平成24年度　宮崎大学２次試験前期日程(数学問題)
工(物質環境化学を除く)・医(医)・農・教育文化(中学数学・中学社会・理科・技術・家庭・初等教育・特別支援・社会システム)学部
平成24年2月25日

- 工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ 数II・III・A・B (120分)
- 医学部は，$\boxed{2}$ ～ $\boxed{4}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$ 数II・III・A・B (120分)
- 教育文化(中学数学)学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{6}$, $\boxed{8}$, $\boxed{9}$ 数II・III・A・B (120分)
- 教育文化(中学[社会，理科，技術，家庭]，初等教育，特別支援，社会システム)学部・農学部は，$\boxed{5}$, $\boxed{10}$, $\boxed{11}$ 数II・A・B (90分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(1) 次の関数を微分せよ．

(a) $y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

(b) $y = \sin^3(2x+1)$

(2) 次の定積分の値を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-1}{x^2-2x+2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{4x}}{e^{2x}+2}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_1^e x\log\sqrt{x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos^2 x\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 5x\right)dx$

$\boxed{\mathbf{2}}$ a を正の定数とするとき，関数

$$y = \left(\log_2 \frac{1+\sin x}{a}\right)\left(\log_4 \frac{1+\sin x}{2a}\right) \quad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

の最小値を，a を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 四面体OABCにおいて，

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=4,\ \mathrm{OB}=3,\ \angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=60^\circ$$

とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とするとき，次の各問に答えよ．

(1) 内積$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$の値を求めよ．

(2) 平面ABC上の点Dを，直線ODが平面ABCに垂直に交わるようにとる．$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+p\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\overrightarrow{\mathrm{AC}}$とおくとき，$p$と$q$の値を求めよ．

(3) 四面体OABCの体積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$について，次の各問に答えよ．

(1) 曲線$y=f(x)$上の点$\mathrm{P}\left(\sqrt{3},\ \dfrac{1}{4}\right)$における接線$l$の方程式を求めよ．

(2) 曲線$y=f(x)$と接線lとの共有点のうち，点Pと異なる点Qのx座標を求めよ．

(3) 曲線$y=f(x)$と接線lによって囲まれる部分の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 5人の生徒が袋を1つずつ持っている．どの生徒の袋の中にも，赤球，青球，白球がそれぞれ1個ずつ計3個入っている．
5人同時に各自の袋の中から1個球を取り出したとき，取り出した球の色が他の4人の取り出した球の色と異なっている人の数をkとする．ただし，どの色の球も同じ確率で取り出されるものとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 赤球，青球，白球を取り出した人が，それぞれ1人，1人，3人である確率を求めよ．

(2) $k=2$である確率を求めよ．

(3) $k=1$である確率を求めよ．

(4) kの期待値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ nを自然数とする．1つの袋に白球がn個と赤球が2個，合わせて$n+2$個の球が入っている．この袋から，$n+1$個の球を1個ずつ取り出し，左から1列に順に並べる．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 並べた列に赤球が2個入っている確率を，nを用いて表せ．

(2) 2個の赤球の間にある白球の個数をkとする．ただし，並べた列に赤球が2個入っていない場合は，$k=0$とする．このとき，kの期待値が1以上となる最小のnの値を求めよ．

7 次の各問に答えよ．

(1) 右図 I において，点 O を中心とする円の半径を R とする．この円の弦 XY 上の任意の点を P とするとき，等式

$$\mathrm{OP}^2 = R^2 - \mathrm{XP}\cdot\mathrm{YP}$$

が成り立つことを示せ．

図 I

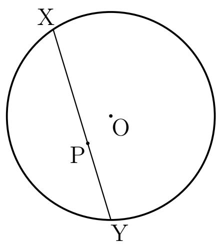
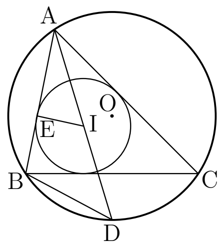


