平成 23 年度　宮崎大学２次試験前期日程 (数学問題)
工 (物質環境化学を除く)・医 (医)・農・教育文化 (中学数学・中学社会・理科・技術・家庭・初等教育・特別支援・社会システム) 学部
平成 23 年 2 月 25 日

- 工学部　1 2 3 4 5 数 II・III・A・B (120 分)
- 医学部　3 4 6 7 8 数 II・III・A・B (120 分)
- 農 (森林緑地・応用生物・海洋生物・畜産草地)・教育文化 (中学数学) 学部
  1 4 6 9 10 数 II・III・A・B (120 分)
- 教育文化 (中学社会，理科，技術，家庭，初等教育，特別支援，社会システム) 学部・農 (植物生産・獣医) 学部　11 12 13 数 II・A・B (90 分)

1 次の各問に答えよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(1) 次の関数を微分せよ．

(a) $y = e^{\sqrt{x}}$

(b) $y = \dfrac{\log|\cos x|}{x}$

(2) 次の定積分の値を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x\tan(x^2)\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} xe^{3x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_e^{e^e} \frac{1}{x\log x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2+1}{x(x+1)}\,dx$

2 座標平面上において，点 A(0, 1) を中心とし原点 O を通る円 C_1 について，点 B(0, −1) から引いた 2 本の接線の接点を P，Q とする．ただし，点 P の x 座標は正とする．さらに，y 軸に関して対称な放物線 C_2 が直線 BP と直線 BQ にそれぞれ点 P と点 Q で接するものとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 2 点 P，Q の座標を求めよ．

(2) 放物線 C_2 を表す方程式を求めよ．

(3) 点 A から放物線 C_2 上の各点までの距離は 1 以上であることを示せ．

(4) 円 C_1 の原点 O を含む弧 PQ と放物線 C_2 で囲まれる部分の面積 S を求めよ．

3 自然数 n について，a_n を $\sqrt{n}$ 以下の整数のうち最大のものとするとき，次の各問に答えよ．

(1) a_1，a_2，a_3，a_4 の値を求めよ．

(2) 自然数 m について，$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_{m^2}$ を，m を用いて表せ．

4 各辺の長さが 1 の正三角形 OAB がある．$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおき，線分 AB を 1 : 2 に内分する点を C とする．さらに，2 点 P，Q は，正の実数 k，l について，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = l\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たすものとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 3 点 A，P，Q が一直線上にあるとき，k と l の関係式を求めよ．

(2) 3 点 A，P，Q が一直線上にないものとし，△APQ の重心が ∠AOB の二等分線上にあるとする．このとき，k と l の関係式を求めよ．

(3) (2) のもとで，AP = AQ となるとき，k の値を求めよ．

5 $P(x)$ は，x^5 の係数が 1 であるような 5 次式とする．$P(x)$ を $x^2 - x - 6$ で割ったときの商を $Q(x)$，$Q(x)$ を $x - 2$ で割ったときの商を $R(x)$ とおく．

$$P(-2) = -10, \quad P(3) = 5, \quad Q(2) = Q(-2) = R(-3) = 2$$

であるとき，次の各問に答えよ．

(1) $P(x)$ を $x^2 - x - 6$ で割ったときの余りを求めよ．

(2) $R(x)$ を求めよ．

(3) $P(x)$ を求め，展開して降べきの順に整理せよ．

6 100 点と書かれたカード，50 点と書かれたカード，10 点と書かれたカードがそれぞれ 2 枚ずつ入った 1 つの袋の中から 1 枚ずつカードを取り出す．取り出したカードは袋の中にもどさないものとする．10 点のカードが初めて取り出されたとき，このカードも含めて取り出されたカードの合計枚数を k とする．この k 枚のカードの合計点を S とする．ただし，どのカードも取り出される確率は等しいものとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ となるときの確率をそれぞれ求めよ．

(2) S の期待値を求めよ．

7 次の各問に答えよ．

(1) 方程式 $(\sqrt{2}+1)^x + (\sqrt{2}-1)^x = 6$ について，(A)，(B) に答えよ．

(A) $(\sqrt{2}+1)^x = \alpha$，$(\sqrt{2}-1)^x = \beta$ とするとき，$\alpha\beta$ の値を求めよ．

