平成 22 年度　宮崎大学２次試験前期日程 (数学問題)
工 (物質環境化学を除く)・医 (医)・農・教育文化 (中学数学・中学社会・理科・技術・家庭・初等教育・特別支援・社会システム) 学部
平成 22 年 2 月 25 日

- 工学部は， $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{5}$ 数 II・III・A・B (120 分)
- 医学部は， $\boxed{1}$, $\boxed{4}$ 〜 $\boxed{7}$ 数 II・III・A・B (120 分)
- 農 (森林緑地・応用生物・海洋生物・畜産草地)・教育文化 (中学数学) 学部は， $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$, $\boxed{8}$ 数 II・III・A・B (120 分)
- 教育文化 (中学社会，理科，技術，家庭，初等教育，特別支援，社会システム) 学部・農 (植物生産・獣医) 学部は， $\boxed{2}$, $\boxed{9}$, $\boxed{10}$ 数 II・A・B (90 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 次の関数を微分せよ．

(i) $y = e^{\sin x \cos x}$

(ii) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

(2) 次の定積分の値を求めよ．

(i) $\displaystyle\int_{\log \pi}^{\log(2\pi)} e^x \sin(e^x)\,dx$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}(x+1)\,dx$

(iii) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x \cos(4x)\,dx$

(iv) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x+1}{(x+2)(x+3)}\,dx$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 座標平面上に原点 O(0, 0)，点 A(-1, 3)，点 B(4, 8) がある．さらに，2 次関数 $y = f(x)$ のグラフ G と円 C はそれぞれ 3 点 O，A，B を通るものとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) 円 C の中心の座標および半径を求めよ．

(3) グラフ G と円 C との交点のうち，3 点 O，A，B 以外の点の座標を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 座標平面上に原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ と点 $\mathrm{A}(3,\ 0)$ がある．自然数 n に対して，点 $\mathrm{B}_n(0,\ n)$ をとり，$\triangle \mathrm{AB}_n\mathrm{O}$ の境界を除いた内部に含まれる格子点の個数を a_n とする．ただし，x 座標と y 座標がともに整数の点を格子点という．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $a_1,\ a_2,\ a_3$ の値を求めよ．

(2) 自然数 k に対して，$n = 3k$ とする．このとき，$\triangle \mathrm{AB}_n\mathrm{O}$ の境界を除いた内部に含まれる格子点のうち，x 座標が 1 であるものの個数を，k を用いて表せ．

(3) 自然数 k に対して，a_{3k} を，k を用いて表せ．

(4) $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とする．自然数 m に対して，S_{3m} を，m を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ すべての辺の長さが 1 の四角錐がある．この四角錐の頂点を O，底面を正方形 ABCD とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ をそれぞれ求めよ．

(3) 点 P，O，B，C が正四面体の頂点となるようなすべての点 P について，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 定積分 $I_n = \displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} (\log x)^n\,dx\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ について，次の各問に答えよ．

(1) I_1 の値を求めよ．

(2) 等式

$$I_{n+1} = \sqrt{e}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - (n+1)I_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つことを示せ．

(3) すべての自然数 n について，等式

$$I_n = (-1)^{n-1}n! + \sqrt{e}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}\frac{n!}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m$$

が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．ただし，$0! = 1$ とする．

6 袋の中に1と書かれた球がn個，2と書かれた球が2個，3と書かれた球が1個，4と書かれた球が1個，合計$n+4$個入っている．ただし，nは2以上の自然数とする．この袋の中の球をよくかきまぜていくつかの球を取り出すとき，次の各問に答えよ．

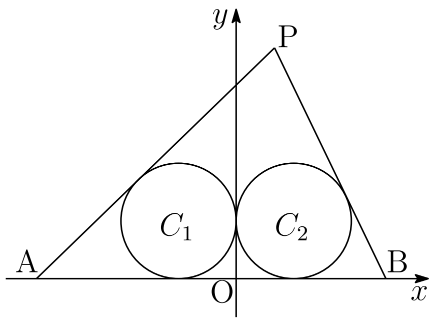
(1) 2個の球を取り出すとき，取り出した球の中に，1と書かれた球が少なくとも1個含まれる確率を，nを用いて表せ．

