

(3) 実数 r が $0 < r < 1$ の範囲を動くとき，(2) の点 P の軌跡を座標平面上に図示せよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 次の各問に答えよ．

(1) 方程式 $2{\cdot}8^x - 3{\cdot}4^{x+1} + 5{\cdot}2^{x+1} + 24 = 0$ を満たすような実数 x をすべて求めよ．

(2) 実数 θ に対し，関数 $f(\theta)$ と $g(\theta)$ を，

$$f(\theta) = (\cos\theta)(\cos 2\theta)(\cos 3\theta), \quad g(\theta) = (\sin\theta)(\sin 2\theta)(\sin 3\theta)$$

とおくとき，次の (i)，(ii) に答えよ．

(i) 関数 $f(\theta)$，$g(\theta)$ は，それぞれ

$$f(\theta) = p + q\cos 2\theta + r\cos 4\theta + s\cos 6\theta$$
$$g(\theta) = t + u\sin 2\theta + v\sin 4\theta + w\sin 6\theta$$

のように表されることを示せ．ただし，p，q，r，s，t，u，v，w は θ によらない定数とする．

(ii) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，方程式 $f(\theta) = g\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$ を満たすような θ をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ $-1 < x < 1$ で定義される関数 $f(x) = 2x + \sqrt{5 - 5x^2}$ について，座標平面上の曲線 $C : y = f(x)$ を考える．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 曲線 C は上に凸であることを示し，$f(x)$ の最大値を求めよ．

(2) 曲線 C 上の点のうち，原点 O との距離が最大となる点を A，最小となる点を B とするとき，A，B の座標をそれぞれ求めよ．

(3) (2) で求めた点 A，B について，線分 OA，線分 OB，および曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ．

9 最初，数直線上の原点に点 P を置き，コインを 1 回投げるごとに以下のように点 P の位置を定める.

① 点 P の座標が -2 以上 3 以下のとき，コインの表が出れば正の向きに 1 だけ点 P を進め，裏が出れば負の向きに 1 だけ点 P を進める.

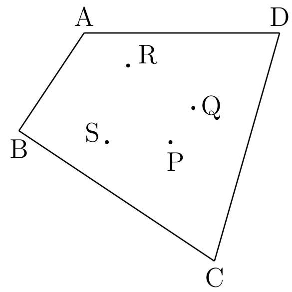
② 点 P の座標が -3 または 4 のとき，コインの表裏にかかわらず点 P を動かさない.

コインを投げて ①，② に従い点 P の位置を定める操作を 6 回行う．この 6 回の操作によって定めた点 P の最終的な位置の座標を a とする．ただし，コインの表と裏が出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ とする．このとき，次の各問に答えよ.

(1) $a=-3$ となる確率と $a=4$ となる確率をそれぞれ求めよ.

(2) a の期待値を求めよ.

10 右図のような四角形 ABCD について，すべての内角の大きさは 180° 未満とする．$\triangle$BCD の重心を P，$\triangle$CDA の重心を Q，$\triangle$DAB の重心を R，$\triangle$ABC の重心を S とする．ただし，点 P と点 R は直線 AC 上になく，点 Q と点 S は直線 BD 上にないものとする．このとき，次の各問に答えよ.



(1) AC//RP を示せ.

(2) AB//QP を示せ.

(3) 四角形 ABCD が円に内接するとき，4 点 P，Q，R，S は同一円周上にあることを示せ.

11 3 次の整式 $P(x)$ は，次の条件 1)，2)，3) を満たしている.

1) $P(x)$ の x^3 の係数は 1 である.

2) $P(x)$ は $(x-1)^2$ で割り切れる.

3) $P(x)$ を $x+1$ で割った余りと，x^2-x-2 で割った余りは等しい.

このとき，次の各問に答えよ.

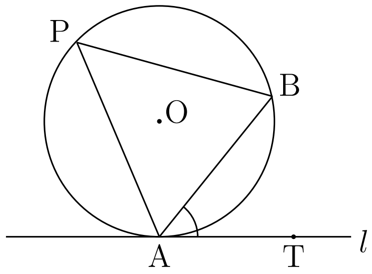
(1) $P(x)$ を求めよ.

(2) $\{P(x)\}^2$ を $(x+1)^2$ で割った余りを求めよ.