(B) 方程式の解のうち最大のものを m とするとき，m の値を求めよ．

(2) $t > 4$ を満たすすべての t について，不等式

$$(\log_2 t)^2 - b\log_2 t + 2 > 0$$

が成り立つ b の範囲を求めよ．

8 方程式 $\tan x = x$ について，次の各問に答えよ．ただし，必要であれば，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす x について，不等式 $\sin x < x < \tan x$ が成り立つことを用いてもよい．

(1) 各自然数 n について，$n\pi - \dfrac{\pi}{2} < x < n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ の範囲に方程式 $\tan x = x$ の解がただ 1 つ存在することを示せ．

(2) 各自然数 n について，(1) で存在が示された解を x_n とする．このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n\right)$ を求めよ．

9 座標平面上に点 A$(2,\ 0)$ をとる．円 $C : x^2+y^2 = 1$ 上の任意の点 P$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ における接線を l とする．直線 l 上に点 Q を直線 AQ と l が直交するようにとる．ただし，直線 l が点 A を通るときは，点 Q は点 A であるとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 点 Q の座標を，θ を用いて表せ．

(2) 線分 PQ を，点 P が原点 O に一致するように平行移動したとき，点 Q が移動した点を R(θ) とする．ただし，点 P と点 Q が一致するときは，点 R(θ) は原点とする．このとき，点 R(θ) の軌跡は円になることを示し，その中心の座標と半径を求めよ．

10 次の各問に答えよ．

(1) 方程式 $(\sqrt{2}+1)^x+(\sqrt{2}-1)^x=6$ について，(A)，(B) に答えよ．

(A) $(\sqrt{2}+1)^x=\alpha$，$(\sqrt{2}-1)^x=\beta$ とするとき，$\alpha\beta$ の値を求めよ．

(B) 方程式の解のうち最大のものを m とするとき，m の値を求めよ．

(2) $t>0$ を満たすすべての t について，不等式

$$(\log_2 t)^2-b\log_2 t+2>0$$

が成り立つ b の範囲を求めよ．

11 次の各問に答えよ．

(1) 次の各命題について，真であれば証明し，偽であれば反例を 1 つあげよ．

(A) 実数 a について，$\sqrt{a^2}$ と a は等しい．

(B) 正の実数 b と c について，$\sqrt[3]{b+c}$ と $\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$ は等しくない．

(C) 実数 x について，$|2x-1|=x$ ならば $x=1$ である．

(2) $\alpha=(\sqrt{3}+1)^x$，$\beta=(\sqrt{3}-1)^x$ とするとき，$\alpha\beta=7$ となるような x の値を求めよ．

12 100 点と書かれたカードが 4 枚，10 点と書かれたカードが 2 枚入った 1 つの袋の中から 1 枚ずつカードを取り出す．取り出したカードは袋の中にもどさないものとする．10 点のカードが初めて取り出されたとき，このカードも含めて取り出されたカードの合計枚数を k とする．この k 枚のカードの合計点を S とする．ただし，どのカードも取り出される確率は等しいものとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ となるときの確率をそれぞれ求めよ．

(2) S の期待値を求めよ．

13 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+4x & (x\leqq 0,\ x\geqq 2\ \text{のとき})\\ x^2 & (0<x<2)\end{cases}$$

とする．座標平面上の曲線 $C: y=f(x)$ と直線 $l: y=x$ で囲まれる部分の面積を S とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 曲線 C の概形をかけ．

(2) S の値を求めよ．

解答例

1 (1) (a) $y' = (\sqrt{x}\,)'e^{\sqrt{x}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}}$

(b) $y' = \left(\dfrac{1}{x}\right)'\log|\cos x| + \dfrac{1}{x}(\log|\cos x|)'$

$$= -\frac{1}{x^2}\log|\cos x| + \frac{1}{x}\cdot\frac{-\sin x}{\cos x} = \boldsymbol{-\frac{\log|\cos x|}{x^2} - \frac{\tan x}{x}}$$