(2) 2個の球を取り出すとき，取り出した球に書かれている数の合計の期待値を，nを用いて表せ．

(3) 3個の球を取り出すとき，取り出した球に書かれている数の合計が6となる確率を，nを用いて表せ．

7 座標平面上に2つの円

$$C_1 : (x+1)^2+(y-1)^2=1$$
$$C_2 : (x-1)^2+(y-1)^2=1$$

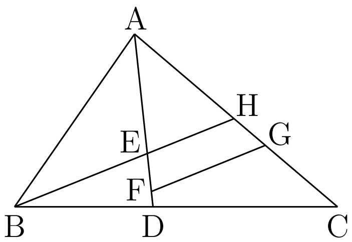


がある．不等式$y>2$が表す領域D内に点P$(a,\,b)$をとる．点Pから円C_1，C_2にひいた接線とx軸との交点をそれぞれA，Bとする．ただし，右図のように△PABは円C_1，C_2をともに含むものとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) bを定数とするとき，辺ABの長さが最小となるのは$a=0$のときであることを示せ．

(2) 点Pが領域D内を動くとき，△PABの面積の最小値を求めよ．

8 右図の△ABCにおいて，AB : AC = 3 : 4とする．また，∠Aの二等分線と辺BCとの交点をDとする．さらに，



線分ADを5 : 3に内分する点をE，
線分EDを2 : 1に内分する点をF，
線分ACを7 : 5に内分する点をG

とする．直線BEと辺のACとの交点をHとするとき，次の各問に答えよ．

(1) $\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HC}}$の値を求めよ．

(2) BH//FGであることを示せ．

(3) FG = 7のとき，線分BEの長さを求めよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ 袋の中に1と書かれた球が3個，2と書かれた球が2個，3と書かれた球が1個，4と書かれた球が1個，合計7個入っている．この袋の中の球をよくかきまぜていくつかの球を取り出すとき，次の各問に答えよ．

(1) 2個の球を取り出すとき，取り出した球の中に，1と書かれた球が少なくとも1個含まれる確率を求めよ．

(2) 2個の球を取り出すとき，取り出した球に書かれている数の合計の期待値を求めよ．

(3) 3個の球を取り出すとき，取り出した球に書かれている数の合計が6となる確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{10}}$ 座標平面上に点A$(0,\ 2)$と曲線$C : y = x^2$がある．曲線C上に点P$(a,\ a^2)$ $(1 \leqq a < 2)$をとる．また，点Pを通り傾き1の直線と曲線Cとの交点のうち，点Pと異なる点をQとする．△PAQの面積をSとおくとき，次の各問に答えよ．

(1) Sを，aを用いて表せ．

(2) Sの最大値とそのときのaの値を求めよ．

(3) 直線PQと曲線Cで囲まれる部分の面積が，Sと等しくなるaの値を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) (i) $y' = e^{\sin x \cos x}(\sin x \cos x)' = e^{\sin x \cos x}(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$$= \boldsymbol{e^{\sin x \cos x} \cos 2x}$$

別解 $y = e^{\frac{1}{2}\sin 2x}$ より $y' = e^{\frac{1}{2}\sin x}\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)' = e^{\frac{1}{2}\sin 2x}\cos 2x$

(ii) $y' = \dfrac{\sqrt{x^2+3} - x \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}}{(\sqrt{x^2+3}\,)^2} = \boldsymbol{\dfrac{3}{\sqrt{(x^2+3)^3}}}$

(2) (i) $\displaystyle\int_{\log \pi}^{\log(2\pi)} e^x \sin(e^x)\,dx = \int_{\log \pi}^{\log(2\pi)} (e^x)' \sin(e^x)\,dx$

$$= \Big[-\cos(e^x) \Big]_{\log \pi}^{\log(2\pi)} = \boldsymbol{-2}$$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}(x+1)\,dx = \left[e^{2x}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) \right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4}}$

解説 $\displaystyle\int e^{kx} f(x)\,dx = \frac{e^{kx}}{k}\left\{ f(x) - \frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots \right\} + C$

(iii) $\sin x \cos 4x = \dfrac{1}{2}(\sin 5x - \sin 3x)$ より

$$\int_0^{\pi} \sin x \cos 4x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\sin 5x - \sin 3x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{5}\cos 5x + \frac{1}{3}\cos 3x \right]_0^{\pi} = \boldsymbol{-\frac{2}{15}}$$