$\boxed{\mathbf{12}}$ 次の各問に答えよ．

(1) 方程式 $2{\cdot}8^x - 3{\cdot}4^{x+1} + 5{\cdot}2^{x+1} + 24 = 0$ を満たすような実数 x をすべて求めよ．

(2) 右図のような点 O を中心とする円において，弦 AB と点 A における接線 l とのなす角 $\angle$BAT は，その角内にある弧 AB に対する円周角 $\angle$APB に等しいことを証明せよ．ただし，$\angle$BAT は鋭角とする．



正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) (i) $y = \dfrac{x}{e^x} = xe^{-x}$ より　$y' = e^{-x} - xe^{-x} = \boldsymbol{(1-x)e^{-x}}$

(ii) $y = \log\left(\dfrac{2+\sin x}{2-\sin x}\right) = \log(2+\sin x) - \log(2-\sin x)$ より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\cos x}{2+\sin x} - \frac{-\cos x}{2-\sin x} \\ &= \frac{\cos x(2-\sin x) + \cos x(2+\sin x)}{(2+\sin x)(2-\sin x)} = \boldsymbol{\frac{4\cos x}{4-\sin^2 x}} \end{aligned}$$

(2) (i)
$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2x^2-x}{2x+1}\,dx &= \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{2x+1}\right) dx \\ &= \left[\,\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\log(2x+1)\,\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}(\log 3 - 1)} \end{aligned}$$

(ii)
$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x\cos(x^2)\,dx = \left[\,\frac{1}{2}\sin(x^2)\,\right]_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

(iii) $t = x^2 + 1$ とおくと

x	$0 \to 1$
t	$1 \to 2$

$$\frac{dt}{dx} = 2x$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^3\log(x^2+1)\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{2}x^2\log(x^2+1)\,2x dx \\ &= \int_1^2 \frac{1}{2}(t-1)\log t\,dt \\ &= \int_1^2 \left(\frac{t^2}{4} - \frac{t}{2}\right)' \log t\,dt \\ &= \left[\,\left(\frac{t^2}{4} - \frac{t}{2}\right)\log t\,\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{t^2}{4} - \frac{t}{2}\right)\frac{1}{t}\,dt \\ &= 0 - \left[\,\frac{t^2}{8} - \frac{t}{2}\,\right]_1^2 = \boldsymbol{\frac{1}{8}} \end{aligned}$$

(iv) $|e^{\cos x}\sin x|$ は遇関数であるから

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{\cos x}\sin x|\,dx &= 2\int_0^{\pi} |e^{\cos x}\sin x|\,dx \\ &= 2\int_0^{\pi} e^{\cos x}\sin x\,dx \\ &= -2\int_0^{\pi} e^{\cos x}(\cos x)'\,dx \\ &= -2\left[\,e^{\cos x}\,\right]_0^{\pi} = \boldsymbol{2(e - e^{-1})} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $t=2^x$ とおくと $(t>0)$，方程式 $2{\cdot}8^x-3{\cdot}4^{x+1}+5{\cdot}2^{x+1}+24=0$ は

$$2t^3-12t^2+10t+24=0 \quad \text{ゆえに} \quad (t+1)(t-3)(t-4)=0$$

$t>0$ より　$t=3,\ 4$　ゆえに　$2^x=3,\ 4$　すなわち　$\boldsymbol{x=\log_2 3,\ 2}$

(2) (i) $a_1=\sin^2\theta$，$a_2=4a_1(1-a_1)$ より

$$\begin{aligned} a_2 &= 4\sin^2\theta(1-\sin^2\theta) \\ &= 4\sin^2\theta\cos^2\theta=(2\sin\theta\cos\theta)^2=\boldsymbol{\sin^2 2\theta} \end{aligned}$$

$a_2=\sin^2 2\theta$，$a_3=4a_2(1-a_2)$ より

$$\begin{aligned} a_3 &= 4\sin^2 2\theta(1-\sin^2 2\theta) \\ &= 4\sin^2 2\theta\cos^2 2\theta=(2\sin 2\theta\cos 2\theta)^2=\boldsymbol{\sin^2 4\theta} \end{aligned}$$