図 II



(2) 右図 II の △ABC の外心を O，内心を I とする．△ABC の外接円，内接円の半径をそれぞれ R，r とする．また，直線 AI と △ABC の外接円の，点 A と異なる交点を D，△ABC の内接円と辺 AB との接点を E とする．このとき，次の (A)，(B)，(C) に答えよ．

(A) DB = DI であることを示せ．

(B) $\mathrm{AI}\cdot\mathrm{DI} = 2Rr$ であることを示せ．

(C) $\mathrm{OI}^2 = R^2 - 2Rr$ であることを示せ．

8 座標平面上に，2 つの放物線

$$C_1 : y = (x-t)^2 + t \qquad C_2 : y = -x^2 + 4$$

がある．ただし，t は実数とする．このとき，次の各問いに答えよ．

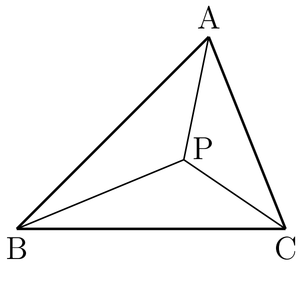
(1) C_1，C_2 が異なる 2 点で交わるとき，t の値の範囲を求めよ．

(2) (1) のとき，C_1 と C_2 の 2 つの交点を結ぶ線分の中点の軌跡を図示せよ．

9 右図のように，△ABC の内部に点 P をとる．△PAB，△PBC，△PCA の面積をそれぞれ S_{AB}，S_{BC}，S_{CA} とするとき，次の各問に答えよ．

(1) 点 P が △ABC の内心で，${S_{\mathrm{AB}}}^2 + {S_{\mathrm{CA}}}^2 = {S_{\mathrm{BC}}}^2$ が成り立つとき，∠BAC の大きさを求めよ．

(2) $S_{\mathrm{AB}} = S_{\mathrm{BC}} = S_{\mathrm{CA}}$ が成り立つとき，点 P は △ABC の重心であることを示せ．



$\boxed{\textbf{10}}$ 数列 $\{a_n\}$ が,

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3 - 2a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められているとき，次の各問に答えよ．

(1) a_2，a_3，a_4 の値を求めよ．

(2) 一般項 a_n を予想し，それが正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

$\boxed{\textbf{11}}$ 座標平面上の放物線 $y = x^2$ と直線 $y = kx + 1$ (k は実数) の 2 つの交点を P，Q とし，点 P の x 座標を α，点 Q の x 座標を β ($\alpha < \beta$) とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $\alpha + \beta$ および $\alpha\beta$ の値を，k を用いて表せ．

(2) 2 点 P，Q における放物線の接線をそれぞれ l，m とし，その交点を R とするとき，点 R の x 座標を，k を用いて表せ．

(3) 放物線と (2) の 2 つの接線 l，m で囲まれる部分の面積を，k を用いて表せ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) (a) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=\dfrac{2}{1+x^2}-1$ より　$y'=-\dfrac{2(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}=\boldsymbol{-\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}}$

(b) $y'=3\{\sin(2x+1)\}^2\{\sin(2x+1)\}'$

$=3\sin^2(2x+1)\cdot 2\cos(2x+1)=\boldsymbol{6\sin^2(2x+1)\cos(2x+1)}$

(2) (a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-1}{x^2-2x+2}dx=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{(x^2-2x+2)'}{x^2-2x+2}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\Big[\ \log(x^2-2x+2)\ \Big]_1^2=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2}$

(b) $\displaystyle\int_0^1\frac{e^{4x}}{e^{2x}+2}dx=\int_0^1\frac{e^{2x}(e^{2x}+2)-2e^{2x}}{e^{2x}+2}dx$

$\displaystyle=\int_0^1\left\{e^{2x}-\frac{(e^{2x}+2)'}{e^{2x}+2}\right\}dx=\Big[\ \frac{1}{2}e^{2x}-\log(e^{2x}+2)\ \Big]_0^1$

