

平成 25 年度 宮崎大学 2 次試験前期日程 (数学問題)  
 工 (物質環境化学を除く)・医 (医)・農・教育文化 (中学数学・中学社会・理科・技術・家庭・初等教育・特別支援・社会システム) 学部  
 平成 25 年 2 月 25 日

- 工学部 [1] [2] [3] [4] [5] 数 II・III・A・B (120 分)
- 医学部 [3] [6] [7] [8] [9] 数 II・III・A・B (120 分)
- 教育文化 (中学数学) 学部 [1] [3] [4] [6] [10] 数 II・III・A・B (120 分)
- 教育文化 (中学 [社会, 理科, 技術, 家庭], 初等教育, 特別支援, 社会システム) 学部・農学部 [5] [11] [12] 数 II・A・B (90 分)

**1** 次の各問に答えよ。ただし,  $\log x$  は  $x$  の自然対数を表す。

(1) 次の関数を微分せよ。

(i)  $y = \frac{x}{e^x}$

(ii)  $y = \log \left( \frac{2 + \sin x}{2 - \sin x} \right)$

(2) 次の定積分の値を求めよ。

(i)  $\int_0^1 \frac{2x^2 - x}{2x + 1} dx$

(ii)  $\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x \cos(x^2) dx$

(iii)  $\int_0^1 x^3 \log(x^2 + 1) dx$

(iv)  $\int_{-\pi}^{\pi} |e^{\cos x} \sin x| dx$

**2** 次の各問に答えよ。

(1) 方程式  $2 \cdot 8^x - 3 \cdot 4^{x+1} + 5 \cdot 2^{x+1} + 24 = 0$  を満たすような実数  $x$  をすべて求めよ。

(2) 数列  $\{a_n\}$  が  $a_1 = \sin^2 \theta$ ,  $a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) で定められているとき, 次の (i), (ii) に答えよ。

(i)  $a_2$  と  $a_3$  を,  $\theta$  を用いて表せ。

(ii)  $a_n$  が  $\theta$  と  $n$  を用いてどのように表されるのか予想し, それが正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

3 平面上に、1辺の長さが1の正三角形ABCをとり、 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ とおく。また、直線AC, BC上にそれぞれ点P, Qを $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\vec{a}$ ,  $\overrightarrow{CQ} = 2\vec{b}$ であるようにとる。線分PQの中点をRとし、直線AB上に点Dを $DR \perp PQ$ であるようにとる。このとき、次の各問に答えよ。

- (1)  $\overrightarrow{CR}$ を、 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ を用いて表せ。
- (2)  $\overrightarrow{DR}$ を、 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ を用いて表せ。
- (3) 直線DRと直線BCの交点をEとするとき、線分CEの長さを求めよ。

4 最初に袋の中に、赤球と白球が3個ずつ、合計6個入っている。この状態から次の①～③の一連の操作を行う。

- ① 袋の中から無作為に3個の球を取り出す。
- ② ①で取り出した球は袋に戻さず、取り出した赤球の数だけ白球を袋に補充し、取り出した白球の数だけ赤球を袋に補充する。
- ③ ①, ②の操作をもう一度繰り返す。

ただし、補充する赤球と白球は十分にあるものとする。①～③の操作の後に、袋の中にある赤球の個数を $a$ とする。このとき、次の各問に答えよ。

- (1)  $a = 3$ となる確率を求めよ。
- (2)  $a$ の期待値を求めよ。

5 座標平面上に、半円 $C: x^2 + y^2 = 4$  (ただし,  $x > 0$ )と放物線 $D: x^2 - 6y + 3 = 0$ がある。半円 $C$ 上の点 $P(2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$  (ただし,  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ )における半円 $C$ の接線を $l$ とするとき、次の各問に答えよ。

- (1) 半円 $C$ と放物線 $D$ との交点 $Q$ の座標を求めよ。
- (2) 直線 $l$ が放物線 $D$ に点 $R$ において接するとき、 $\theta$ の値と点 $R$ の座標を求めよ。
- (3) (2)のとき、半円 $C$ と放物線 $D$ および直線 $l$ によって囲まれる部分の面積を求めよ。

- 6**  $0 < r < 1$  を満たす実数  $r$  について、座標平面上に、2点  $P_1(1, 0)$ ,  $P_2(1, r)$  がある。これらから点  $P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ) を次の規則に従って定める。

点  $P_{n-1}$  から点  $P_n$  に向かう方向を時計の針の回転と逆の向きに  $90^\circ$  回転し、その方向に点  $P_n$  から距離  $r^n$  だけ進んだ点を  $P_{n+1}$  とする。

このとき、次の各問に答えよ。

- (1) 点  $P_4$ ,  $P_8$  の座標を、 $r$  を用いて表せ。
- (2)  $x = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{4m}$ ,  $y = \lim_{m \rightarrow \infty} y_{4m}$  とするとき、点  $P(x, y)$  の座標を、 $r$  を用いて表せ。
- (3) 実数  $r$  が  $0 < r < 1$  の範囲を動くとき、(2) の点  $P$  の軌跡を座標平面上に図示せよ。