(ii) 自然数 n について，$a_n=\sin^2(2^{n-1}\theta)\cdots(*)$ とする．

i) $n=1$ のとき，$a_1=\sin^2(2^0\theta)=\sin^2\theta$
よって，$n=1$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

ii) $n=k$ のとき，$a_k=\sin^2(2^{k-1}\theta)$ が成り立つと仮定すると

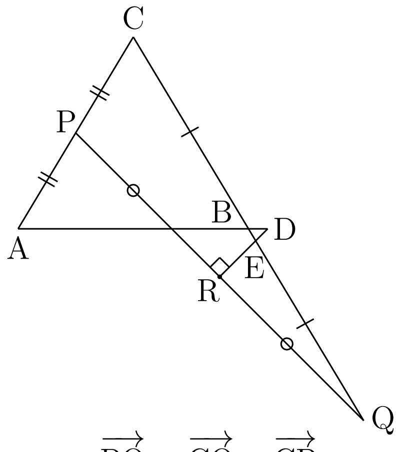
$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 4a_k(1-a_k)=4\sin^2(2^{k-1}\theta)\{1-\sin^2(2^{k-1}\theta)\} \\ &= 4\sin^2(2^{k-1}\theta)\cos^2(2^{k-1}\theta) \\ &= \{2\sin(2^{k-1}\theta)\sin(2^{k-1}\theta)\}^2=\sin^2 2^k\theta \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

i)，ii) より，すべての自然数 n に対して，$(*)$ が成り立つ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{CR}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\cdot 2\vec{b}=\boldsymbol{\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}}$$



(2) D は，直線 AB 上の点であるから，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$$

とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DR}}&=\overrightarrow{\mathrm{CR}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}\\&=\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}-\{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}\}\\&=\left(s-\frac{3}{4}\right)\vec{a}+(1-s)\vec{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{CQ}}-\overrightarrow{\mathrm{CP}}\\&=2\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\end{aligned}$$

$\triangle$ABC は，1 辺の長さが 1 の正三角形であるから

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

$\overrightarrow{\mathrm{DR}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{DR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$ であるから

$$\left\{\left(s-\frac{3}{4}\right)\vec{a}+(1-s)\vec{b}\right\}\cdot\left(2\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)=0$$

$$-\frac{1}{2}\left(s-\frac{3}{4}\right)|\vec{a}|^2+\left(\frac{5}{2}s-2\right)\vec{a}\cdot\vec{b}+2(1-s)|\vec{b}|^2=0$$

$$-\frac{1}{2}\left(s-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{5}{2}s-2\right)\cdot\frac{1}{2}+2(1-s)=0$$

ゆえに　$s=\dfrac{11}{10}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{DR}}=\dfrac{7}{20}\vec{a}-\dfrac{1}{10}\vec{b}}$

(3) (2) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{RD}}=-\dfrac{7}{20}\vec{a}+\dfrac{1}{10}\vec{b}$

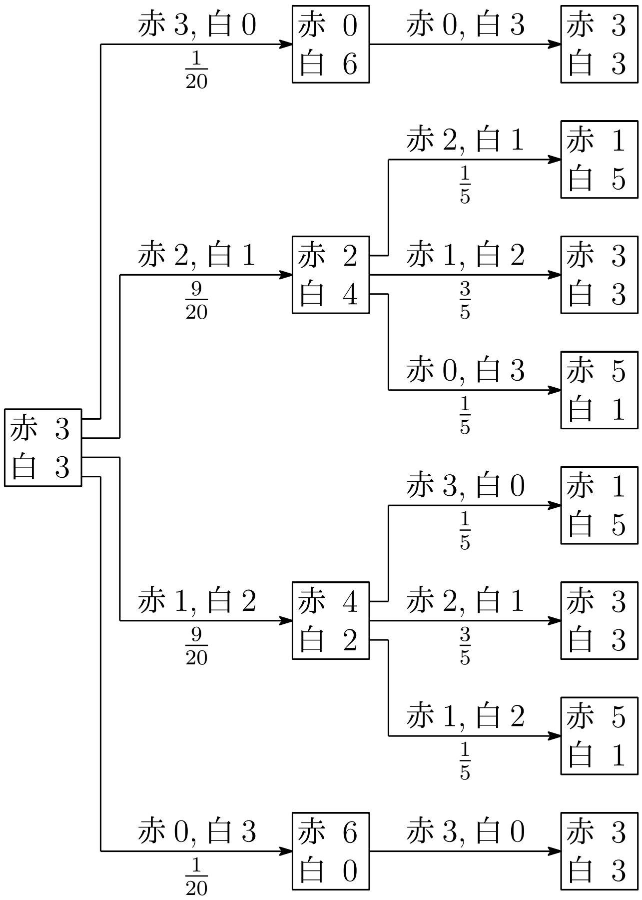
実数 k を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{RE}}=k\overrightarrow{\mathrm{RD}}$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CE}}&=\overrightarrow{\mathrm{CR}}+\overrightarrow{\mathrm{RE}}=\overrightarrow{\mathrm{CR}}+k\overrightarrow{\mathrm{RD}}\\&=\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}+k\left(-\frac{7}{20}\vec{a}+\frac{1}{10}\vec{b}\right)=\left(\frac{1}{4}-\frac{7}{20}k\right)\vec{a}+\left(1+\frac{1}{10}k\right)\vec{b}\end{aligned}$$