$\displaystyle=\boldsymbol{\frac{1}{2}(e^2-1)-\log(e^2+2)+\log 3}$

(c) $\displaystyle\int_1^e x\log\sqrt{x}\,dx=\int_1^e\frac{1}{2}x\log x\,dx=\int_1^e\left(\frac{1}{4}x^2\right)'\log x\,dx$

$\displaystyle=\Big[\ \frac{1}{4}x^2\log x\ \Big]_1^e-\int_1^e\frac{1}{4}x^2(\log x)'\,dx$

$\displaystyle=\frac{1}{4}e^2-\int_1^e\frac{1}{4}x\,dx$

$\displaystyle=\frac{1}{4}e^2-\Big[\ \frac{1}{8}x^2\ \Big]_1^e=\boldsymbol{\frac{1}{8}(e^2+1)}$

(d) $\cos^2 x\sin 3x=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)\sin 3x$

$=\dfrac{1}{2}\sin 3x+\dfrac{1}{2}\sin 3x\cos 2x$

$=\dfrac{1}{2}\sin 3x+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}(\sin 5x+\sin x)$

したがって　$\cos^2 x\sin 3x-\dfrac{1}{4}\sin 5x=\dfrac{1}{2}\sin 3x+\dfrac{1}{4}\sin x$

よって　(与式)$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}\sin 3x+\frac{1}{4}\sin x\right)dx$

$\displaystyle=\left[-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{4}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\boldsymbol{\frac{11}{24}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $t=\log_2(1+\sin x)$，$A=\log_2 a$ とおくと，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より　$0 \leqq t \leqq 1$

$$\begin{aligned}\log_2\frac{1+\sin x}{a} &= \log_2(1+\sin x)-\log_2 a\\ &= t-A\\ \log_4\frac{1+\sin x}{2a} &= \frac{1}{2}\log_2\frac{1+\sin x}{2a}\\ &= \frac{1}{2}\{\log_2(1+\sin x)-\log_2 a-1\}\\ &= \frac{1}{2}(t-A-1)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\left(\log_2\frac{1+\sin x}{a}\right)\left(\log_4\frac{1+\sin x}{2a}\right) &= \frac{1}{2}(t-A)(t-A-1)\\ &= \frac{1}{2}\{t^2-(2A+1)t+A(A+1)\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{t-\left(A+\frac{1}{2}\right)\right\}^2-\frac{1}{8}\end{aligned}$$

(i) $A+\dfrac{1}{2}<0$　すなわち　$0<a<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

$t=0$ で最小値は　$\dfrac{1}{2}A(A+1)=\dfrac{1}{2}(\log_2 a)(\log_2 a+1)$

(ii) $0 \leqq A+\dfrac{1}{2} \leqq 1$　すなわち　$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq a \leqq \sqrt{2}$ のとき

$t=\log_2\sqrt{2}a$ で最小値は　$-\dfrac{1}{8}$

(iii) $1<A+\dfrac{1}{2}$　すなわち　$\sqrt{2}<a$ のとき

$t=1$ で最小値は　$\dfrac{1}{2}A(A-1)=\dfrac{1}{2}(\log_2 a)(\log_2 a-1)$

よって，求める最小値は

$$\boldsymbol{\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\log_2 a)(\log_2 a+1) & \left(0<a<\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ -\dfrac{1}{8} & \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq a \leqq \sqrt{2}\right)\\ \dfrac{1}{2}(\log_2 a)(\log_2 a-1) & (\sqrt{2}<a)\end{cases}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $|\vec{a}|=|\vec{c}|=4$，$|\vec{b}|=3$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=60^\circ$ であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=4\cdot3\cdot\frac{1}{2}=6 \qquad \vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos 60^\circ=4\cdot4\cdot\frac{1}{2}=8 \qquad \vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ=3\cdot4\cdot\frac{1}{2}=6$$