(iv) $\dfrac{x+1}{(x+2)(x+3)} = \dfrac{2}{x+3} - \dfrac{1}{x+1}$ より

$$\int_{-1}^{0} \frac{x+1}{(x+2)(x+3)}\,dx = \int_{-1}^{0}\left(\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \Big[2\log(x+3) - \log(x+2) \Big]_{-1}^{0}$$

$$= 2\log 3 - 3\log 2 = \boldsymbol{\log \frac{9}{8}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) G は，原点を通るから，$f(x)=ax^2+bx$ とおける．
$f(-1)=3$，$f(4)=8$ であるから

$$a-b=3,\ 4a+b=2 \quad \text{これを解いて} \quad a=1,\ b=-2$$

よって　　$\boldsymbol{f(x)=x^2-2x}$

(2) C は，原点を通るから，その方程式は $x^2+y^2+px+qy=0$ とおける．
2 点 A$(-1,\ 3)$，B$(4,\ 8)$ を通るから

$$-p+3q+10=0,\ \ p+2q+20=0 \quad \text{これを解いて} \quad p=-8,\ q=-6$$

したがって，円の方程式は

$$x^2+y^2-8x-6y=0 \quad \text{すなわち} \quad (x-4)^2+(y-3)^2=5^2$$

よって　中心 **(4，3)**，半径 **5**

(3) (1)，(2) の結果から $\begin{cases} y=x^2-2x & \cdots ① \\ x^2+y^2-8x-6y=0 & \cdots ② \end{cases}$

① を ② に代入すると　$x^2+(x^2-2x)^2-8x-6(x^2-2x)=0$

整理すると　　$x^4-4x^3-x^2+4x=0$
ゆえに　　$x(x-4)(x+1)(x-1)=0$

3 点 O，A，B 以外の点の x 座標は　$x=1$

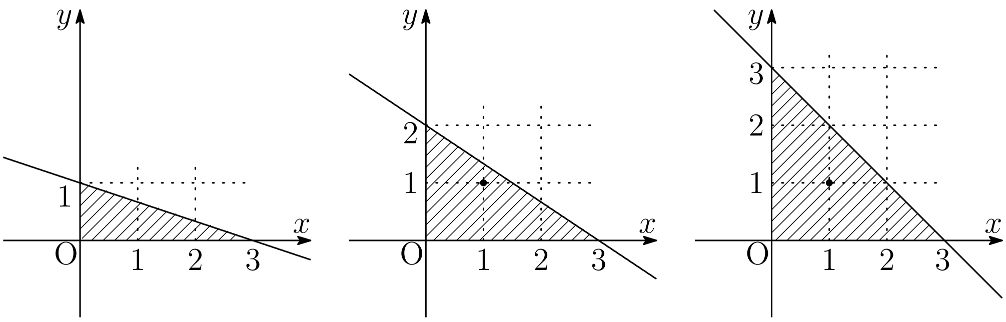
これを ① に代入して　$y=-1$　よって，残りの交点は　$\mathbf{(1,-1)}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 2点 A(3, 0)，$\mathrm{B}_n(0,\ n)$ を通る直線は

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{n}=1 \quad \text{すなわち} \quad y=-\frac{n}{3}x+n$$

ゆえに，領域内の格子点 $(x,\ y)$ は，次式をみたす整数 x，y である．

$$(*)\begin{cases} x=1\ \text{のとき}\quad 0<y<\dfrac{2n}{3} \\ x=2\ \text{のとき}\quad 0<y<\dfrac{n}{3} \end{cases}$$



したがって　$n=1$ のとき，$(*)$ をみたす格子点はない．
$n=2$ のとき，$(*)$ をみたす格子点は $(1,\ 1)$ の1個．
$n=3$ のとき，$(*)$ をみたす格子点は $(1,\ 1)$ の1個．

よって　$\boldsymbol{a_1=0}$，$\boldsymbol{a_2=1}$，$\boldsymbol{a_3=1}$

(2) $n=3k$ を $(*)$ に代入すると，$x=1$ のとき　$0<y<2k$
よって，これに含まれる格子点の個数は　$\boldsymbol{2k-1}$ (個)

