

平成 23 年度 宮崎大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
 工 (物質環境化学を除く)・医 (医)・農・教育文化 (中学数学・中学社会・理科・技術・家庭・初等教育・特別支援・社会システム) 学部
 平成 23 年 2 月 25 日

- 工学部は, $\boxed{1} \sim \boxed{5}$ 数 II・III・A・B (120 分)
- 医学部は, $\boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{6} \sim \boxed{8}$ 数 II・III・A・B (120 分)
- 農 (森林緑地・応用生物・海洋生物・畜産草地)・教育文化 (中学数学) 学部は, $\boxed{1}, \boxed{4}, \boxed{6}, \boxed{9}, \boxed{10}$ 数 II・III・A・B (120 分)
- 教育文化 (中学社会, 理科, 技術, 家庭, 初等教育, 特別支援, 社会システム) 学部・農 (植物生産・獣医) 学部は, $\boxed{11} \sim \boxed{13}$ 数 II・A・B (90 分)

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ。ただし, $\log x$ は x の自然対数を表す。

(1) 次の関数を微分せよ。

(a) $y = e^{\sqrt{x}}$

(b) $y = \frac{\log |\cos x|}{x}$

(2) 次の定積分の値を求めよ。

(a) $\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x \tan(x^2) dx$

(b) $\int_0^{\frac{1}{3}} x e^{3x} dx$

(c) $\int_e^{e^e} \frac{1}{x \log x} dx$

(d) $\int_2^3 \frac{x^2 + 1}{x(x + 1)} dx$

2 座標平面上において、点 $A(0, 1)$ を中心とし原点 O を通る円 C_1 について、点 $B(0, -1)$ から引いた 2 本の接線の接点を P, Q とする。ただし、点 P の x 座標は正とする。さらに、 y 軸に関して対称な放物線 C_2 が直線 BP と直線 BQ にそれぞれ点 P と点 Q で接するものとする。このとき、次の各問に答えよ。

- (1) 2 点 P, Q の座標を求めよ。
- (2) 放物線 C_2 を表す方程式を求めよ。
- (3) 点 A から放物線 C_2 上の各点までの距離は 1 以上であることを示せ。
- (4) 円 C_1 の原点 O を含む弧 PQ と放物線 C_2 で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

3 自然数 n について、 a_n を \sqrt{n} 以下の整数のうち最大のものとするとき、次の各問に答えよ。

- (1) a_1, a_2, a_3, a_4 の値を求めよ。
- (2) 自然数 m について、 $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_{m^2}$ を、 m を用いて表せ。

4 各辺の長さが 1 の正三角形 OAB がある。 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおき、線分 AB を $1:2$ に内分する点を C とする。さらに、2 点 P, Q は、正の実数 k, l について、 $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OQ} = l\overrightarrow{OC}$ を満たすものとする。このとき、次の各問に答えよ。

- (1) 3 点 A, P, Q が一直線上にあるとき、 k と l の関係式を求めよ。
- (2) 3 点 A, P, Q が一直線上にないものとし、 $\triangle APQ$ の重心が $\angle AOB$ の二等分線上にあるとする。このとき、 k と l の関係式を求めよ。
- (3) (2) のもとで、 $AP = AQ$ となるとき、 k の値を求めよ。

5 $P(x)$ は、 x^5 の係数が 1 であるような 5 次式とする。 $P(x)$ を $x^2 - x - 6$ で割ったときの商を $Q(x)$, $Q(x)$ を $x - 2$ で割ったときの商を $R(x)$ とおく。

$$P(-2) = -10, \quad P(3) = 5, \quad Q(2) = Q(-2) = R(-3) = 2$$

であるとき、次の各問に答えよ。

- (1) $P(x)$ を $x^2 - x - 6$ で割ったときの余りを求めよ。
- (2) $R(x)$ を求めよ。
- (3) $P(x)$ を求め、展開して降べきの順に整理せよ。

6 100点と書かれたカード、50点と書かれたカード、10点と書かれたカードがそれぞれ2枚ずつ入った1つの袋の中から1枚ずつカードを取り出す。取り出したカードは袋の中にもどさないものとする。10点のカードが初めて取り出されたとき、このカードも含めて取り出されたカードの合計枚数を k とする。この k 枚のカードの合計点を S とする。ただし、どのカードも取り出される確率は等しいものとする。このとき、次の各問に答えよ。