- 7** 次の各問に答えよ。

- (1) 方程式  $2 \cdot 8^x - 3 \cdot 4^{x+1} + 5 \cdot 2^{x+1} + 24 = 0$  を満たすような実数  $x$  をすべて求めよ。
- (2) 実数  $\theta$  に対し、関数  $f(\theta)$  と  $g(\theta)$  を、

$$f(\theta) = (\cos \theta)(\cos 2\theta)(\cos 3\theta), \quad g(\theta) = (\sin \theta)(\sin 2\theta)(\sin 3\theta)$$

とおくとき、次の (i), (ii) に答えよ。

- (i) 関数  $f(\theta)$ ,  $g(\theta)$  は、それぞれ

$$f(\theta) = p + q \cos 2\theta + r \cos 4\theta + s \cos 6\theta$$

$$g(\theta) = t + u \sin 2\theta + v \sin 4\theta + w \sin 6\theta$$

のように表されることを示せ。ただし、 $p, q, r, s, t, u, v, w$  は  $\theta$  によらない定数とする。

- (ii)  $0 \leq \theta \leq \pi$  のとき、方程式  $f(\theta) = g\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$  を満たすような  $\theta$  をすべて求めよ。

- 8**  $-1 < x < 1$  で定義される関数  $f(x) = 2x + \sqrt{5 - 5x^2}$  について、座標平面上の曲線  $C: y = f(x)$  を考える。このとき、次の各問に答えよ。

- (1) 曲線  $C$  は上に凸であることを示し、 $f(x)$  の最大値を求めよ。
- (2) 曲線  $C$  上の点のうち、原点  $O$  との距離が最大となる点を  $A$ , 最小となる点を  $B$  とするとき、 $A, B$  の座標をそれぞれ求めよ。
- (3) (2) で求めた点  $A, B$  について、線分  $OA$ , 線分  $OB$ , および曲線  $C$  で囲まれる部分の面積を求めよ。

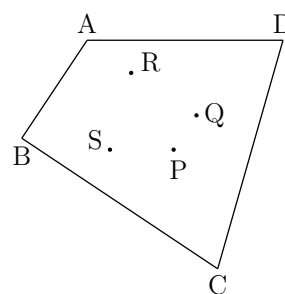
**9** 最初、数直線上の原点に点 P を置き、コインを 1 回投げるときに以下のように点 P の位置を定める。

- ① 点 P の座標が  $-2$  以上  $3$  以下のとき、コインの表が出れば正の向きに 1 だけ点 P を進め、裏が出れば負の向きに 1 だけ点 P を進める。
- ② 点 P の座標が  $-3$  または  $4$  のとき、コインの表裏にかかわらず点 P を動かさない。

コインを投げて ①, ② に従い点 P の位置を定める操作を 6 回行う。この 6 回の操作によって定めた点 P の最終的な位置の座標を  $a$  とする。ただし、コインの表と裏が出る確率はそれぞれ  $\frac{1}{2}$  とする。このとき、次の各問に答えよ。

- (1)  $a = -3$  となる確率と  $a = 4$  となる確率をそれぞれ求めよ。
- (2)  $a$  の期待値を求めよ。

**10** 右図のような四角形 ABCD について、すべての内角の大きさは  $180^\circ$  未満とする。△BCD の重心を P, △CDA の重心を Q, △DAB の重心を R, △ABC の重心を S とする。ただし、点 P と点 R は直線 AC 上になく、点 Q と点 S は直線 BD 上になくする。このとき、次の各問に答えよ。



- (1)  $AC \parallel RP$  を示せ。
- (2)  $AB \parallel QP$  を示せ。
- (3) 四角形 ABCD が円に内接するとき、4 点 P, Q, R, S は同一円周上にあることを示せ。

**11** 3 次の整式  $P(x)$  は、次の条件 1), 2), 3) を満たしている。

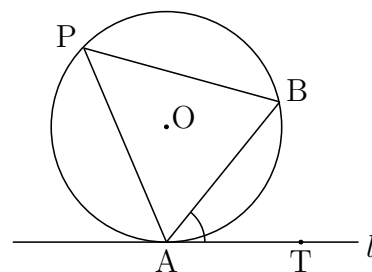
- 1)  $P(x)$  の  $x^3$  の係数は 1 である。
- 2)  $P(x)$  は  $(x - 1)^2$  で割り切れる。
- 3)  $P(x)$  を  $x + 1$  で割った余りと、 $x^2 - x - 2$  で割った余りは等しい。

このとき、次の各問に答えよ。

- (1)  $P(x)$  を求めよ。
- (2)  $\{P(x)\}^2$  を  $(x + 1)^2$  で割った余りを求めよ。

12 次の各問に答えよ.