E は直線 BC 上の点であるから　$\dfrac{1}{4}-\dfrac{7}{20}k=0$　すなわち　$k=\dfrac{5}{7}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\dfrac{15}{14}\vec{b}$　$|\vec{b}|=1$ であるから　$\mathbf{CE}=\boldsymbol{\dfrac{15}{14}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 一連の操作による推移を示すと，次のようになる．



したがって，$a=3$ となる確率は

$$\frac{1}{20}+\frac{9}{20}\times\frac{3}{5}+\frac{9}{20}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{20}=\mathbf{\frac{16}{25}}$$

(2) $a=1$ となる確率は $\quad \dfrac{9}{20}\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{9}{20}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{9}{50}$

$a=5$ となる確率は $\quad \dfrac{9}{20}\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{9}{20}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{9}{50}$

よって，求める期待値は

$$1\times\frac{9}{50}+3\times\frac{16}{25}+5\times\frac{9}{50}=\mathbf{3}$$

a	1	3	5	計
確率	$\frac{9}{50}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{9}{50}$	1

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) C と D の共有点 Q の座標は，$x^2+y^2=4\cdots$①，$x^2-6y+3=0\cdots$②
から x^2 を消去すると

$$y^2+6y-7=0 \quad \text{ゆえに} \quad (y+7)(y-1)=0$$

①，② より，$\dfrac{1}{2} \leqq y \leqq 2$ であるから　　$y=1$
したがって　$x^2=3$　また $x>0$ より　$x=\sqrt{3}$　よって　$\mathbf{Q(\sqrt{3},\ 1)}$

(2) 放物線 D の方程式は　$y=\dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{1}{2}$　これを微分すると　$y'=\dfrac{1}{3}x$

D 上の接点 R の座標を $\left(a,\ \dfrac{1}{6}a^2+\dfrac{1}{2}\right)$ とすると，接線 l の方程式は

$$y=\frac{1}{3}a(x-a)+\frac{1}{6}a^2+\frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad 2ax-6y-a^2+3=0$$

これが，原点を中心とする半径 2 の円に接するから

$$\frac{|-a^2+3|}{\sqrt{4a^2+36}}=2 \quad \text{整理すると} \quad a^4-22a^2-135=0$$

したがって　$(a^2+5)(a^2-27)=0$　ゆえに　$a=\pm 3\sqrt{3}$
このとき，接線の方程式は

$$\pm 6\sqrt{3}\,x-6y-27+3=0 \quad \text{すなわち} \quad \pm\sqrt{3}\,x-y=4$$

これが，$C: x^2+y^2=4\ (x>0)$ 上の点 $\mathrm{P}(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$
における接線

$$(2\cos\theta)x+(2\sin\theta)y=4$$

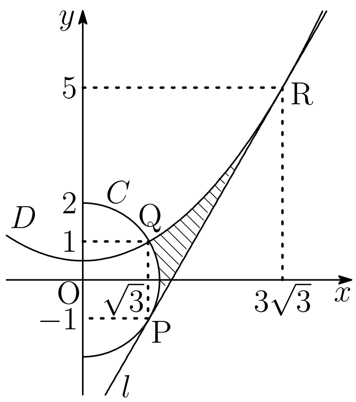
に一致するので，$a>0$．したがって

$$a=3\sqrt{3},\quad 2\cos\theta=\sqrt{3},\quad 2\sin\theta=-1,\quad l: y=\sqrt{3}x-4$$

よって　　$\boldsymbol{\theta=-\dfrac{\pi}{6}}$，$\mathbf{R(3\sqrt{3},\ 5)}$

(3) (2) の結果から　$\angle\mathrm{POQ} = \dfrac{\pi}{3}$

C と線分 PQ で囲まれた図形の面積を S_1 とすると



$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot 2^2 \sin\frac{\pi}{3} \\ &= \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3} \end{aligned}$$