(1) $k = 1, 2, 3, 4, 5$ となるときの確率をそれぞれ求めよ。

(2) S の期待値を求めよ。

7 次の各問に答えよ。

(1) 方程式 $(\sqrt{2} + 1)^x + (\sqrt{2} - 1)^x = 6$ について、(A), (B)に答えよ。

(A) $(\sqrt{2} + 1)^x = \alpha$, $(\sqrt{2} - 1)^x = \beta$ とするとき、 $\alpha\beta$ の値を求めよ。

(B) 方程式の解のうち最大のものを m とするとき、 m の値を求めよ。

(2) $t > 4$ を満たすすべての t について、不等式

$$(\log_2 t)^2 - b \log_2 t + 2 > 0$$

が成り立つ b の範囲を求めよ。

8 方程式 $\tan x = x$ について、次の各問に答えよ。ただし、必要であれば、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ を満たす x について、不等式 $\sin x < x < \tan x$ が成り立つことを用いてもよい。

(1) 各自然数 n について、 $n\pi - \frac{\pi}{2} < x < n\pi + \frac{\pi}{2}$ の範囲に方程式 $\tan x = x$ の解がただ1つ存在することを示せ。

(2) 各自然数 n について、(1)で存在が示された解を x_n とする。このとき、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n \right)$ を求めよ。

9 座標平面上に点 $A(2, 0)$ をとる。円 $C: x^2 + y^2 = 1$ 上の任意の点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$)における接線を l とする。直線 l 上に点 Q を直線 AQ と l が直交するようにとる。ただし、直線 l が点 A を通るときは、点 Q は点 A であるとする。このとき、次の各問に答えよ。

(1) 点 Q の座標を、 θ を用いて表せ。

(2) 線分 PQ を、点 P が原点 O に一致するように平行移動したとき、点 Q が移動した点を $R(\theta)$ とする。ただし、点 P と点 Q が一致するときは、点 $R(\theta)$ は原点とする。このとき、点 $R(\theta)$ の軌跡は円になることを示し、その中心の座標と半径を求めよ。

10 次の各問に答えよ.

- (1) 方程式 $(\sqrt{2} + 1)^x + (\sqrt{2} - 1)^x = 6$ について, (A), (B) に答えよ.
 (A) $(\sqrt{2} + 1)^x = \alpha$, $(\sqrt{2} - 1)^x = \beta$ とするとき, $\alpha\beta$ の値を求めよ.
 (B) 方程式の解のうち最大のものを m とするとき, m の値を求めよ.
- (2) $t > 0$ を満たすすべての t について, 不等式

$$(\log_2 t)^2 - b \log_2 t + 2 > 0$$

が成り立つ b の範囲を求めよ.

11 次の各問に答えよ.

- (1) 次の各命題について, 真であれば証明し, 偽であれば反例を 1 つあげよ.
 (A) 実数 a について, $\sqrt{a^2}$ と a は等しい.
 (B) 正の実数 b と c について, $\sqrt[3]{b+c}$ と $\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$ は等しくない.
 (C) 実数 x について, $|2x - 1| = x$ ならば $x = 1$ である.
- (2) $\alpha = (\sqrt{3} + 1)^x$, $\beta = (\sqrt{3} - 1)^x$ とするとき, $\alpha\beta = 7$ となるような x の値を求めよ.

12 100 点と書かれたカードが 4 枚, 10 点と書かれたカードが 2 枚入った 1 つの袋の中から 1 枚ずつカードを取り出す. 取り出したカードは袋の中にもどさないものとする. 10 点のカードが初めて取り出されたとき, このカードも含めて取り出されたカードの合計枚数を k とする. この k 枚のカードの合計点を S とする. ただし, どのカードも取り出される確率は等しいものとする. このとき, 次の各問に答えよ.

- (1) $k = 1, 2, 3, 4, 5$ となるときの確率をそれぞれ求めよ.
 (2) S の期待値を求めよ.