- (1) 方程式  $2 \cdot 8^x - 3 \cdot 4^{x+1} + 5 \cdot 2^{x+1} + 24 = 0$  を満たすような実数  $x$  をすべて求めよ.
- (2) 右図のような点  $O$  を中心とする円において、弦  $AB$  と点  $A$  における接線  $l$  とのなす角  $\angle BAT$  は、その角内にある弧  $AB$  に対する円周角  $\angle APB$  に等しいことを証明せよ. ただし、 $\angle BAT$  は鋭角とする.



## 解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad (i) \quad y = \frac{x}{e^x} = xe^{-x} \text{ より } y' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

$$(ii) \quad y = \log \left( \frac{2 + \sin x}{2 - \sin x} \right) = \log(2 + \sin x) - \log(2 - \sin x) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\cos x}{2 + \sin x} - \frac{-\cos x}{2 - \sin x} \\ &= \frac{\cos x(2 - \sin x) + \cos x(2 + \sin x)}{(2 + \sin x)(2 - \sin x)} = \frac{4 \cos x}{4 - \sin^2 x} \end{aligned}$$

$$(2) \quad (i) \quad \int_0^1 \frac{2x^2 - x}{2x + 1} dx = \int_0^1 \left( x - 1 + \frac{1}{2x + 1} \right) dx$$

$$= \left[ \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} \log(2x + 1) \right]_0^1 = \frac{1}{2}(\log 3 - 1)$$

$$(ii) \quad \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x \cos(x^2) dx = \left[ \frac{1}{2} \sin(x^2) \right]_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

(iii)  $t = x^2 + 1$  とおくと

$x$	$0 \rightarrow 1$	$\frac{dt}{dx} = 2x$
$t$	$1 \rightarrow 2$	

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^3 \log(x^2 + 1) dx &= \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 \log(x^2 + 1) 2x dx \\ &= \int_1^2 \frac{1}{2} (t - 1) \log t dt = \int_1^2 \left( \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} \right)' \log t dt \\ &= \left[ \left( \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} \right) \log t \right]_1^2 - \int_1^2 \left( \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} \right) \frac{1}{t} dt \\ &= 0 - \left[ \frac{t^2}{8} - \frac{t}{2} \right]_1^2 = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

(iv)  $|e^{\cos x} \sin x|$  は偶関数であるから

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{\cos x} \sin x| dx &= 2 \int_0^{\pi} |e^{\cos x} \sin x| dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} e^{\cos x} \sin x dx \\ &= -2 \int_0^{\pi} e^{\cos x} (\cos x)' dx \\ &= -2 \left[ e^{\cos x} \right]_0^{\pi} = 2(e - e^{-1}) \end{aligned}$$



**2** (1)  $t = 2^x$  とおくと ( $t > 0$ ), 方程式  $2 \cdot 8^x - 3 \cdot 4^{x+1} + 5 \cdot 2^{x+1} + 24 = 0$  は

$$2t^3 - 12t^2 + 10t + 24 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t+1)(t-3)(t-4) = 0$$

$t > 0$  より  $t = 3, 4$  ゆえに  $2^x = 3, 4$  すなわち  $x = \log_2 3, 2$

(2) (i)  $a_1 = \sin^2 \theta$ ,  $a_2 = 4a_1(1 - a_1)$  より

$$\begin{aligned} a_2 &= 4 \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) \\ &= 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta = (2 \sin \theta \cos \theta)^2 = \mathbf{\sin^2 2\theta} \end{aligned}$$

$a_2 = \sin^2 2\theta$ ,  $a_3 = 4a_2(1 - a_2)$  より

$$\begin{aligned} a_3 &= 4 \sin^2 2\theta (1 - \sin^2 2\theta) \\ &= 4 \sin^2 2\theta \cos^2 2\theta = (2 \sin 2\theta \cos 2\theta)^2 = \mathbf{\sin^2 4\theta} \end{aligned}$$

(ii) 自然数  $n$  について,  $a_n = \sin^2(2^{n-1}\theta) \cdots (*)$  とする.

i)  $n = 1$  のとき,  $a_1 = \sin^2(2^0\theta) = \sin^2 \theta$   
よって,  $n = 1$  のとき,  $(*)$  が成り立つ.

ii)  $n = k$  のとき,  $a_k = \sin^2(2^{k-1}\theta)$  が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 4a_k(1 - a_k) = 4 \sin^2(2^{k-1}\theta) \{1 - \sin^2(2^{k-1}\theta)\} \\ &= 4 \sin^2(2^{k-1}\theta) \cos^2(2^{k-1}\theta) \\ &= \{2 \sin(2^{k-1}\theta) \cos(2^{k-1}\theta)\}^2 = \sin^2 2^k \theta \end{aligned}$$

よって,  $n = k + 1$  のときも  $(*)$  が成り立つ.

i), ii) より, すべての自然数  $n$  に対して,  $(*)$  が成り立つ. ■

$$\boxed{3} \quad (1) \quad \vec{CR} = \frac{1}{2}\vec{CP} + \frac{1}{2}\vec{CQ}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2} \cdot 2\vec{b} = \frac{1}{4}\vec{a} + \vec{b}$$