求める面積 S は，図の斜線部分であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} \left\{ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}\right) - \left(\sqrt{3}x - 4\right) \right\} dx - S_1 \\ &= \frac{1}{6}\int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} (x - 3\sqrt{3}\,)^2 dx - \left(\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}\right) \\ &= \frac{1}{18}\Big[\ (x - 3\sqrt{3}\,)^3\ \Big]_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} \\ &= \boldsymbol{\frac{7\sqrt{3}}{3} - \frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

$\boxed{6}$ (1) $\mathrm{P}_1(1,\ 0) \to \mathrm{P}_2(1,\ r) \to \mathrm{P}_3(1-r^2,\ r) \to \mathrm{P}_4(1-r^2,\ r-r^3)$
$\to \mathrm{P}_5(1-r^2+r^4,\ r-r^3) \to \mathrm{P}_6(1-r^2+r^4,\ r-r^3+r^5)$
$\to \mathrm{P}_7(1-r^2+r^4-r^6,\ r-r^3+r^5) \to \mathrm{P}_8(1-r^2+r^4-r^6,\ r-r^3+r^5-r^7)$

よって　$\boldsymbol{\mathrm{P}_4(1-r^2,\ r-r^3)}$,
$\boldsymbol{\mathrm{P}_8(1-r^2+r^4-r^6,\ r-r^3+r^5-r^7)}$

(2) (1) の結果から

$$x_{4m} = \sum_{k=1}^{2m}(-r^2)^{k-1} = \frac{1-(-r^2)^{2m}}{1-(-r^2)} = \frac{1-r^{4m}}{1+r^2}$$
$$y_{4m} = rx_{4m} = \frac{r(1-r^{4m})}{1+r^2}$$

上式および $0 < r < 1$ により

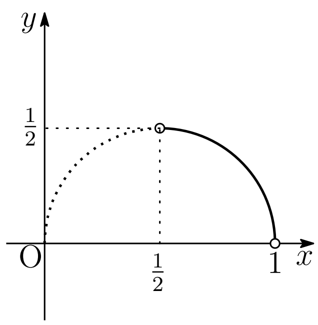
$$x = \lim_{m\to\infty} x_{4m} = \frac{1}{1+r^2} \qquad y = \lim_{m\to\infty} y_{4m} = \frac{r}{1+r^2}$$

よって　$\boldsymbol{\left(\frac{1}{1+r^2},\ \frac{r}{1+r^2}\right)}$

(3) $0 < r < 1$ より $r = \tan\theta$ $(0 < \theta < \frac{\pi}{4})$ とおくと

$$x = \frac{1}{1+r^2} = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$$
$$y = \frac{r}{1+r^2} = \frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

よって，点 P の軌跡は，中心 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$，半径 $\frac{1}{2}$ の一部で，図の実線部分.



$\boxed{7}$ (1) $t = 2^x$ とおくと $(t > 0)$，方程式 $2\cdot 8^x - 3\cdot 4^{x+1} + 5\cdot 2^{x+1} + 24 = 0$ は

$$2t^3 - 12t^2 + 10t + 24 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t+1)(t-3)(t-4) = 0$$

$t > 0$ より　$t = 3,\ 4$　ゆえに　$2^x = 3,\ 4$　すなわち　$\boldsymbol{x = \log_2 3,\ 2}$

(2) (i)
$$\begin{aligned}
f(\theta) &= (\cos\theta)(\cos 2\theta)(\cos 3\theta) \\
&= \frac{1}{2}(\cos 3\theta + \cos\theta)\cos 3\theta \\
&= \frac{1}{2}(\cos^2 3\theta + \cos\theta\cos 3\theta) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(\cos 6\theta + 1) + \frac{1}{2}(\cos 4\theta + \cos 2\theta)\right\} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 2\theta + \frac{1}{4}\cos 4\theta + \frac{1}{4}\cos 6\theta \\
g(\theta) &= (\sin\theta)(\sin 2\theta)(\sin 3\theta) \\
&= \frac{1}{2}(\cos\theta - \cos 3\theta)\sin 3\theta \\
&= \frac{1}{2}(\sin 3\theta\cos\theta - \sin 3\theta\cos 3\theta) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(\sin 4\theta + \sin 2\theta) - \frac{1}{2}\sin 6\theta\right\} \\
&= \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta - \frac{1}{4}\sin 6\theta
\end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{p = q = r = s = \frac{1}{4},\ t = 0,\ u = v = \frac{1}{4},\ w = -\frac{1}{4}}$$

とすればよい.