(2) (a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x\tan(x^2)\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{(\cos x^2)'}{\cos x^2}\,dx$

$$= -\frac{1}{2}\Big[\ \log\cos x^2\ \Big]_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{4}\log 2}$$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} xe^{3x}\,dx = \left[\ \left(\frac{x}{3}-\frac{1}{9}\right)e^{3x}\ \right]_0^{\frac{1}{3}} = \boldsymbol{\frac{1}{9}}$

(c) $\displaystyle\int_e^{e^e} \frac{1}{x\log x}\,dx = \int_e^{e^e} \frac{(\log x)'}{\log x} = \Big[\ \log(\log x)\ \Big]_e^{e^e} = \boldsymbol{1}$

(d) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2+1}{x(x+1)}\,dx = \int_2^3 \left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}\right)dx$

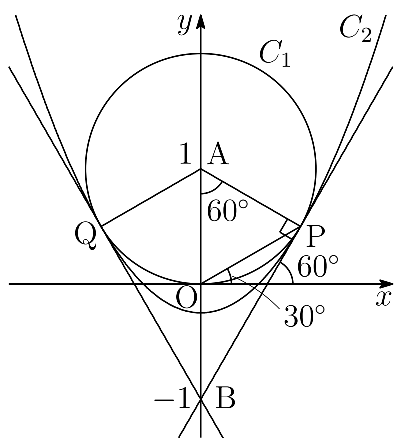
$$= \Big[\ x+\log x - 2\log(x+1)\ \Big]_2^3$$

$$= 1+\log 3-\log 2-2\log 4+2\log 3$$

$$= \boldsymbol{1+3\log 3-5\log 2}$$

■

2 (1) △ABP は AB $=2$，AP $=1$ の直角三角形であるから　∠BAP $=60^\circ$
ゆえに，△AOP は1辺の長さが1の正三角形である．直線 OP と x 軸の正の向きとなす角は 30° であるから，P の座標は



$(\cos 30^\circ,\ \sin 30^\circ)$　すなわち　$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}}\right)$

Q は，P と y 軸に関して対称であるから

$$\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}}\right)$$

(2) $C_2 : y = f(x)$ とすると，C_2 は y 軸に関して対称であるから，$f(x) = ax^2 + b$ とおける．P は C_2 上の点であるから

$$a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + b = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad 3a + 4b = 2 \quad \cdots ①$$

直線 BP と x 軸の正の向きとなす角は 60°

$f'(x) = 2ax$ より，$f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \tan 60^\circ$ であるから

$$2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad \text{ゆえに} \quad a = 1 \quad \cdots ②$$

② を ① に代入して　$b = -\dfrac{1}{4}$

よって，求める C_2 の方程式　　$\boldsymbol{y = x^2 - \dfrac{1}{4}}$

(3) C_2 上の任意の点を $\mathrm{R}(t,\ t^2 - \frac{1}{4})$ とおくと

$$\mathrm{AR}^2 = t^2 + \left\{\left(t^2 - \frac{1}{4}\right) - 1\right\}^2 = t^2 + \left(t^2 - \frac{5}{4}\right)^2$$
$$= t^4 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{25}{16} = \left(t^2 - \frac{3}{4}\right)^2 + 1$$

よって，点 A から放物線 C_2 上の各点までの距離は 1 以上である．

(4) 直線 BP の方程式は，$y = \sqrt{3}\,x - 1$ であるから

$$\frac{S}{2} = \triangle\mathrm{ABP} - \text{扇形 OAP} - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) - \left(\sqrt{3}\,x - 1\right)\right\} dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} - \left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6}$$

よって　　$\boldsymbol{S = \dfrac{3\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\pi}{3}}$　■

3 (1) $\boldsymbol{a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 1,\ a_4 = 2}$

(2) $a_n = k$ となるのは　$k \leqq \sqrt{n} < k+1$　ゆえに　$k^2 \leqq n \leqq (k+1)^2 - 1$

これを，満たす n は

$$\{(k+1)^2 - 1\} - k^2 + 1 = 2k+1\ (\text{個})$$

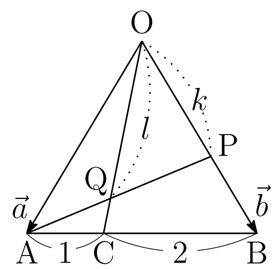
したがって

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{m-1}\{a_{k^2} + a_{k^2+1} + \cdots + a_{(k+1)^2-1}\} + a_{m^2} \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} k(2k+1) + m = \sum_{k=1}^{m-1}(2k^2+k) + m \\ &= 2 \times \frac{1}{6}m(m-1)(2m-1) + \frac{1}{2}m(m-1) + m \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}m(4m^2 - 3m + 5)} \end{aligned}$$