13 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & (x \leq 0, x \geq 2 \text{ のとき}) \\ x^2 & (0 < x < 2) \end{cases}$$

とする. 座標平面上の曲線 $C: y = f(x)$ と直線 $l: y = x$ で囲まれる部分の面積を S とする. このとき, 次の各問に答えよ.

- (1) 曲線 C の概形をかけ.
 (2) S の値を求めよ.

正解

$$\boxed{1} \quad (1) \quad (a) \quad y' = (\sqrt{x})' e^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$$

$$(b) \quad y' = \left(\frac{1}{x}\right)' \log |\cos x| + \frac{1}{x} (\log |\cos x|)' \\ = -\frac{1}{x^2} \log |\cos x| + \frac{1}{x} \cdot \frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{\log |\cos x|}{x^2} - \frac{\tan x}{x}$$

$$(2) \quad (a) \quad \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x \tan(x^2) dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{(\cos x^2)'}{\cos x^2} dx \\ = -\frac{1}{2} \left[\log \cos x^2 \right]_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = -\frac{1}{2} \log \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \log 2$$

$$(b) \quad \int_0^{\frac{1}{3}} x e^{3x} dx = \left[\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right) e^{3x} \right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{9}$$

$$(c) \quad \int_e^{e^e} \frac{1}{x \log x} dx = \int_e^{e^e} \frac{(\log x)'}{\log x} = \left[\log(\log x) \right]_e^{e^e} = 1$$

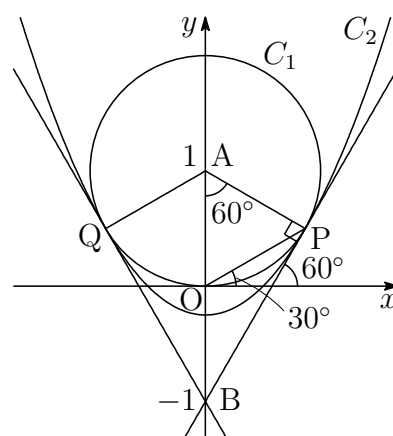
$$(d) \quad \int_2^3 \frac{x^2 + 1}{x(x+1)} dx = \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1}\right) dx \\ = \left[x + \log x - 2 \log(x+1) \right]_2^3 \\ = 1 + \log 3 - \log 2 - 2 \log 4 + 2 \log 3 \\ = 1 + 3 \log 3 - 5 \log 2$$

- $\boxed{2}$ (1) $\triangle ABP$ は $AB = 2$, $AP = 1$ の直角三角形であるから $\angle BAP = 60^\circ$
ゆえに, $\triangle AOP$ は 1 辺の長さが 1 の正三角形である. 直線 OP と x 軸の正の向きとなす角は 30° であるから, P の座標は

$$(\cos 30^\circ, \sin 30^\circ) \quad \text{すなわち} \quad P \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Q は, P と y 軸に関して対称であるから

$$Q \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$



- (2) $C_2: y = f(x)$ とすると, C_2 は y 軸に関して対称であるから, $f(x) = ax^2 + b$ とおける. P は C_2 上の点であるから

$$a \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + b = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad 3a + 4b = 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

直線 BP と x 軸の正の向きとなす角は 60°

$f'(x) = 2ax$ より, $f' \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \tan 60^\circ$ であるから

$$2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad \text{ゆえに} \quad a = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

②を①に代入して $b = -\frac{1}{4}$

よって, 求める C_2 の方程式 $y = x^2 - \frac{1}{4}$

- (3) C_2 上の任意の点を $R(t, t^2 - \frac{1}{4})$ とおくと

$$\begin{aligned} AR^2 &= t^2 + \left\{ \left(t^2 - \frac{1}{4} \right) - 1 \right\}^2 = t^2 + \left(t^2 - \frac{5}{4} \right)^2 \\ &= t^4 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{25}{16} = \left(t^2 - \frac{3}{4} \right)^2 + 1 \end{aligned}$$

よって, 点 A から放物線 C_2 上の各点までの距離は 1 以上である.