(ii) (i) の結果から

$$\begin{aligned}
g\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{4}\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}\sin(4\theta + \pi) - \frac{1}{4}\sin\left(6\theta + \frac{3}{2}\pi\right) \\
&= \frac{1}{4}\cos 2\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta + \frac{1}{4}\cos 6\theta
\end{aligned}$$

$f(\theta) = g\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ より

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 2\theta + \frac{1}{4}\cos 4\theta + \frac{1}{4}\cos 6\theta = \frac{1}{4}\cos 2\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta + \frac{1}{4}\cos 6\theta$$

ゆえに　$\sin 4\theta + \cos 4\theta = -1$　すなわち　$\sin\left(4\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より, $\frac{\pi}{4} \leqq 4\theta + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{17}{4}\pi$ であるから

$4\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ \frac{13}{4}\pi,\ \frac{15}{4}\pi$　よって　$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{8}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{8}\pi}$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $g(x)=\sqrt{5-5x^2}\ (-1<x<1)$ とおくと　$g(x)>0$

$\{g(x)\}^2=5-5x^2$ を微分すると

$$2g(x)g'(x)=-10x \quad \text{ゆえに} \quad g(x)g'(x)=-5x \quad \cdots ①$$

さらに，① を微分すると

$$\{g'(x)\}^2+g(x)g''(x)=-5 \quad \text{ゆえに} \quad g''(x)=-\frac{5+\{g'(x)\}^2}{g(x)}<0$$

$f(x)=2x+g(x)$ であるから　　$f''(x)=g''(x)<0$

したがって，曲線 $C: y=f(x)$ は上に凸である．

① より $g'(x)=-\dfrac{5x}{g(x)}$ であるから　$f'(x)=2-\dfrac{5x}{g(x)}=\dfrac{2g(x)-5x}{g(x)}$

$f'(x)=0$ のとき　　$2g(x)=5x>0$

両辺を平方すると　$\{2\sqrt{5-5x^2}\}^2=25x^2$　　$x>0$ より　$x=\dfrac{2}{3}$

$f''(x)<0$ であるから　最大値 $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=2\times\dfrac{2}{3}+\sqrt{5-5\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\mathbf{3}$

(2) C 上の点を $\mathrm{P}(x,\ 2x+g(x))$，$h(x)=\mathrm{OP}^2$ とすると $(-1<x<1)$

$$\begin{aligned} h(x)&=x^2+\{2x+g(x)\}^2\\ &=x^2+4x^2+4xg(x)+\{g(x)\}^2=5+4xg(x)\end{aligned}$$

これを微分すると

$$\begin{aligned} h'(x)&=4g(x)+4xg'(x)=4g(x)+4x\cdot\frac{-5x}{g(x)}\\ &=4\cdot\frac{\{g(x)\}^2-5x^2}{g(x)}=4\cdot\frac{5-5x^2-5x^2}{g(x)}=\frac{20(1-2x^2)}{g(x)}\end{aligned}$$

$h(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	(-1)	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	(1)
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	(5)	$\searrow$	$5-2\sqrt{5}$	$\nearrow$	$5+2\sqrt{5}$	$\searrow$	(5)

P が $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，原点 O との距離が最大となり，

$x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，原点 O との距離が最小となる．

$g\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ であるから

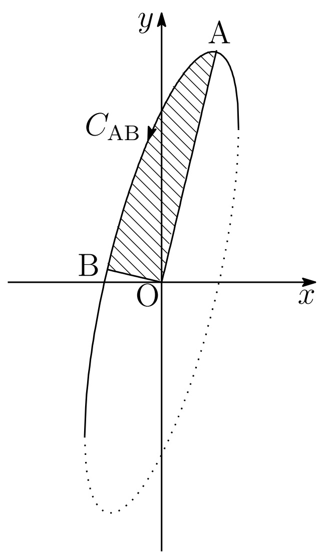
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{10}}{2}=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$$
$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}+g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{10}}{2}=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$$

よって　$\mathbf{A}\left(\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{10}+2\sqrt{2}}{2}}\right)$，$\mathbf{B}\left(\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{10}-2\sqrt{2}}{2}}\right)$