■

4 (1)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= l\overrightarrow{\mathrm{OC}} = l\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \\ &= \frac{2l}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{l}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{2l}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{l}{3k}\overrightarrow{\mathrm{OP}} \end{aligned}$$

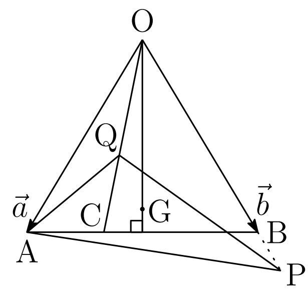


Q は，AP 上の点であるから

$$\frac{2l}{3} + \frac{l}{3k} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{l(2k+1) = 3k}$$

(2) △APQ の重心を G とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OG}} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}) \\ &= \frac{1}{3}\left\{\vec{a} + k\vec{b} + l\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right)\right\} \\ &= \frac{2l+3}{9}\vec{a} + \frac{3k+l}{9}\vec{b} \end{aligned}$$



G は，∠AOB の二等分線上にあるから

$$\frac{2l+3}{9} = \frac{3k+l}{9} \quad \text{ゆえに} \quad l = 3(k-1)$$

A，P，Q は同一直線上にないから，上式および (1) の結果から，正数 k は

$$3(k-1)(2k+1) \neq 3k \quad \text{すなわち} \quad k \neq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

また，$l > 0$ より　$\boldsymbol{l = 3(k-1)}$　$\boldsymbol{\left(k > 1,\ k \neq \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)}$

(3) $$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = k\vec{b} - \vec{a}$$

(2) の結果から

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= l\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) = 3(k-1)\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) \\
&= 2(k-1)\vec{a} + (k-1)\vec{b} \\
\overrightarrow{\mathrm{AQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
&= 2(k-1)\vec{a} + (k-1)\vec{b} - \vec{a} \\
&= (2k-3)\vec{a} + (k-1)\vec{b}
\end{aligned}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 &= |k\vec{b} - \vec{a}|^2 = k^2|\vec{b}|^2 - 2k\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2 \\
&= k^2 - k + 1 \\
|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2 &= |(2k-3)\vec{a} + (k-1)\vec{b}|^2 \\
&= (2k-3)^2|\vec{a}|^2 + 2(2k-3)(k-1)\vec{a}\cdot\vec{b} + (k-1)^2|\vec{b}|^2 \\
&= (2k-3)^2 + (2k-3)(k-1) + (k-1)^2 \\
&= 7k^2 - 19k + 13
\end{aligned}$$

$\mathrm{AP} = \mathrm{AQ}$ のとき

$$k^2 - k + 1 = 7k^2 - 19k + 13 \quad \text{ゆえに} \quad (k-1)(k-2) = 0$$

(2) の結果に注意して $\boldsymbol{k = 2}$ ■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 求める余りを $ax+b$ とおくと

$$P(x)=(x^2-x-6)Q(x)+ax+b$$

このとき，$Q(x)$ は最高次の係数が 1 の 3 次式である．
$P(-2)=-10$，$P(3)=5$ であるから

$$-2a+b=-10, \quad 3a+b=5$$

これを解いて　$a=3$，$b=-4$　よって，求める余りは　$\boldsymbol{3x-4}$

(2) 3 次式 $Q(x)$ を $x-2$ で割ったときの商 $R(x)$ は，最高次の係数が 1 の 2 次式である．$Q(2)=2$ より

$$Q(x)=(x-2)R(x)+2$$

また，$Q(-2)=2$ であるから

$$(-2-2)R(-2)+2=2 \quad \text{ゆえに} \quad R(-2)=0$$

2 次式 $R(x)$ は，$x+2$ を因数にもつので，x^2 の係数に注意して

$$R(x)=(x+2)(x+c)$$

とおける．$R(-3)=2$ より

$$(-3+2)(-3+c)=2 \quad \text{ゆえに} \quad c=1$$

よって　$R(x)=(x+2)(x+1)=\boldsymbol{x^2+3x+2}$

(3) (2) の結果から　$Q(x)=(x-2)(x^2+3x+2)+2$
$\qquad\qquad\qquad\qquad =x^3+x^2-4x-2$

これを (1) の結果に代入すると

$$\begin{aligned}P(x)&=(x^2-x-6)(x^3+x^2-4x-2)+3x-4\\&=\boldsymbol{x^5-11x^3-4x^2+29x+8}\end{aligned}$$