したがって
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})\\&=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2\\&=6-6-8+4^2=\mathbf{8}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}|^2=6-4^2=-10\\&\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{c}-|\vec{a}|^2=8-4^2=-8\\&|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|a|^2=3^2-2\cdot6+4^2=13\\&|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|a|^2=4^2-2\cdot8+4^2=16\end{aligned}$$

上の諸式および(1)の結果を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+p\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=0\\\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+p|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+q\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=0\\-10+13p+8q&=0\quad\cdots①\end{aligned}$$

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ であるから

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+p\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=0\\\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+p\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+q|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2&=0\\-8+8p+16q&=0\quad\cdots②\end{aligned}$$

①，② を解いて　$\boldsymbol{p=\frac{2}{3}}$，$\boldsymbol{q=\frac{1}{6}}$

(3)　$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{13\cdot16-8^2}=6$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ に注意して

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2&=\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=4^2+\frac{2}{3}\cdot(-10)+\frac{1}{6}\cdot(-8)=8\end{aligned}$$

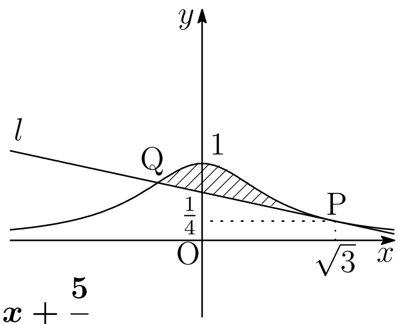
ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=2\sqrt{2}$

よって，四面体OABCの体積は　$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=\frac{1}{3}\cdot6\cdot2\sqrt{2}=\boldsymbol{4\sqrt{2}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ より　$y'=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

$x=\sqrt{3}$ のとき　$y'=-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

よって，点 $\mathrm{P}\left(\sqrt{3},\ \dfrac{1}{4}\right)$ における接線 l は



$y-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{\sqrt{3}}{8}\left(x-\sqrt{3}\right)$　よって　$\boldsymbol{y=-\dfrac{\sqrt{3}}{8}x+\dfrac{5}{8}}$

(2) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ と $y=\dfrac{\sqrt{3}}{8}x+\dfrac{5}{8}$ から y を消去すると

$$\frac{1}{1+x^2}=-\frac{\sqrt{3}}{8}x+\frac{5}{8}\quad \text{ゆえに}\quad \sqrt{3}x^3-5x^2+\sqrt{3}x+3=0$$

したがって　$(x-\sqrt{3})^2(\sqrt{3}x+1)=0$

P と異なる Q の x 座標は　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

(3) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq x\leqq\sqrt{3}$ のとき

$$\frac{1}{1+x^2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}x+\frac{5}{8}\right)=\frac{(x-\sqrt{3})^2(\sqrt{3}x+1)}{8(1+x^2)}\geqq 0$$

求める面積を S とすると

$$S=\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx-\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}x+\frac{5}{8}\right)dx$$

ここで，$\displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx$ について，

$x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようになる．

x	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\longrightarrow$	$\sqrt{3}$
θ	$-\frac{\pi}{6}$	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{3}$

ゆえに　$\displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{\pi}{2}$

また　$\displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{5}{8}\right)dx=\left[-\frac{\sqrt{3}}{16}x^2+\frac{5}{8}x\right]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

よって　　$S=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 赤球，青球，白球を取り出した人が，それぞれ 1 人，1 人，3 人の確率は

$$\frac{5!}{1!1!3!}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=\mathbf{\frac{20}{243}}$$

(2) 取り出した球の色が他の 4 人の取り出した球の色と異なっている人 (取り出した球の色がその人だけである) の人数が k 人であるのは，3 種類の球 X，Y，Z の個数をそれぞれ x，y，z とすると ($x \leqq y \leqq z$)，右の表のようになる．

x	y	z	k
0	0	5	0
0	1	4	1
0	2	3	0
1	1	3	2
1	2	2	1

$k=2$ となるのは $x=1$，$y=1$，$z=3$ のときで，X，Y，Z の球の色の決め方は 3 通りであるから

$$3\times\frac{5!}{1!1!3!}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=\mathbf{\frac{20}{81}}$$