(3) $\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{2x+g(x)}{x}$ とおいて，これを x で微分すると

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx}=\frac{g'(x)}{x}-\frac{g(x)}{x^2}$$
$$\left(1+\tan^2\theta\right)\frac{d\theta}{dx}=-\frac{5}{g(x)}-\frac{g(x)}{x^2}$$
$$\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\frac{d\theta}{dx}=-\frac{5x^2+(5-5x^2)}{x^2g(x)}$$
$$r^2\frac{d\theta}{dx}=-\frac{5}{g(x)}\qquad(r^2=x^2+y^2)$$

C 上の A から B への経路を C_{AB}，求める面積を S とすると



$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\int_{C_{\mathrm{AB}}}r^2\,d\theta\\&=-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{5}{g(x)}\,dx\\&=-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{5}{\sqrt{5-5x^2}}\,dx\\&=\sqrt{5}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

$x=\sin\varphi$ とおくと　$\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=d\varphi$

x	$0\longrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}$
φ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

よって　$S=\sqrt{5}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi=\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{4}\pi}$

解説 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1，λ_2 は，固有方程式

$$\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2=0$$

の解で，それぞれに対する単位固有ベクトルを $\vec{u}=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$，$\vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ とし，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=x'\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}+y'\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

とすると，2 次曲線 $ax^2+2bxy+cy^2=d$ は

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2=d$$

となる (計算の詳細は，九大 2010 年一般前期理系数学 $\boxed{\mathbf{5}}$ の解説を参照[1]).
$y=2x+\sqrt{5-5x^2}$ より $y-2x=\sqrt{5-5x^2}$ の両辺を平方して整理すると

$$9x^2-4xy+y^2=5 \quad \cdots ①$$

となり，C はこの 2 次曲線の一部である．
行列 $A=\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有方程式は　$\lambda^2-10\lambda+5=0$
この解を λ_1，λ_2 とすると ($\lambda_1\lambda_2=5$)，① は楕円

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2=5$$

を表す．
この楕円の面積は　$\pi\sqrt{\dfrac{5}{\lambda_1}}\sqrt{\dfrac{5}{\lambda_2}}=\sqrt{5}\pi$
A，B はそれぞれ楕円の長軸および短軸上の頂点である．求める面積 S は，この面積の $\dfrac{1}{4}$ であるから

$$S=\sqrt{5}\pi\times\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2010.pdf

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) 6 回の試行における場合の数は次の表になる．

		回数						
		0	1	2	3	4	5	6
a	4					1		4
	3				1		4	
	2			1		4		14
	1		1		3		10	
	0	1		2		6		19
	-1		1		3		9	
	-2			1		3		9
	-3				1		3	

よって　$a=-3$ となる確率は　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+3\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\mathbf{\dfrac{7}{32}}$

$a=4$ となる確率は　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^4+4\left(\dfrac{1}{2}\right)^6=\mathbf{\dfrac{1}{8}}$

(2) (1) の表から

-2 となる確率は　$9\left(\dfrac{1}{2}\right)^6=\dfrac{9}{64}$

0 となる確率は　$19\left(\dfrac{1}{2}\right)^6=\dfrac{19}{64}$

2 となる確率は　$14\left(\dfrac{1}{2}\right)^6=\dfrac{14}{64}$

a	-3	-2	0	2	4	計
確率	$\frac{14}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{19}{64}$	$\frac{14}{64}$	$\frac{8}{64}$	1

よって，求める期待値は

$$-3\times\frac{14}{64}+(-2)\times\frac{9}{64}+0\times\frac{19}{64}+2\times\frac{14}{64}+4\times\frac{8}{64}=\mathbf{0}$$

$\boxed{\textbf{10}}$ (1) A，B，C，D，P，Q，R，S の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，$\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$，$\vec{s}$ とすると

$$\vec{p} = \frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}) \qquad \vec{q} = \frac{1}{3}(\vec{c}+\vec{d}+\vec{a})$$
$$\vec{r} = \frac{1}{3}(\vec{d}+\vec{a}+\vec{b}) \qquad \vec{s} = \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{RP}} = \frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}) - \frac{1}{3}(\vec{d}+\vec{a}+\vec{b}) = \frac{1}{3}(\vec{c}-\vec{a}) = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

よって　AC//RP

(2)
$$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}) - \frac{1}{3}(\vec{c}+\vec{d}+\vec{a}) = \frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{a}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad \cdots ①$$