- (4) 直線 BP の方程式は, $y = \sqrt{3}x - 1$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \triangle ABP - \text{扇形 OAP} - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) - (\sqrt{3}x - 1) \right\} dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} - \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

よって $S = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$

3 (1) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 2$

(2) $a_n = k$ となるのは $k \leq \sqrt{n} < k+1$ ゆえに $k^2 \leq n \leq (k+1)^2 - 1$
これを, 満たす n は

$$\{(k+1)^2 - 1\} - k^2 + 1 = 2k + 1 \text{ (個)}$$

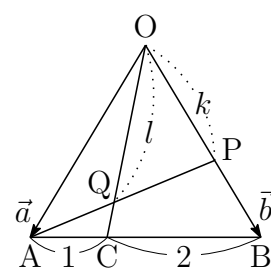
したがって

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{m-1} \{a_{k^2} + a_{k^2+1} + \cdots + a_{(k+1)^2-1}\} + a_{m^2} \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} k(2k+1) + m = \sum_{k=1}^{m-1} (2k^2 + k) + m \\ &= 2 \times \frac{1}{6} m(m-1)(2m-1) + \frac{1}{2} m(m-1) + m \\ &= \frac{1}{6} m(4m^2 - 3m + 5) \end{aligned}$$

4 (1) $\vec{OQ} = l\vec{OC} = l\left(\frac{2}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB}\right)$
 $= \frac{2l}{3}\vec{OA} + \frac{l}{3}\vec{OB} = \frac{2l}{3}\vec{OA} + \frac{l}{3k}\vec{OP}$

Qは, AP上の点であるから

$$\frac{2l}{3} + \frac{l}{3k} = 1 \text{ ゆえに } l(2k+1) = 3k$$



(2) $\triangle APQ$ の重心をGとすると

$$\begin{aligned} \vec{OG} &= \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OP} + \vec{OQ}) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \vec{a} + k\vec{b} + l \left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} \right) \right\} \\ &= \frac{2l+3}{9}\vec{a} + \frac{3k+l}{9}\vec{b} \end{aligned}$$

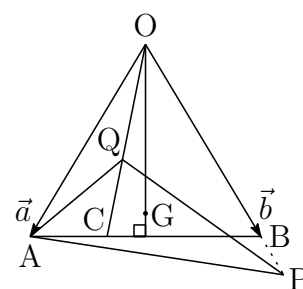
Gは, $\angle AOB$ の二等分線上にあるから

$$\frac{2l+3}{9} = \frac{3k+l}{9} \text{ ゆえに } l = 3(k-1)$$

A, P, Qは同一直線上にないから, 上式および(1)の結果から, 正数 k は

$$3(k-1)(2k+1) \neq 3k \text{ すなわち } k \neq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

また, $l > 0$ より $l = 3(k-1) \left(k > 1, k \neq \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)$



$$(3) \quad \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = k\vec{b} - \vec{a}$$

(2)の結果から

$$\overrightarrow{OQ} = l \left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} \right) = 3(k-1) \left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} \right)$$

$$= 2(k-1)\vec{a} + (k-1)\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA}$$

$$= 2(k-1)\vec{a} + (k-1)\vec{b} - \vec{a}$$

$$= (2k-3)\vec{a} + (k-1)\vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ であるから}$$

$$|\overrightarrow{AP}|^2 = |k\vec{b} - \vec{a}|^2 = k^2|\vec{b}|^2 - 2k\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2$$

$$= k^2 - k + 1$$

$$|\overrightarrow{AQ}|^2 = |(2k-3)\vec{a} + (k-1)\vec{b}|^2$$

$$= (2k-3)^2|\vec{a}|^2 + 2(2k-3)(k-1)\vec{a} \cdot \vec{b} + (k-1)^2|\vec{b}|^2$$

$$= (2k-3)^2 + (2k-3)(k-1) + (k-1)^2$$

$$= 7k^2 - 19k + 13$$

AP = AQ のとき

$$k^2 - k + 1 = 7k^2 - 19k + 13 \quad \text{ゆえに} \quad (k-1)(k-2) = 0$$

(2)の結果に注意して $\mathbf{k = 2}$

- 5 (1) 求める余りを $ax + b$ とおくと

$$P(x) = (x^2 - x - 6)Q(x) + ax + b$$

このとき, $Q(x)$ は最高次の係数が 1 の 3 次式である.