(3) $k=1$ となるのは，次の (i)，(ii) の場合である．

(i) $x=0$，$y=1$，$z=4$ のとき，X，Y，Z の球の色の決め方は 6 通りであるから

$$6\times\frac{5!}{1!4!}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{10}{81}$$

(ii) $x=1$，$y=2$，$z=2$ のとき，X，Y，Z の球の色の決め方は 3 通りであるから

$$3\times\frac{5!}{1!2!2!}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{30}{81}$$

よって，求める確率は $\quad \dfrac{10}{81}+\dfrac{30}{81}=\mathbf{\dfrac{40}{81}}$

(4) (1)，(2) の結果から，$k=0$ となる確率は

$$1-\left(\frac{20}{81}+\frac{40}{81}\right)=\frac{21}{81}$$

よって，求める期待値は

$$0\times\frac{21}{81}+1\times\frac{40}{81}+2\times\frac{20}{81}=\mathbf{\frac{80}{81}}$$

k	0	1	2	計
$P(k)$	$\frac{21}{81}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{20}{81}$	1

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 白球 n 個，赤球 2 個の計 $n+2$ 個の球を 1 列に並べ，右端にある球を袋の中の球と考えると，並べ方の総数は ${}_{n+2}\mathrm{C}_2$ 通り．赤球 2 個を右端以外に並べる場合は，${}_{n+1}\mathrm{C}_2$ 通り．よって，求める確率は

$$\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_2}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} = \frac{(n+1)n}{2} \times \frac{2}{(n+2)(n+1)} = \boldsymbol{\frac{n}{n+2}}$$

(2) 赤球 2 個とその間にある白球 k 個を含めた $k+2$ 個の 1 つのまとまりを A_k とし，これと残りの白球 $n-k$ 個を 1 列に並べ，(1) と同様，A_k を右端以外に並べる場合の確率 $P(k)$ は $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$

$$P(k) = \frac{{}_{n-k}\mathrm{C}_1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} = \frac{2(n-k)}{(n+2)(n+1)}$$

したがって，期待値 $E(n)$ は

$$\begin{aligned}
E(n) &= \sum_{k=0}^{n-1} kP(k) = \sum_{k=0}^{n-1} k \times \frac{2(n-k)}{(n+1)(n+2)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{2(n-k)}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^{n} (2nk - 2k^2) \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left\{ 2n\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - 2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \right\} \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \times \frac{1}{3}n(n+1)(n-1) \\
&= \frac{n(n-1)}{3(n+2)}
\end{aligned}$$

$E(n) \geqq 1$ より　$\dfrac{n(n-1)}{3(n+2)} \geqq 1$　整理すると　$n(n-4) \geqq 6$　$\cdots(*)$

$1 \leqq n \leqq 4$ のとき　$n(n-4) \leqq 0$

$n=5$ のとき　$n(n-4) = 5$

$n=6$ のとき　$n(n-4) = 12$

よって，$(*)$ をみたす最小の n は　**6**

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) 直線 OP と円の交点を S，T とすると，方べきの定理により

$$\mathrm{XP}\cdot\mathrm{YP} = \mathrm{SP}\cdot\mathrm{TP} = (R - \mathrm{OP})(R + \mathrm{OP}) = R^2 - \mathrm{OP}^2$$

よって　　$\mathrm{OP}^2 = R^2 - \mathrm{XP}\cdot\mathrm{YP}$

図 I

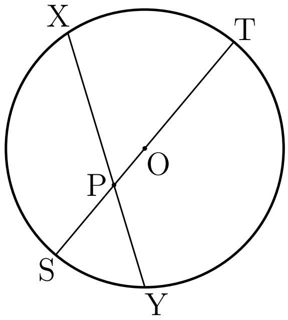
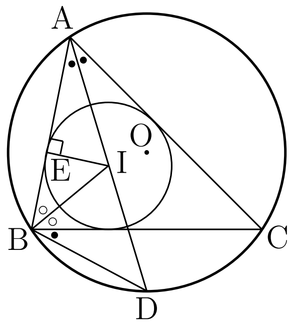