よって　AB//QP

(3) (2) と同様にして

$$\overrightarrow{\mathrm{RQ}} = \frac{1}{3}(\vec{c}+\vec{d}+\vec{a}) - \frac{1}{3}(\vec{d}+\vec{a}+\vec{b}) = \frac{1}{3}(\vec{c}-\vec{b}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}} \quad \cdots ②$$
$$\overrightarrow{\mathrm{SR}} = \frac{1}{3}(\vec{d}+\vec{a}+\vec{b}) - \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \frac{1}{3}(\vec{d}-\vec{c}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CD}} \quad \cdots ③$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PS}} = \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) - \frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}) = \frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{d}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DA}} \quad \cdots ④$$

①，② より　$\angle\mathrm{PQR} = \angle\mathrm{ABC} \quad \cdots ⑤$

③，④ より　$\angle\mathrm{RSP} = \angle\mathrm{CDA} \quad \cdots ⑥$

四角形 ABCD は円に内接するので　$\angle\mathrm{ABC} + \angle\mathrm{CDA} = 180^\circ \quad \cdots ⑦$

⑤，⑥，⑦ より　$\angle\mathrm{PQR} + \angle\mathrm{RSP} = 180^\circ$

よって，4 点 P，Q，R，S は同一円周上にある．

$\boxed{\mathbf{11}}$ (1) 3次式 $P(x)$ の x^3 の係数が1で $(x-1)^2$ で割り切れるので

$$P(x)=(x-1)^2(x+a) \quad \cdots ①$$

とおける (a は定数).

$P(x)$ を x^2-x-2 で割った商を $Q(x)$ とし，余りは，$P(x)$ を $x+1$ で割った余り $P(-1)$ に等しいので，次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2-x-2)Q(x)+P(-1) \\ &= (x+1)(x-2)Q(x)+P(-1) \end{aligned}$$

これに $x=2$ を代入すると　$P(2)=P(-1) \quad \cdots ②$

①，② より　　$(2-1)^2(2+a)=(-1-1)^2(-1+a)$

これを解いて　$a=2$　　よって　$\boldsymbol{P(x)=(x-1)^2(x+2)}$

(2) (1) の結果から

$$P(x)=x^3-3x+2=(x+1)^2(x-2)+4$$

したがって

$$\begin{aligned} \{P(x)\}^2 &= \{(x+1)^2(x-2)+4\}^2 \\ &= (x+1)^4(x-2)^2+8(x+1)^2(x-2)+16 \\ &= (x+1)^2\{(x+1)^2(x-2)^2+8(x-2)\}+16 \end{aligned}$$

よって，$\{P(x)\}^2$ を $(x+1)^2$ で割った余りは　**16**

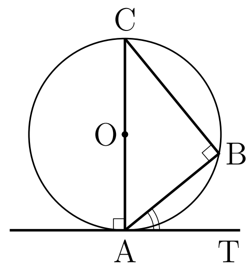
$\boxed{\mathbf{12}}$ (1) $t=2^x$ とおくと $(t>0)$，方程式 $2{\cdot}8^x-3{\cdot}4^{x+1}+5{\cdot}2^{x+1}+24=0$ は

$$2t^3-12t^2+10t+24=0 \quad \text{ゆえに} \quad (t+1)(t-3)(t-4)=0$$

$t>0$ より　$t=3,\ 4$　ゆえに　$2^x=3,\ 4$　すなわち　$\boldsymbol{x=\log_2 3,\ 2}$

(2)　右の図のように，円 O の弦 AB の端点 A における円の接線 AT と弦 AB が作る $\angle\mathrm{BAT}$ を考える．

直径 AC を引くと，

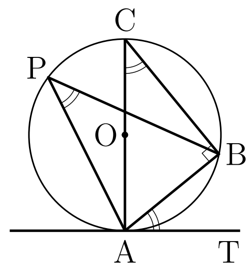


$$\angle\mathrm{BAT}+\angle\mathrm{CAB}=90^\circ$$
$$\angle\mathrm{ACB}+\angle\mathrm{CAB}=90^\circ$$

となるから，次が成り立つ．

$$\angle\mathrm{BAT}=\angle\mathrm{ACB}$$

ここで，$\angle\mathrm{ACB}$ は弧 AB の円周角であるから，右の図で



$$\angle\mathrm{BAT}=\angle\mathrm{APB}$$

となる．