(3) (2) と同様に，$n=3k$ を $(*)$ に代入すると　$x=2$ のとき　$0<y<k$
ゆえに，これに含まれる格子点の個数は　$k-1$ (個)
これと (2) の結果により　$a_{3k}=(2k-1)+(k-1)=\boldsymbol{3k-2}$

(4) (∗) から，n が 3 の倍数でないとき

$$a_n = \left[\ \frac{n}{3}\ \right] + \left[\ \frac{2n}{3}\ \right]$$

($[\,x\,]$ は x を超えない最大の整数を表す)

$$\begin{aligned} a_{3k-2} &= \left[\ \frac{3k-2}{3}\ \right] + \left[\ \frac{2(3k-2)}{3}\ \right] \\ &= \left[\ (k-1)+\frac{1}{3}\ \right] + \left[\ (2k-2)+\frac{2}{3}\ \right] \\ &= (k-1)+(2k-2) \\ &= 3k-3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{3k-1} &= \left[\ \frac{3k-1}{3}\ \right] + \left[\ \frac{2(3k-1)}{3}\ \right] \\ &= \left[\ (k-1)+\frac{2}{3}\ \right] + \left[\ (2k-1)+\frac{1}{3}\ \right] \\ &= (k-1)+(2k-1) \\ &= 3k-2 \end{aligned}$$

よって，上の 2 式および (3) の結果から

$$\begin{aligned} S_{3m} &= \sum_{k=1}^{m}(a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k}) = \sum_{k=1}^{m}\{(3k-3)+(3k-2)+(3k-2)\} \\ &= \sum_{k=1}^{m}(9k-7) \\ &= 9\cdot\frac{1}{2}m(m+1)-7(m+1) = \boldsymbol{\frac{1}{2}m(9m-5)} \end{aligned}$$

補足 m と n が互いに素である正の整数であるとき

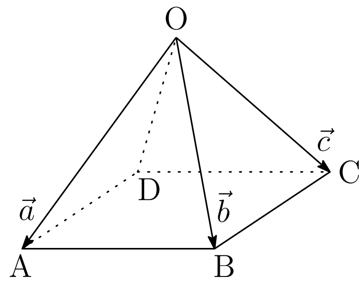
$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[\ \frac{km}{n}\ \right] = \frac{1}{2}(m-1)(n-1)$$

が成り立つので [1]，n が 3 の倍数でないとき

$$a_n = \left[\ \frac{n}{3}\ \right] + \left[\ \frac{2n}{3}\ \right] = \frac{1}{2}(n-1)(3-1) = n-1$$

[1]証明は http://kumamoto.s12.xrea.com/chie/gauss_symbol.pdf を参照.

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 正方形 OABC において $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから



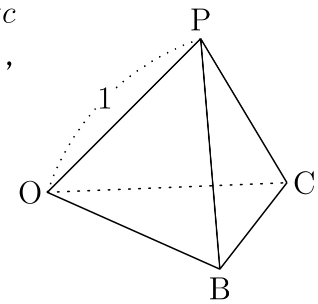
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\&=\vec{a}+(\vec{c}-\vec{b})\\&=\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}}\end{aligned}$$

(2) $\triangle$OAB，$\triangle$OBC は，1 辺の長さが 1 の正三角形であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot1\cos60^\circ=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

1 辺の長さが 1 の正方形の対角線の長さが $\sqrt{2}$ であるから，
$\triangle$OAC について，$\angle\mathrm{AOC}=90^\circ$．よって　$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos90^\circ=\mathbf{0}$

(3) 点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$ とし，$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ とおく．$\triangle$OBP は 1 辺が 1 の正三角形であるから，$\vec{b}\cdot\vec{p}=1\cdot1\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$ より，(2) の結果を用いて



$$\vec{b}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})=\frac{1}{2}x+y+\frac{1}{2}z=\frac{1}{2}$$

ゆえに　$x+2y+z=1$　$\cdots$①

$\triangle$OCP についても同様に，$\vec{c}\cdot\vec{p}=\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\vec{c}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})=\frac{1}{2}y+z=\frac{1}{2}\quad ゆえに\quad y+2z=1\quad\cdots②$$

$|\vec{p}|=1$ であるから，$|\vec{p}|^2=1$ より

$$|x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}|^2=x^2+y^2+z^2+xy+yz=1$$