■

$\boxed{6}$ (1) $k=j$ $(j=1,2,3,4,5)$ となる確率を P_j とおくと

$$P_1=\frac{2}{6}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$
$$P_2=\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}=\mathbf{\frac{4}{15}}$$
$$P_3=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\mathbf{\frac{1}{5}}$$
$$P_4=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{2}{15}}$$
$$P_5=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}=\mathbf{\frac{1}{15}}$$

(2) $k=1$ のとき $S=10$ で，その確率は　$P_1=\frac{1}{3}$

$k=2$ のとき $S=60,\ 110$ で，その確率は，ともに

$$\frac{2}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$$

$k=3$ のとき $S=110,\ 160,\ 210$ で，その確率は，それぞれ

$$\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{30}$$
$$\frac{2}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}\times 2=\frac{2}{15}$$
$$\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{30}$$

$k=4$ のとき，$S=210,\ 260$ で，その確率は，ともに

$$\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times 3=\frac{1}{15}$$

$k=5$ のとき，$S=310$ で，その確率は　$P_5=\frac{1}{15}$

よって，求める期待値を E とすると

$$E=10\times\frac{1}{3}+60\times\frac{2}{15}+110\times\left(\frac{2}{15}+\frac{1}{30}\right)+160\times\frac{2}{15}$$
$$+210\times\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{15}\right)+260\times\frac{1}{15}+310\times\frac{1}{15}=\mathbf{110}$$

■

7 (1) (A) $\alpha\beta=(\sqrt{2}+1)^x(\sqrt{2}-1)^x=\{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\}^x=(2-1)^x=\mathbf{1}$

(B) $\alpha+\beta=6$，$\alpha\beta=1$ をみたす α，β を解とする 2 次方程式は

$$t^2-6t+1=0 \quad \text{これを解くと} \quad t=3\pm\sqrt{2}$$

方程式は $\begin{cases}(\sqrt{2}+1)^x=3+2\sqrt{2}\\(\sqrt{2}-1)^x=3-2\sqrt{2}\end{cases}$ $\begin{cases}(\sqrt{2}+1)^x=3-2\sqrt{2}\\(\sqrt{2}-1)^x=3+2\sqrt{2}\end{cases}$

ここで $3+2\sqrt{2}=(\sqrt{2}+1)^2=(\sqrt{2}-1)^{-2}$

$3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2=(\sqrt{2}+1)^{-2}$

したがって，方程式の解は　$x=\pm2$　よって　$\boldsymbol{m=2}$

(2) $x=\log_2 t$ とおくと，$t>4$ より　$x>2$

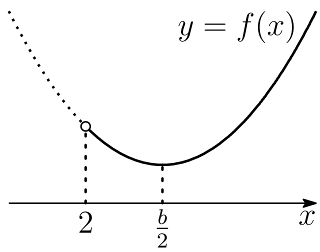
与えられた不等式は　$x^2-bx+2>0$

ここで，$f(x)=x^2-bx+2=\left(x-\dfrac{b}{2}\right)^2-\dfrac{b^2}{4}+2$ とおくと

$$f(x)>0 \quad (x>2)$$

をみたせばよい．

(i) $2<\dfrac{b}{2}$　すなわち　$4<b$ のとき

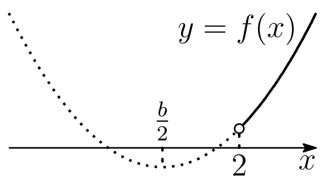


$f\left(\dfrac{b}{2}\right)>0$ より　$-\dfrac{b^2}{4}+2>0$

ゆえに　$-2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$

これは，$b>4$ に反するので，不適．

(ii) $\dfrac{b}{2}\leqq 2$　すなわち　$b\leqq 4$ のとき



$f(2)\geqq 0$ より　$6-2b\geqq 0$

$b\leqq 4$ に注意して，これを解くと　$b\leqq 3$

よって　$\boldsymbol{b\leqq 3}$

■

$\boxed{8}$ (1) $f(x)=\tan x-x$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1=\tan^2 x \geqq 0$$