(2) Dは、直線AB上の点であるから、実数  $s$  を用いて

$$\vec{CD} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b}$$

とおくと

$$\vec{DR} = \vec{CR} - \vec{CD}$$

$$= \frac{1}{4}\vec{a} + \vec{b} - \{(1-s)\vec{a} + s\vec{b}\}$$

$$= \left(s - \frac{3}{4}\right)\vec{a} + (1-s)\vec{b}$$

$$\vec{PQ} = \vec{CQ} - \vec{CP}$$

$$= 2\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$$

$\triangle ABC$  は、1辺の長さが1の正三角形であるから

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$\vec{DR} \perp \vec{PQ}$  より、 $\vec{DR} \cdot \vec{PQ} = 0$  であるから

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(s - \frac{3}{4}\right)\vec{a} + (1-s)\vec{b} \right\} \cdot \left(2\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) = 0 \\ & -\frac{1}{2} \left(s - \frac{3}{4}\right) |\vec{a}|^2 + \left(\frac{5}{2}s - 2\right) \vec{a} \cdot \vec{b} + 2(1-s) |\vec{b}|^2 = 0 \\ & -\frac{1}{2} \left(s - \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{5}{2}s - 2\right) \cdot \frac{1}{2} + 2(1-s) = 0 \end{aligned}$$

ゆえに  $s = \frac{11}{10}$  よって  $\vec{DR} = \frac{7}{20}\vec{a} - \frac{1}{10}\vec{b}$

(3) (2)の結果から  $\vec{RD} = -\frac{7}{20}\vec{a} + \frac{1}{10}\vec{b}$

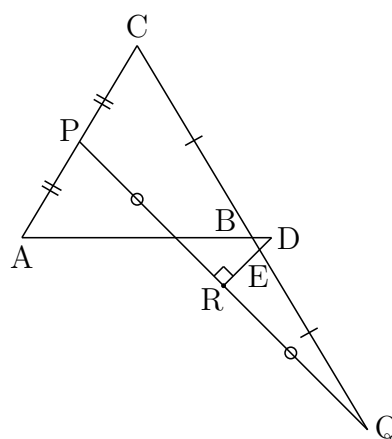
実数  $k$  を用いて、 $\vec{RE} = k\vec{RD}$  とおくと

$$\vec{CE} = \vec{CR} + \vec{RE} = \vec{CR} + k\vec{RD}$$

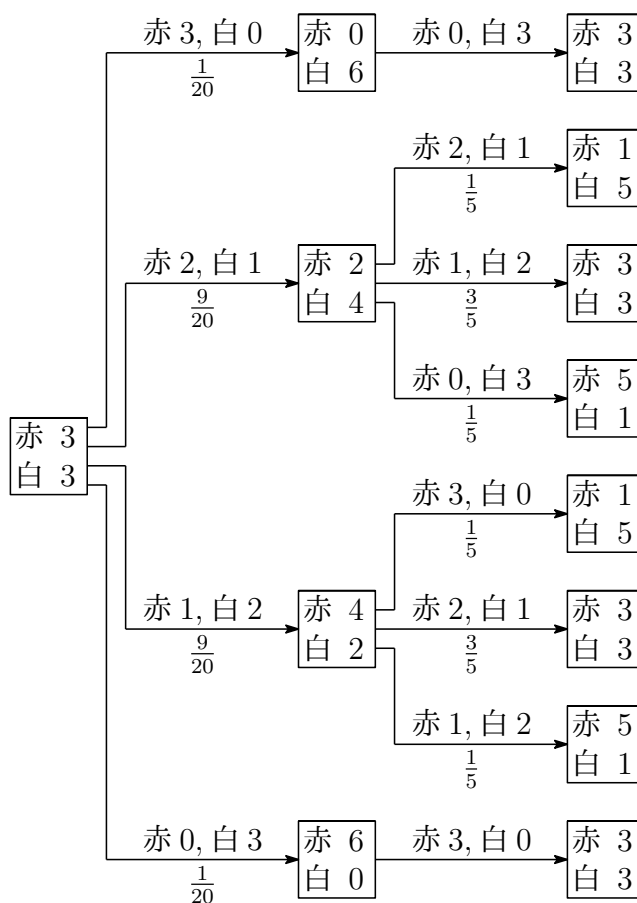
$$= \frac{1}{4}\vec{a} + \vec{b} + k \left(-\frac{7}{20}\vec{a} + \frac{1}{10}\vec{b}\right) = \left(\frac{1}{4} - \frac{7}{20}k\right)\vec{a} + \left(1 + \frac{1}{10}k\right)\vec{b}$$

Eは直線BC上の点であるから  $\frac{1}{4} - \frac{7}{20}k = 0$  すなわち  $k = \frac{5}{7}$

したがって  $\vec{CE} = \frac{15}{14}\vec{b}$   $|\vec{b}| = 1$  であるから  $CE = \frac{15}{14}$  ■



- 4 (1) 一連の操作による推移を示すと、次のようになる。



したがって、 $a = 3$ となる確率は

$$\frac{1}{20} + \frac{9}{20} \times \frac{3}{5} + \frac{9}{20} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{20} = \frac{16}{25}$$