①，② から，$x=3z-1$，$y=1-2z$ となる．これを上式に代入して

$$(3z-1)^2+(1-2z)^2+z^2+(3z-1)(1-2z)+(1-2z)z=1$$

これを整理すると　$z(3z-2)=0$　ゆえに　$z=0,\ \dfrac{2}{3}$

したがって　$(x,\ y,\ z)=(-1,\ 1,\ 0),\ \left(1, -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{a}+\vec{b}},\ \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}}$

5 (1) $I_1 = \displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \log x\,dx = \Big[\ x(\log x - 1)\ \Big]_1^{\sqrt{e}} = \boldsymbol{1 - \frac{\sqrt{e}}{2}}$

(2) $$I_{n+1} = \int_1^{\sqrt{e}} (\log x)^{n+1}\,dx$$
$$= \Big[\ x(\log x)^{n+1}\ \Big]_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} x\{(\log x)^{n+1}\}'\,dx$$
$$= \sqrt{e}\,(\log\sqrt{e}\,)^{n+1} - (n+1)\int_1^{\sqrt{e}} (\log x)^n\,dx = \sqrt{e}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - (n+1)I_n$$

(3) 与えられた命題を

$$I_n = (-1)^{n-1}n! + \sqrt{e}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}\frac{n!}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m \quad \cdots (*)$$

とおく．

(i) $n=1$ を $(*)$ に代入すると

$$I_1 = (-1)^{1-1}1! + \sqrt{e}\sum_{m=0}^{1}(-1)^{1-m}\frac{1!}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m$$
$$= 1 + \sqrt{e}\left\{(-1)^{1-0}\frac{1!}{0!}\left(\frac{1}{2}\right)^0 + (-1)^{1-1}\frac{1!}{1!}\left(\frac{1}{2}\right)^1\right\}$$
$$= 1 + \sqrt{e}\left(-1 + \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{e}}{2}$$

よって，(1) の結果から，$n=1$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると，(2) の結果から

$$I_{k+1} = \sqrt{e}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} - (k+1)I_k$$
$$= \sqrt{e}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} - (k+1)\left\{(-1)^{k-1}k! + \sqrt{e}\sum_{m=0}^{k}(-1)^{k-m}\frac{k!}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m\right\}$$
$$= \sqrt{e}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + (-1)^k(k+1)! + \sqrt{e}\sum_{m=0}^{k}(-1)^{k+1-m}\frac{(k+1)!}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m$$
$$= (-1)^k(k+1)! + \sqrt{e}\sum_{m=0}^{k+1}(-1)^{k+1-m}\frac{(k+1)!}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m$$

よって，$n=k+1$ のときも，$(*)$ が成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数 n について，$(*)$ が成り立つ．

解説 (2) で得られた漸化式から

$$I_{m+1}+(m+1)I_m=\sqrt{e}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$

両辺に $\dfrac{1}{(-1)^{m+1}(m+1)!}$ を掛けると

$$\frac{I_{m+1}}{(-1)^{m+1}(m+1)!}-\frac{I_m}{(-1)^m m!}=\frac{\sqrt{e}}{(-1)^{m+1}(m+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$

したがって

$$\sum_{m=1}^{n-1}\left\{\frac{I_{m+1}}{(-1)^{m+1}(m+1)!}-\frac{I_m}{(-1)^m m!}\right\}=\sqrt{e}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{(-1)^{m+1}(m+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$

$$\frac{I_n}{(-1)^n n!}-\frac{I_1}{(-1)^1 1!}=\sqrt{e}\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{(-1)^m m!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m}$$

(1) の結果から，$I_1=1-\dfrac{\sqrt{e}}{2}=1-\sqrt{e}\displaystyle\sum_{m=0}^{1}\frac{1}{(-1)^m m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m$ であるから

$$\frac{I_n}{(-1)^n n!}=-1+\sqrt{e}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{(-1)^m m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m$$