が成り立つ (等号が成立のは，$x=n\pi$ のとき)．また

$$\lim_{x\to n\pi-\frac{\pi}{2}+0} f(x)=-\infty, \qquad \lim_{x\to n\pi+\frac{\pi}{2}-0} f(x)=\infty$$

であるから，$f(x)$ は，$n\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ において，単調増加である．したがって，$n\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ において $f(x)=0$，すなわち $\tan x=x$ をみたす解はただ 1 つ存在する．

(2) $f(n\pi)=-n\pi<0$ から，$f(x_n)=0$，すなわち $\tan x_n=x_n$ をみたす x_n は

$$n\pi<x_n<n\pi+\frac{\pi}{2}\cdots ① \quad \text{ゆえに} \quad 0<n\pi+\frac{\pi}{2}-x_n<\frac{\pi}{2}$$

$\theta_n=n\pi+\dfrac{\pi}{2}-x_n$ とおくと，$0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\sin\theta_n<\theta_n<\tan\theta_n\cdots ②$

また　$\tan\theta_n=\tan\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}-x_n\right)=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x_n\right)=\dfrac{1}{\tan x_n}=\dfrac{1}{x_n}$

さらに，$\tan\theta_n=\dfrac{1}{x_n}\cdots ③$ の両辺を平方すると

$$\frac{\sin^2\theta_n}{1-\sin^2\theta_n}=\frac{1}{{x_n}^2} \quad \text{ゆえに} \quad \sin\theta_n=\frac{1}{\sqrt{{x_n}^2+1}}\cdots ④$$

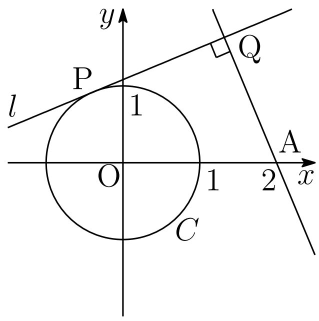
③，④ を ② に代入すると

$$\frac{1}{\sqrt{{x_n}^2+1}}<\theta_n<\frac{1}{x_n} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_n}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}}}<n\theta_n<\frac{1}{\frac{x_n}{n}}\cdots ⑤$$

① より，$\pi<\dfrac{x_n}{n}<\pi\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)$　ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\pi\cdots ⑥$

⑤，⑥ より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\theta_n=\frac{1}{\pi}$　よって　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} n\left(n\pi+\frac{\pi}{2}-x_n\right)=\frac{1}{\pi}}$ ■

9 (1) $C: x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ における接線 l の方程式は



$$x\cos\theta+y\sin\theta=1 \quad \cdots ①$$

$\mathrm{A}(2,\ 0)$ を通り，l に垂直な直線は

$$(x-2)\sin\theta-y\cos\theta=0$$

ゆえに　$x\sin\theta-y\cos\theta=2\sin\theta \quad \cdots ②$

Q は，①，② の交点であるから

$$\begin{pmatrix}\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sin\theta \\ 1\end{pmatrix}$$

ゆえに　$\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\sin\theta \\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sin^2\theta+\cos\theta \\ -2\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\end{pmatrix}$

よって，Q の座標は　$\boldsymbol{(2\sin^2\theta+\cos\theta,-2\sin\theta\cos\theta+\sin\theta)}$

(2) $\mathrm{R}(\theta)$ は，Q を x 軸方向に $-\cos\theta$，y 軸方向に $-\sin\theta$ だけ平行移動したものであるから，$\mathrm{R}(\theta)$ の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$\begin{aligned}x&=(2\sin^2\theta+\cos\theta)-\cos\theta=2\sin^2\theta \\ &=1-\cos 2\theta \\ y&=(-2\sin\theta\cos\theta+\sin\theta)-\sin\theta=-2\sin\theta\cos\theta \\ &=-\sin 2\theta\end{aligned}$$