(2)  $a = 1$ となる確率は  $\frac{9}{20} \times \frac{1}{5} + \frac{9}{20} \times \frac{1}{5} = \frac{9}{50}$

$a = 5$ となる確率は  $\frac{9}{20} \times \frac{1}{5} + \frac{9}{20} \times \frac{1}{5} = \frac{9}{50}$

よって、求める期待値は

$$1 \times \frac{9}{50} + 3 \times \frac{16}{25} + 5 \times \frac{9}{50} = 3$$

$a$	1	3	5	計
確率	$\frac{9}{50}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{9}{50}$	1



- 5 (1)  $C$  と  $D$  の共有点  $Q$  の座標は、 $x^2 + y^2 = 4 \cdots \textcircled{1}$ 、 $x^2 - 6y + 3 = 0 \cdots \textcircled{2}$  から  $x^2$  を消去すると

$$y^2 + 6y - 7 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (y+7)(y-1) = 0$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } \frac{1}{2} \leq y \leq 2 \text{ であるから} \quad y = 1$$

$$\text{したがって} \quad x^2 = 3 \quad \text{また} \quad x > 0 \text{ より} \quad x = \sqrt{3} \quad \text{よって} \quad \mathbf{Q}(\sqrt{3}, 1)$$

- (2) 放物線  $D$  の方程式は  $y = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}$  これを微分すると  $y' = \frac{1}{3}x$

$D$  上の接点  $R$  の座標を  $\left(a, \frac{1}{6}a^2 + \frac{1}{2}\right)$  とすると、接線  $l$  の方程式は

$$y = \frac{1}{3}a(x-a) + \frac{1}{6}a^2 + \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad 2ax - 6y - a^2 + 3 = 0$$

これが、原点を中心とする半径 2 の円に接するから

$$\frac{|-a^2 + 3|}{\sqrt{4a^2 + 36}} = 2 \quad \text{整理すると} \quad a^4 - 22a^2 - 135 = 0$$

$$\text{したがって} \quad (a^2 + 5)(a^2 - 27) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = \pm 3\sqrt{3}$$

このとき、接線の方程式は

$$\pm 6\sqrt{3}x - 6y - 27 + 3 = 0 \quad \text{すなわち} \quad \pm \sqrt{3}x - y = 4$$

これが、 $C: x^2 + y^2 = 4$  ( $x > 0$ ) 上の点  $P(2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$  ( $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) における接線

$$(2 \cos \theta)x + (2 \sin \theta)y = 4$$

に一致するので、 $a > 0$ 。したがって

$$a = 3\sqrt{3}, \quad 2 \cos \theta = \sqrt{3}, \quad 2 \sin \theta = -1, \quad l: y = \sqrt{3}x - 4$$

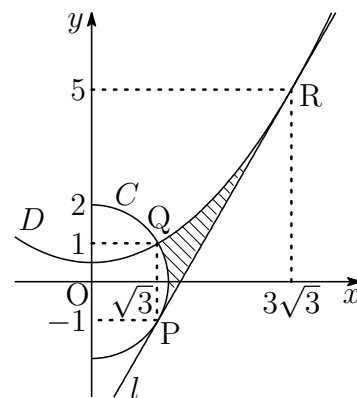
$$\text{よって} \quad \theta = -\frac{\pi}{6}, \quad \mathbf{R}(3\sqrt{3}, 5)$$

- (3) (2)の結果から  $\angle POQ = \frac{\pi}{3}$   
 $C$  と線分  $PQ$  で囲まれた図形の面積を  $S_1$  とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot 2^2 \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3} \end{aligned}$$

求める面積  $S$  は、図の斜線部分であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} \left\{ \left( \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2} \right) - (\sqrt{3}x - 4) \right\} dx - S_1 \\ &= \frac{1}{6} \int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} (x - 3\sqrt{3})^2 dx - \left( \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3} \right) \\ &= \frac{1}{18} \left[ (x - 3\sqrt{3})^3 \right]_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} \\ &= \frac{7\sqrt{3}}{3} - \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$



■

**6** (1)  $P_1(1, 0) \rightarrow P_2(1, r) \rightarrow P_3(1 - r^2, r) \rightarrow P_4(1 - r^2, r - r^3)$   
 $\rightarrow P_5(1 - r^2 + r^4, r - r^3) \rightarrow P_6(1 - r^2 + r^4, r - r^3 + r^5)$   
 $\rightarrow P_7(1 - r^2 + r^4 - r^6, r - r^3 + r^5) \rightarrow P_8(1 - r^2 + r^4 - r^6, r - r^3 + r^5 - r^7)$

よって  $P_4(1 - r^2, r - r^3),$   
 $P_8(1 - r^2 + r^4 - r^6, r - r^3 + r^5 - r^7)$