$P(-2) = -10$, $P(3) = 5$ であるから

$$-2a + b = -10, \quad 3a + b = 5$$

これを解いて $a = 3$, $b = -4$ よって, 求める余りは $3x - 4$

- (2) 3 次式 $Q(x)$ を $x - 2$ で割ったときの商 $R(x)$ は, 最高次の係数が 1 の 2 次式である. $Q(2) = 2$ より

$$Q(x) = (x - 2)R(x) + 2$$

また, $Q(-2) = 2$ であるから

$$(-2 - 2)R(-2) + 2 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad R(-2) = 0$$

2 次式 $R(x)$ は, $x + 2$ を因数にもつので, x^2 の係数に注意して

$$R(x) = (x + 2)(x + c)$$

とおける. $R(-3) = 2$ より

$$(-3 + 2)(-3 + c) = 2 \quad \text{ゆえに} \quad c = 1$$

よって $R(x) = (x + 2)(x + 1) = x^2 + 3x + 2$

- (3) (2) の結果から
$$Q(x) = (x - 2)(x^2 + 3x + 2) + 2$$

$$= x^3 + x^2 - 4x - 2$$

これを (1) の結果に代入すると

$$P(x) = (x^2 - x - 6)(x^3 + x^2 - 4x - 2) + 3x - 4$$

$$= x^5 - 11x^3 - 4x^2 + 29x + 8$$

6 (1) $k = j$ ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) となる確率を P_j とおくと

$$P_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P_2 = \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

$$P_3 = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$$

$$P_4 = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$

$$P_5 = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{15}$$

(2) $k = 1$ のとき $S = 10$ で, その確率は $P_1 = \frac{1}{3}$
 $k = 2$ のとき $S = 60, 110$ で, その確率は, ともに

$$\frac{2}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$$

$k = 3$ のとき $S = 110, 160, 210$ で, その確率は, それぞれ

$$\frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{30}$$

$$\frac{2}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} \times 2 = \frac{2}{15}$$

$$\frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{30}$$

$k = 4$ のとき, $S = 210, 260$ で, その確率は, ともに

$$\frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times 3 = \frac{1}{15}$$

$k = 5$ のとき, $S = 310$ で, その確率は $P_5 = \frac{1}{15}$

よって, 求める期待値を E とすると

$$\begin{aligned} E &= 10 \times \frac{1}{3} + 60 \times \frac{2}{15} + 110 \times \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{30} \right) + 160 \times \frac{2}{15} \\ &\quad + 210 \times \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{15} \right) + 260 \times \frac{1}{15} + 310 \times \frac{1}{15} = \mathbf{110} \end{aligned}$$

- 7 (1) (A) $\alpha\beta = (\sqrt{2}+1)^x(\sqrt{2}-1)^x = \{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\}^x = (2-1)^x = 1$
 (B) $\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = 1$ をみたす α, β を解とする 2 次方程式は

$$t^2 - 6t + 1 = 0 \quad \text{これを解くと} \quad t = 3 \pm \sqrt{2}$$

$$\text{方程式は} \quad \begin{cases} (\sqrt{2}+1)^x = 3 + 2\sqrt{2} \\ (\sqrt{2}-1)^x = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} (\sqrt{2}+1)^x = 3 - 2\sqrt{2} \\ (\sqrt{2}-1)^x = 3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{ここで} \quad 3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2}+1)^2 = (\sqrt{2}-1)^{-2}$$

$$3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2 = (\sqrt{2}+1)^{-2}$$

したがって、方程式の解は $x = \pm 2$ よって $m = 2$

- (2) $x = \log_2 t$ とおくと、 $t > 4$ より $x > 2$

与えられた不等式は $x^2 - bx + 2 > 0$

ここで、 $f(x) = x^2 - bx + 2 = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + 2$ とおくと