図 II



(2) (A) $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$A = 2\alpha$，$B = 2\beta$ とする．
$\angle\mathrm{CAD}$，$\angle\mathrm{CBD}$ は，弦 CD に対する円周角であるから

$$\angle\mathrm{CAD} = \angle\mathrm{CBD} \quad \text{ゆえに} \quad \angle\mathrm{DBI} = \alpha + \beta \quad \cdots ①$$

$\angle\mathrm{DIB}$ は，$\angle\mathrm{AIB}$ の外角であるから

$$\angle\mathrm{DIB} = \angle\mathrm{IAB} + \angle\mathrm{IBA} = \alpha + \beta \quad \cdots ②$$

①，② より $\triangle\mathrm{DBI}$ は，二等辺三角形であるから　$\mathrm{DB} = \mathrm{DI}$

(B) $r = \mathrm{IE}$ であるから，$\triangle\mathrm{AIE}$ について　$\mathrm{AI}\sin\alpha = r \quad \cdots ③$

$\triangle\mathrm{ABD}$ に正弦定理を適用すると　$\dfrac{\mathrm{DB}}{\sin\alpha} = 2R$

(A) の結果から $\mathrm{DB} = \mathrm{DI}$ であるから　$\dfrac{\mathrm{DI}}{\sin\alpha} = 2R \quad \cdots ④$

③，④ の辺々をかけると　　$\mathrm{AI}\cdot\mathrm{DI} = 2Rr$

(C) 図 I の X，Y，P に図 II の A，D，I をそれぞれ適用すると，
(1) の結果から

$$\mathrm{OI}^2 = R^2 - \mathrm{AI}\cdot\mathrm{DI}$$

これに (B) の結果を代入すると　　$\mathrm{OI}^2 = R^2 - 2Rr$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $C_1 : y=(x-t)^2+t$ と $C_2 : y=-x^2+4$ から y を消去すると

$(x-t)^2+t=-x^2+4$　整理すると　$2x^2-2tx+t^2+t-4=0$　$\cdots(*)$

2 次方程式 $(*)$ の判別式を D とすると

$$D/4=(-t)^2-2(t^2+t-4)=-t^2-2t+8=-(t+4)(t-2)$$

C_1，C_2 が異なる 2 点で交わるので，$D>0$ より

$$-(t+4)(t-2)>0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-4<t<2}$$

(2) 2 次方程式 $(*)$ の 2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=t, \qquad \alpha\beta=\frac{t^2+t-4}{2}$$

C_1，C_2 の 2 つの交点 $(\alpha,-\alpha^2+4)$，$(\beta,-\beta^2+4)$ の中点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は

$$\begin{aligned} x&=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{t}{2} \\ y&=\frac{(-\alpha^2+4)+(-\beta^2+4)}{2}=\frac{-(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta+8}{2} \\ &=\frac{-t^2+(t^2+t-4)+8}{2}=\frac{t+4}{2} \end{aligned}$$

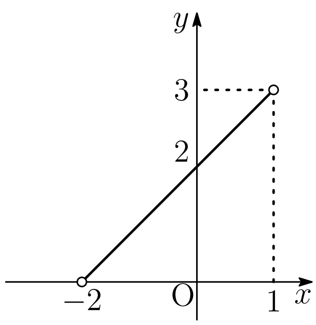
上の 2 式から t を消去すると　$y=x+2$

また，(1) の結果から　$-2<\dfrac{t}{2}<1$

したがって，求める軌跡の方程式は

$$y=x+2 \ \ (-2<x<1)$$

よって，軌跡は右の図のようになる．



$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$ とし，$\triangle\mathrm{ABC}$ の内接円の半径を r とすると