(2) (1)の結果から

$$x_{4m} = \sum_{k=1}^{2m} (-r^2)^{k-1} = \frac{1 - (-r^2)^{2m}}{1 - (-r^2)} = \frac{1 - r^{4m}}{1 + r^2}$$

$$y_{4m} = rx_{4m} = \frac{r(1 - r^{4m})}{1 + r^2}$$

上式および  $0 < r < 1$  により

$$x = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{4m} = \frac{1}{1 + r^2} \quad y = \lim_{m \rightarrow \infty} y_{4m} = \frac{r}{1 + r^2}$$

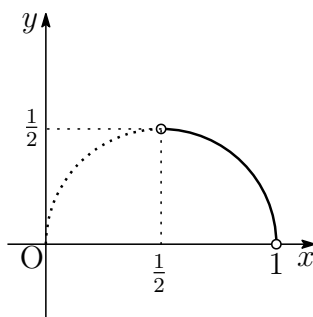
よって  $\left( \frac{1}{1 + r^2}, \frac{r}{1 + r^2} \right)$

(3)  $0 < r < 1$  より  $r = \tan \theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ ) とおくと

$$x = \frac{1}{1 + r^2} = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \cos^2 \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta$$

$$y = \frac{r}{1 + r^2} = \frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

よって、点Pの軌跡は、中心  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 、半径  $\frac{1}{2}$  の一部で、図の実線部分。



**7** (1)  $t = 2^x$  とおくと ( $t > 0$ ), 方程式  $2 \cdot 8^x - 3 \cdot 4^{x+1} + 5 \cdot 2^{x+1} + 24 = 0$  は

$$2t^3 - 12t^2 + 10t + 24 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t+1)(t-3)(t-4) = 0$$

$t > 0$  より  $t = 3, 4$  ゆえに  $2^x = 3, 4$  すなわち  $x = \log_2 3, 2$

$$\begin{aligned}
(2) \quad (i) \quad f(\theta) &= (\cos \theta)(\cos 2\theta)(\cos 3\theta) \\
&= \frac{1}{2}(\cos 3\theta + \cos \theta) \cos 3\theta \\
&= \frac{1}{2}(\cos^2 3\theta + \cos \theta \cos 3\theta) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}(\cos 6\theta + 1) + \frac{1}{2}(\cos 4\theta + \cos 2\theta) \right\} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \cos 4\theta + \frac{1}{4} \cos 6\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(\theta) &= (\sin \theta)(\sin 2\theta)(\sin 3\theta) \\
&= \frac{1}{2}(\cos \theta - \cos 3\theta) \sin 3\theta \\
&= \frac{1}{2}(\sin 3\theta \cos \theta - \sin 3\theta \cos 3\theta) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}(\sin 4\theta + \sin 2\theta) - \frac{1}{2} \sin 6\theta \right\} \\
&= \frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta - \frac{1}{4} \sin 6\theta
\end{aligned}$$

よって

$$p = q = r = s = \frac{1}{4}, \quad t = 0, \quad u = v = \frac{1}{4}, \quad w = -\frac{1}{4}$$

とすればよい.

(ii) (i) の結果から

$$\begin{aligned}
g\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{4} \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4} \sin(4\theta + \pi) - \frac{1}{4} \sin\left(6\theta + \frac{3}{2}\pi\right) \\
&= \frac{1}{4} \cos 2\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta + \frac{1}{4} \cos 6\theta
\end{aligned}$$

$$f(\theta) = g\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \text{ より}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \cos 4\theta + \frac{1}{4} \cos 6\theta = \frac{1}{4} \cos 2\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta + \frac{1}{4} \cos 6\theta$$

$$\text{ゆえに } \sin 4\theta + \cos 4\theta = -1 \quad \text{すなわち } \sin\left(4\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{ より, } \frac{\pi}{4} \leq 4\theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{17}{4}\pi \text{ であるから}$$

$$4\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi, \frac{13}{4}\pi, \frac{15}{4}\pi \quad \text{よって } \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{8}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{8}\pi$$

■

- 8 (1)  $g(x) = \sqrt{5 - 5x^2}$  ( $-1 < x < 1$ ) とおくと  $g(x) > 0$   
 $\{g(x)\}^2 = 5 - 5x^2$  を微分すると

$$2g(x)g'(x) = -10x \quad \text{ゆえに} \quad g(x)g'(x) = -5x \quad \cdots \textcircled{1}$$

さらに、 $\textcircled{1}$  を微分すると

$$\{g'(x)\}^2 + g(x)g''(x) = -5 \quad \text{ゆえに} \quad g''(x) = -\frac{5 + \{g'(x)\}^2}{g(x)} < 0$$

$$f(x) = 2x + g(x) \text{ であるから} \quad f''(x) = g''(x) < 0$$

したがって、曲線  $C: y = f(x)$  は上に凸である。

$$\textcircled{1} \text{ より } g'(x) = -\frac{5x}{g(x)} \text{ であるから} \quad f'(x) = 2 - \frac{5x}{g(x)} = \frac{2g(x) - 5x}{g(x)}$$

$$f'(x) = 0 \text{ のとき} \quad 2g(x) = 5x > 0$$

$$\text{両辺を平方すると} \quad \{2\sqrt{5 - 5x^2}\}^2 = 25x^2 \quad x > 0 \text{ より} \quad x = \frac{2}{3}$$

$$f''(x) < 0 \text{ であるから} \quad \text{最大値} \quad f\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \times \frac{2}{3} + \sqrt{5 - 5\left(\frac{2}{3}\right)^2} = 3$$