$$f(x) > 0 \quad (x > 2)$$

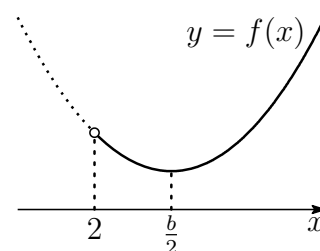
をみたせばよい。

- (i) $2 < \frac{b}{2}$ すなわち $4 < b$ のとき

$$f\left(\frac{b}{2}\right) > 0 \text{ より } -\frac{b^2}{4} + 2 > 0$$

$$\text{ゆえに } -2\sqrt{2} < b < 2\sqrt{2}$$

これは、 $b > 4$ に反するので、不適。

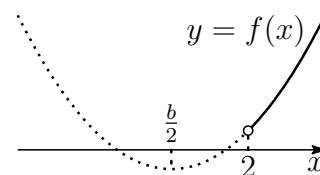


- (ii) $\frac{b}{2} \leq 2$ すなわち $b \leq 4$ のとき

$$f(2) \geq 0 \text{ より } 6 - 2b \geq 0$$

$b \leq 4$ に注意して、これを解くと $b \leq 3$

よって $b \leq 3$



8 (1) $f(x) = \tan x - x$ とおくと

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x \geq 0$$

が成り立つ (等号が成立のは, $x = n\pi$ のとき). また

$$\lim_{x \rightarrow n\pi - \frac{\pi}{2} + 0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow n\pi + \frac{\pi}{2} - 0} f(x) = \infty$$

であるから, $f(x)$ は, $n\pi - \frac{\pi}{2} < x < n\pi + \frac{\pi}{2}$ において, 単調増加である. したがって, $n\pi - \frac{\pi}{2} < x < n\pi + \frac{\pi}{2}$ において $f(x) = 0$, すなわち $\tan x = x$ をみたす解はただ1つ存在する.

(2) $f(n\pi) = -n\pi < 0$ から, $f(x_n) = 0$, すなわち $\tan x_n = x_n$ をみたす x_n は

$$n\pi < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2} \cdots \textcircled{1} \quad \text{ゆえに} \quad 0 < n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n < \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n \text{ とおくと, } 0 < \theta_n < \frac{\pi}{2} \text{ より } \sin \theta_n < \theta_n < \tan \theta_n \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{また } \tan \theta_n = \tan \left(n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n \right) = \tan \left(\frac{\pi}{2} - x_n \right) = \frac{1}{\tan x_n} = \frac{1}{x_n}$$

さらに, $\tan \theta_n = \frac{1}{x_n} \cdots \textcircled{3}$ の両辺を平方すると

$$\frac{\sin^2 \theta_n}{1 - \sin^2 \theta_n} = \frac{1}{x_n^2} \quad \text{ゆえに} \quad \sin \theta_n = \frac{1}{\sqrt{x_n^2 + 1}} \cdots \textcircled{4}$$

③, ④を②に代入すると

$$\frac{1}{\sqrt{x_n^2 + 1}} < \theta_n < \frac{1}{x_n} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_n}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2}}} < n\theta_n < \frac{1}{\frac{x_n}{n}} \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{1} \text{ より, } \pi < \frac{x_n}{n} < \pi \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \pi \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{5}, \textcircled{6} \text{ より } \lim_{n \rightarrow \infty} n\theta_n = \frac{1}{\pi} \quad \text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n \right) = \frac{1}{\pi}$$

- 9 (1) $C: x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ における接線 l の方程式は

$$x \cos \theta + y \sin \theta = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$A(2, 0)$ を通り, l に垂直な直線は

$$(x - 2) \sin \theta - y \cos \theta = 0$$

ゆえに $x \sin \theta - y \cos \theta = 2 \sin \theta \quad \dots \textcircled{2}$

Q は, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ の交点であるから

$$\begin{pmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ゆえに} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sin^2 \theta + \cos \theta \\ -2 \sin \theta \cos \theta + \sin \theta \end{pmatrix}$$

よって, Q の座標は $(2 \sin^2 \theta + \cos \theta, -2 \sin \theta \cos \theta + \sin \theta)$

- (2) $R(\theta)$ は, Q を x 軸方向に $-\cos \theta$, y 軸方向に $-\sin \theta$ だけ平行移動したものであるから, $R(\theta)$ の座標を (x, y) とすると

$$x = (2 \sin^2 \theta + \cos \theta) - \cos \theta = 2 \sin^2 \theta$$

$$= 1 - \cos 2\theta$$

$$y = (-2 \sin \theta \cos \theta + \sin \theta) - \sin \theta = -2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= -\sin 2\theta$$