したがって　　$(x-1)^2+y^2=1$

$0\leqq 2\theta<4\pi$ であるから，$\mathrm{R}(\theta)$ の軌跡は　**中心 (1，0)，半径 1 の円**　■

10 (1) (A) $\alpha\beta=(\sqrt{2}+1)^x(\sqrt{2}-1)^x=\{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\}^x=(2-1)^x=\mathbf{1}$

(B) $\alpha+\beta=6$，$\alpha\beta=1$ をみたす α，β を解とする 2 次方程式は

$$t^2-6t+1=0 \quad \text{これを解くと} \quad t=3\pm\sqrt{2}$$

方程式は　$\begin{cases}(\sqrt{2}+1)^x=3+2\sqrt{2} \\ (\sqrt{2}-1)^x=3-2\sqrt{2}\end{cases}$　$\begin{cases}(\sqrt{2}+1)^x=3-2\sqrt{2} \\ (\sqrt{2}-1)^x=3+2\sqrt{2}\end{cases}$

ここで　$3+2\sqrt{2}=(\sqrt{2}+1)^2=(\sqrt{2}-1)^{-2}$
　　　　$3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2=(\sqrt{2}+1)^{-2}$

したがって，方程式の解は　$x=\pm 2$　よって　$\boldsymbol{m=2}$

(2) $x=\log_2 t$ とおくと，与えられた不等式は　$x^2-bx+2>0$
これがすべての x について成り立つので

$$(-b)^2-4\cdot1\cdot2<0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}}$$

■

11 (1) (A) **偽**，反例 $a=-1$
(B) $b>0$，$c>0$ であるから

$$(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})^3-(\sqrt[3]{b+c})^3=3\sqrt[3]{b^2c}+3\sqrt[3]{bc^2}>0$$

よって　$(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})^3>(\sqrt[3]{b+c})^3$　すなわち　$\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}>\sqrt[3]{b+c}$
ゆえに，正の実数 b と c について，$\sqrt[3]{b+c}$ と $\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$ は等しくない．
したがって，本命題は　**真**
(C) **偽**，反例 $x=\dfrac{1}{3}$
(2) $\alpha\beta=(\sqrt{3}+1)^x(\sqrt{3}-1)^x=\{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)\}^x=2^x$
ゆえに　$2^x=7$　よって　$\boldsymbol{x=\log_2 7}$ ■

12 (1) $k=j$ $(j=1,2,3,4,5)$ となる確率を P_j とおくと

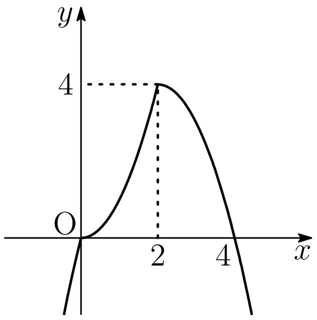
$$P_1=\frac{2}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$
$$P_2=\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}=\boldsymbol{\frac{4}{15}}$$
$$P_3=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\boldsymbol{\frac{1}{5}}$$
$$P_4=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{15}}$$
$$P_5=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{15}}$$

(2) (1) の結果から，求める S の期待値を E とすると

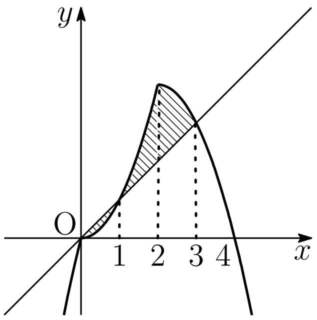
$$E=10\times\frac{1}{3}+110\times\frac{4}{15}+210\times\frac{1}{5}+310\times\frac{2}{15}+410\times\frac{1}{15}=\boldsymbol{\frac{430}{3}}$$

■

13 (1) 曲線 C の概形は，次のようになる．



(2) 求める面積は，下の図の斜線部分である．



よって，求める面積 S は

$$S=\int_0^1(x-x^2)dx+\int_1^2(x^2-x)dx+\int_2^3\{(-x^2+4x)-x\}dx$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_2^3=\mathbf{\frac{13}{6}}$$

■