- (2)  $C$  上の点を  $P(x, 2x + g(x))$ ,  $h(x) = OP^2$  とすると ( $-1 < x < 1$ )

$$\begin{aligned} h(x) &= x^2 + \{2x + g(x)\}^2 \\ &= x^2 + 4x^2 + 4xg(x) + \{g(x)\}^2 = 5 + 4xg(x) \end{aligned}$$

これを微分すると

$$\begin{aligned} h'(x) &= 4g(x) + 4xg'(x) = 4g(x) + 4x \cdot \frac{-5x}{g(x)} \\ &= 4 \cdot \frac{\{g(x)\}^2 - 5x^2}{g(x)} = 4 \cdot \frac{5 - 5x^2 - 5x^2}{g(x)} = \frac{20(1 - 2x^2)}{g(x)} \end{aligned}$$

$h(x)$  の増減表は、次のようになる。

$x$	$(-1)$	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	(1)
$h'(x)$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	
$h(x)$	(5)	$\searrow$	$5 - 2\sqrt{5}$	$\nearrow$	$5 + 2\sqrt{5}$	$\searrow$	(5)

$P$  が  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  のとき、原点  $O$  との距離が最大となり、

$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  のとき、原点  $O$  との距離が最小となる。

$g\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{10}}{2}$  であるから

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}$$

よって  $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{10} + 2\sqrt{2}}{2}\right)$ ,  $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}{2}\right)$

(3)  $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{2x + g(x)}{x}$  とおいて, これを  $x$  で微分すると

$$\frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{g'(x)}{x} - \frac{g(x)}{x^2}$$

$$(1 + \tan^2\theta) \frac{d\theta}{dx} = -\frac{5}{g(x)} - \frac{g(x)}{x^2}$$

$$\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) \frac{d\theta}{dx} = -\frac{5x^2 + (5 - 5x^2)}{x^2g(x)}$$

$$r^2 \frac{d\theta}{dx} = -\frac{5}{g(x)} \quad (r^2 = x^2 + y^2)$$

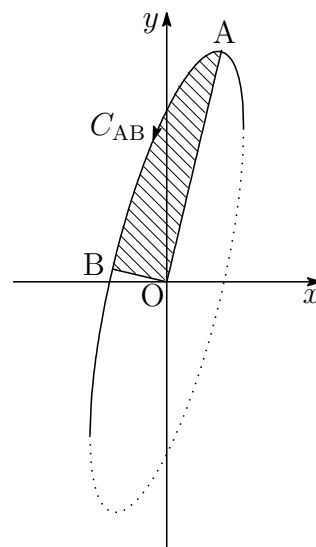
$C$  上の  $A$  から  $B$  への経路を  $C_{AB}$ , 求める面積を  $S$  とすると

$$S = \frac{1}{2} \int_{C_{AB}} r^2 d\theta$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{5}{g(x)} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{5}{\sqrt{5 - 5x^2}} dx$$

$$= \sqrt{5} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$



$x = \sin\varphi$  とおくと  $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\varphi$

$x$	$0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\varphi$	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

よって  $S = \sqrt{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi = \frac{\sqrt{5}}{4}\pi$

解説 行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  の固有値  $\lambda_1, \lambda_2$  は、固有方程式

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 = 0$$

の解で、それぞれに対する単位固有ベクトルを  $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  とし、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x' \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

とすると、2次曲線  $ax^2 + 2bxy + cy^2 = d$  は

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = d$$

となる (計算の詳細は、九大2010年一般前期理系数学[5]の解説を参照<sup>1)</sup>).  
 $y = 2x + \sqrt{5 - 5x^2}$  より  $y - 2x = \sqrt{5 - 5x^2}$  の両辺を平方して整理すると

$$9x^2 - 4xy + y^2 = 5 \quad \dots \textcircled{1}$$

となり、 $C$  はこの2次曲線の一部である.

行列  $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  の固有方程式は  $\lambda^2 - 10\lambda + 5 = 0$

この解を  $\lambda_1, \lambda_2$  とすると ( $\lambda_1 \lambda_2 = 5$ ),  $\textcircled{1}$  は楕円

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 5$$

を表す.

この楕円の面積は  $\pi \sqrt{\frac{5}{\lambda_1}} \sqrt{\frac{5}{\lambda_2}} = \sqrt{5}\pi$

A, B はそれぞれ楕円の長軸および短軸上の頂点である. 求める面積  $S$  は、この面積の  $\frac{1}{4}$  であるから

$$S = \sqrt{5}\pi \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{5}}{4}\pi$$

■

<sup>1)</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai\\_ri\\_2010.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2010.pdf)

- 9 (1) 6回の試行における場合の数は次の表になる.