したがって $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

$0 \leq 2\theta < 4\pi$ であるから, $R(\theta)$ の軌跡は 中心 $(1, 0)$, 半径 1 の円

- 10 (1) (A) $\alpha\beta = (\sqrt{2} + 1)^x (\sqrt{2} - 1)^x = \{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)\}^x = (2 - 1)^x = 1$

(B) $\alpha + \beta = 6$, $\alpha\beta = 1$ をみたす α, β を解とする 2 次方程式は

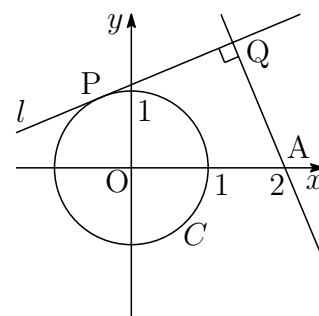
$$t^2 - 6t + 1 = 0 \quad \text{これを解くと} \quad t = 3 \pm \sqrt{2}$$

$$\text{方程式は} \quad \begin{cases} (\sqrt{2} + 1)^x = 3 + 2\sqrt{2} \\ (\sqrt{2} - 1)^x = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} (\sqrt{2} + 1)^x = 3 - 2\sqrt{2} \\ (\sqrt{2} - 1)^x = 3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{ここで} \quad 3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2 = (\sqrt{2} - 1)^{-2}$$

$$3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2 = (\sqrt{2} + 1)^{-2}$$

したがって, 方程式の解は $x = \pm 2$ よって $m = 2$



- (2) $x = \log_2 t$ とおくと、与えられた不等式は $x^2 - bx + 2 > 0$
 これがすべての x について成り立つので

$$(-b)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 < 0 \quad \text{これを解いて} \quad -2\sqrt{2} < b < 2\sqrt{2}$$

- 11** (1) (A) 偽, 反例 $a = -1$

(B) $b > 0, c > 0$ であるから

$$(\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})^3 - (\sqrt[3]{b+c})^3 = 3\sqrt[3]{b^2c} + 3\sqrt[3]{bc^2} > 0$$

よって $(\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})^3 > (\sqrt[3]{b+c})^3$ すなわち $\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} > \sqrt[3]{b+c}$

ゆえに、正の実数 b と c について、 $\sqrt[3]{b+c}$ と $\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$ は等しくない。

したがって、本命題は 真

(C) 偽, 反例 $x = \frac{1}{3}$

- (2) $\alpha\beta = (\sqrt{3} + 1)^x(\sqrt{3} - 1)^x = \{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)\}^x = 2^x$

ゆえに $2^x = 7$ よって $x = \log_2 7$

- 12** (1) $k = j$ ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) となる確率を P_j とおくと

$$P_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P_2 = \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

$$P_3 = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$$

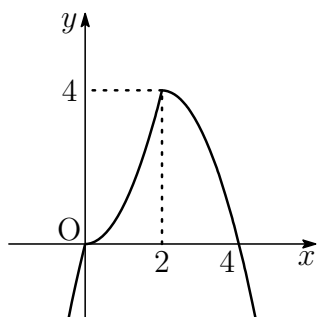
$$P_4 = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$

$$P_5 = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{15}$$

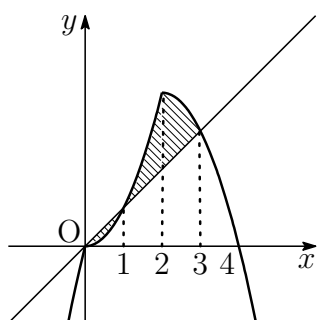
- (2) (1) の結果から、求める S の期待値を E とすると

$$E = 10 \times \frac{1}{3} + 110 \times \frac{4}{15} + 210 \times \frac{1}{5} + 310 \times \frac{2}{15} + 410 \times \frac{1}{15} = \frac{430}{3}$$

- 13 (1) 曲線 C の概形は、次のようになる。



- (2) 求める面積は、下の図の斜線部分である。



よって、求める面積 S は

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^1 (x - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx + \int_2^3 \{(-x^2 + 4x) - x\} dx \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_2^3 = \frac{13}{6}
 \end{aligned}$$