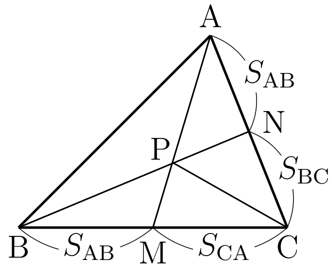
$$S_{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}cr,\quad S_{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}ar,\quad S_{\mathrm{CA}}=\frac{1}{2}br$$

これらを ${S_{\mathrm{AB}}}^2+{S_{\mathrm{CA}}}^2={S_{\mathrm{BC}}}^2$ に代入すると

$$\left(\frac{1}{2}cr\right)^2+\left(\frac{1}{2}br\right)^2=\left(\frac{1}{2}ar\right)^2 \quad \text{ゆえに} \quad c^2+b^2=a^2$$

よって　$\angle\mathbf{BAC}=\mathbf{90^\circ}$

(2) 直線 AP と辺 BC の交点を M，直線 BP と辺 CA の交点を N とすると



$$\mathrm{BM}:\mathrm{MC}=S_{\mathrm{AB}}:S_{\mathrm{CA}},$$
$$\mathrm{CN}:\mathrm{NA}=S_{\mathrm{BC}}:S_{\mathrm{AB}}$$

$S_{\mathrm{AB}}=S_{\mathrm{BC}}=S_{\mathrm{CA}}$ であるとき，M，N は，それぞれ辺 BC，CA の中点である．このとき，P は中線 AM と BN の交点であるから，P は $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心である．

補足 上の図において，メネラウスの定理により

$$\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{MC}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AN}}\cdot\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{PB}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{PB}}=\frac{S_{\mathrm{CA}}}{S_{\mathrm{AB}}+S_{\mathrm{BC}}}$$

したがって

$$\begin{aligned}(S_{\mathrm{AB}}+S_{\mathrm{BC}})\overrightarrow{\mathrm{PN}}+S_{\mathrm{CA}}\overrightarrow{\mathrm{PB}}&=\vec{0}\\ (S_{\mathrm{AB}}+S_{\mathrm{BC}})\cdot\frac{S_{\mathrm{BC}}\overrightarrow{\mathrm{PA}}+S_{\mathrm{AB}}\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{S_{\mathrm{AB}}+S_{\mathrm{BC}}}+S_{\mathrm{CA}}\overrightarrow{\mathrm{PB}}&=\vec{0}\\ S_{\mathrm{BC}}\overrightarrow{\mathrm{PA}}+S_{\mathrm{CA}}\overrightarrow{\mathrm{PB}}+S_{\mathrm{AB}}\overrightarrow{\mathrm{PC}}&=\vec{0}\end{aligned}$$

一般に，$\triangle\mathrm{ABC}$ の内部の点 P について

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$$

であるとき，$S_{\mathrm{BC}}:S_{\mathrm{CA}}:S_{\mathrm{AB}}=\alpha:\beta:\gamma$

また，$\mathrm{P}(\vec{p})$，$\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ とすると

$$\vec{p}=\frac{\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ (1) $a_2 = \dfrac{1}{3-2a_1} = \dfrac{1}{3-2\cdot\frac{1}{3}} = \mathbf{\dfrac{3}{7}}$

$a_3 = \dfrac{1}{3-2a_2} = \dfrac{1}{3-2\cdot\frac{3}{7}} = \mathbf{\dfrac{7}{15}}$

$a_4 = \dfrac{1}{3-2a_3} = \dfrac{1}{3-2\cdot\frac{7}{15}} = \mathbf{\dfrac{15}{31}}$