		回数						
		0	1	2	3	4	5	6
a	4					1		4
	3				1		4	
	2			1		4		14
	1		1		3		10	
	0	1		2		6		19
	-1		1		3		9	
	-2			1		3		9
	-3				1		3	

よって  $a = -3$  となる確率は  $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{7}{32}$

$a = 4$  となる確率は  $\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{8}$

- (2) (1)の表から

$-2$  となる確率は  $9\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{9}{64}$

$0$  となる確率は  $19\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{19}{64}$

$2$  となる確率は  $14\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{14}{64}$

a	-3	-2	0	2	4	計
確率	$\frac{14}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{19}{64}$	$\frac{14}{64}$	$\frac{8}{64}$	1

よって, 求める期待値は

$$-3 \times \frac{14}{64} + (-2) \times \frac{9}{64} + 0 \times \frac{19}{64} + 2 \times \frac{14}{64} + 4 \times \frac{8}{64} = 0$$



- 10** (1) A, B, C, D, P, Q, R, S の位置ベクトルを  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{s}$  とすると

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) & \vec{q} &= \frac{1}{3}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{a}) \\ \vec{r} &= \frac{1}{3}(\vec{d} + \vec{a} + \vec{b}) & \vec{s} &= \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\end{aligned}$$

ゆえに  $\overrightarrow{RP} = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) - \frac{1}{3}(\vec{d} + \vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{3}(\vec{c} - \vec{a}) = \overrightarrow{AC}$

よって AC//RP

(2)  $\overrightarrow{QP} = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) - \frac{1}{3}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{a}) = \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad \dots \textcircled{1}$

よって AB//QP

- (3) (2) と同様にして

$$\overrightarrow{RQ} = \frac{1}{3}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{a}) - \frac{1}{3}(\vec{d} + \vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{3}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\overrightarrow{SR} = \frac{1}{3}(\vec{d} + \vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{3}(\vec{d} - \vec{c}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\overrightarrow{PS} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) = \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{d}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} \quad \dots \textcircled{4}$$

①, ② より  $\angle PQR = \angle ABC \quad \dots \textcircled{5}$

③, ④ より  $\angle RSP = \angle CDA \quad \dots \textcircled{6}$

四角形 ABCD は円に内接するので  $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ \quad \dots \textcircled{7}$

⑤, ⑥, ⑦ より  $\angle PQR + \angle RSP = 180^\circ$

よって, 4点 P, Q, R, S は同一円周上にある. ■

- 11** (1) 3次式  $P(x)$  の  $x^3$  の係数が1で  $(x-1)^2$  で割り切れるので

$$P(x) = (x-1)^2(x+a) \quad \cdots \textcircled{1}$$

とおける ( $a$  は定数).

$P(x)$  を  $x^2 - x - 2$  で割った商を  $Q(x)$  とし, 余りは,  $P(x)$  を  $x+1$  で割った余り  $P(-1)$  に等しいので, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 - x - 2)Q(x) + P(-1) \\ &= (x+1)(x-2)Q(x) + P(-1) \end{aligned}$$

これに  $x=2$  を代入すると  $P(2) = P(-1) \quad \cdots \textcircled{2}$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } (2-1)^2(2+a) = (-1-1)^2(-1+a)$$

これを解いて  $a=2$  よって  $\mathbf{P(x) = (x-1)^2(x+2)}$

- (2) (1) の結果から

$$P(x) = x^3 - 3x + 2 = (x+1)^2(x-2) + 4$$

したがって

$$\begin{aligned} \{P(x)\}^2 &= \{(x+1)^2(x-2) + 4\}^2 \\ &= (x+1)^4(x-2)^2 + 8(x+1)^2(x-2) + 16 \\ &= (x+1)^2\{(x+1)^2(x-2)^2 + 8(x-2)\} + 16 \end{aligned}$$

よって,  $\{P(x)\}^2$  を  $(x+1)^2$  で割った余りは **16** ■

- 12** (1)  $t = 2^x$  とおくと ( $t > 0$ ), 方程式  $2 \cdot 8^x - 3 \cdot 4^{x+1} + 5 \cdot 2^{x+1} + 24 = 0$  は

$$2t^3 - 12t^2 + 10t + 24 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t+1)(t-3)(t-4) = 0$$

$$t > 0 \text{ より } t = 3, 4 \quad \text{ゆえに} \quad 2^x = 3, 4 \quad \text{すなわち} \quad x = \log_2 3, 2$$

- (2) 右の図のように, 円  $O$  の弦  $AB$  の端点  $A$  における円の接線  $AT$  と弦  $AB$  が作る  $\angle BAT$  を考える.

直径  $AC$  を引くと,

$$\angle BAT + \angle CAB = 90^\circ$$

$$\angle ACB + \angle CAB = 90^\circ$$

となるから, 次が成り立つ.

$$\angle BAT = \angle ACB$$

ここで,  $\angle ACB$  は弧  $AB$  の円周角であるから, 右の図で

$$\angle BAT = \angle APB$$

となる.