(2) (1) の結果から，$a_n = \dfrac{2^n-1}{2^{n+1}-1} \cdots (*)$ と予想する．

(i) $n=1$ のとき　$a_1 = \dfrac{2^1-1}{2^2-1} = \dfrac{1}{3}$

よって，$n=1$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{1}{3-2a_k} = \frac{1}{3-2\cdot\frac{2^k-1}{2^{k+1}-1}} \\ &= \frac{2^{k+1}-1}{3(2^{k+1}-1)-2(2^k-1)} = \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+2}-1} \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも，$(*)$ が成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数 n について $(*)$ が成り立つ．

解説 $a_{n+1} = \dfrac{1}{3-2a_n}$ より，$c = \dfrac{1}{3-2c}$ を解くと　$c = 1,\ \dfrac{1}{2}$

したがって　$a_{n+1} - 1 = \dfrac{2(a_n-1)}{3-2a_n}$,　$a_{n+1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{a_n - \frac{1}{2}}{3-2a_n}$

上の 2 式から　$\dfrac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}-\frac{1}{2}} = 2\cdot\dfrac{a_n-1}{a_n-\frac{1}{2}}$

ゆえに　$\dfrac{a_n-1}{a_n-\frac{1}{2}} = 2^{n-1} \times \dfrac{a_1-1}{a_1-\frac{1}{2}} = 2^{n-1}\cdot 4 = 2^{n+1}$

よって　$a_n = \dfrac{2^n-1}{2^{n+1}-1}$

11 (1) $y=x^2$ と $y=kx+1$ から y を消去すると

$$x^2=kx+1 \quad \text{ゆえに} \quad x^2-kx-1=0 \quad \cdots(*)$$

2 次方程式 $(*)$ の 2 つの解が α，β であるから，解と係数の関係により

$$\boldsymbol{\alpha+\beta=k,\quad \alpha\beta=-1}$$

(2) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$

$\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$ における接線 l の方程式は

$$y-\alpha^2=2\alpha(x-\alpha)+\alpha^2 \quad \text{すなわち} \quad y=2\alpha x-\alpha^2 \quad \cdots ①$$

同様に，$\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$ における接線 m の方程式は　$y=2\beta x-\beta^2 \quad \cdots ②$

①，② を解いて　$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，　$y=\alpha\beta$

(1) の結果より　$\mathrm{R}\left(\dfrac{k}{2},-1\right)$　よって，R の x 座標は　$\boldsymbol{\dfrac{k}{2}}$

(3) (1) の結果から，$\alpha<\beta$ より　$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{k^2+4}$

直線 $y=kx+1$ 上の点で x 座標が $\dfrac{k}{2}$ である点を $\mathrm{S}\left(\dfrac{k}{2},\ \dfrac{k^2}{2}+1\right)$ とすると

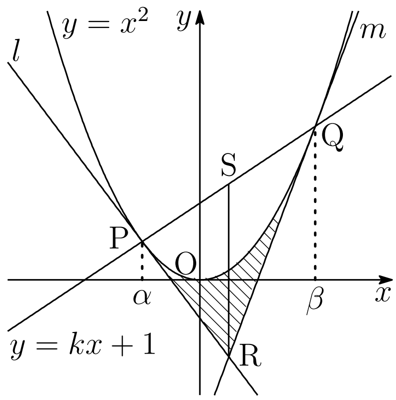
$$\mathrm{RS}=\left(\frac{k^2}{2}+1\right)-(-1)=\frac{1}{2}(k^2+4)$$

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\mathrm{RS}\cdot(\beta-\alpha)=\frac{1}{4}(k^2+4)^{\frac{3}{2}}$$

(1) の結果から，直線 PQ は

$$y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$$

であるから，直線 PQ と放物線 $y=x^2$ で囲まれた部分の面積 S は



$$\begin{aligned} S&=\int_\alpha^\beta[\{(\alpha+\beta)x-\alpha\beta\}-x^2]dx\\ &=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx\\ &=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(k^2+4)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

求める面積は[1]　$\triangle\mathrm{PQR}-S=\dfrac{1}{4}(k^2+4)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{6}(k^2+4)^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{12}(k^2+4)^{\frac{3}{2}}}$

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf $\boxed{4}$ を参照.