両辺に $(-1)^n n!$ を掛けると

$$I_n=(-1)^{n-1}n!+\sqrt{e}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}\frac{n!}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 1と書かれた球を取り出さない場合の確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{n+4}\mathrm{C}_2}=\frac{12}{(n+4)(n+3)}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから

$$1-\frac{12}{(n+4)(n+3)}=\boldsymbol{\frac{n(n+7)}{(n+4)(n+3)}}$$

(2) 2個の球に書かれた数の和を X とする．

$X=2$ となるのは，$\{1,\ 1\}$ を取り出す場合で，その確率は

$$P(X=2)=\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{n+4}\mathrm{C}_2}=\frac{n(n-1)}{(n+4)(n+3)}$$

$X=3$ となるのは，$\{1,\ 2\}$ を取り出す場合で，その確率は

$$P(X=3)=\frac{{}_n\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_{n+4}\mathrm{C}_2}=\frac{4n}{(n+4)(n+3)}$$

$X=4$ となるのは，$\{1,\ 3\}$, $\{2,\ 2\}$ を取り出す場合で，その確率は

$$P(X=4)=\frac{{}_n\mathrm{C}_1\cdot 1+{}_2\mathrm{C}_2}{{}_{n+4}\mathrm{C}_2}=\frac{2(n+1)}{(n+4)(n+3)}$$

$X=5$ となるのは，$\{1,\ 4\}$, $\{2,\ 3\}$ を取り出す場合で，その確率は

$$P(X=5)=\frac{{}_n\mathrm{C}_1\cdot 1+{}_2\mathrm{C}_1\cdot 1}{{}_{n+4}\mathrm{C}_2}=\frac{2(n+2)}{(n+4)(n+3)}$$

$X=6$ となるのは，$\{2,\ 4\}$ を取り出す場合で，その確率は

$$P(X=6)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot 1}{{}_{n+4}\mathrm{C}_2}=\frac{4}{(n+4)(n+3)}$$

$X=7$ となるのは，$\{3,\ 4\}$ を取り出す場合で，その確率は

$$P(X=7)=\frac{1\cdot 1}{{}_{n+4}\mathrm{C}_2}=\frac{2}{(n+4)(n+3)}$$

以上の結果から，求める期待値は

$$\sum_{k=2}^{7}kP(X=k)=\frac{2\cdot n(n-1)+3\cdot 4n+4\cdot 2(n+1)+5\cdot 2(n+2)+6\cdot 4+7\cdot 2}{(n+4)(n+3)}$$

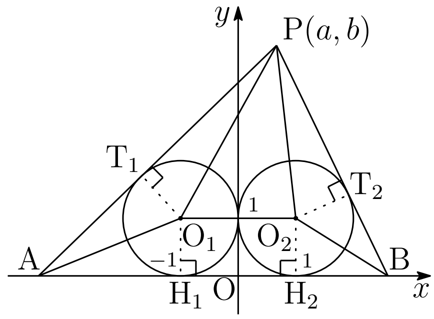
$$=\frac{2(n+3)(n+11)}{(n+4)(n+3)}=\boldsymbol{\frac{2(n+11)}{n+4}}$$

(3) 3個の球に書かれた数の和が6となるのは，$\{1,\ 1,\ 4\}$, $\{1,\ 2,\ 3\}$ であるから，求める確率は

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_2\cdot 1+{}_n\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1\cdot 1}{{}_{n+4}\mathrm{C}_3}=\frac{\frac{1}{2}n(n-1)\cdot 1+n\cdot 2\cdot 1}{\frac{1}{6}(n+4)(n+3)(n+2)}=\boldsymbol{\frac{3n}{(n+4)(n+2)}}$$

$\boxed{\textbf{7}}$ (1) C_1，C_2 の中心をそれぞれ $\mathrm{O_1}$，$\mathrm{O_2}$ とおく．$\mathrm{O_1}$ から PA，AB にそれぞれ垂線 $\mathrm{O_1T_1}$，$\mathrm{O_1H_1}$ を引く．また，$\mathrm{O_2}$ から PB，AB にそれぞれ垂線 $\mathrm{O_2T_2}$，$\mathrm{O_2H_2}$ を引く．右の図形の面積について

$$\triangle\mathrm{PAB} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot b$$
$$\triangle\mathrm{PO_1O_2} = b-1$$
$$\text{台形}\,\mathrm{O_1ABO_2} = \frac{1}{2}(2+\mathrm{AB})$$
$$\triangle\mathrm{O_1PA} = \frac{1}{2}\mathrm{PA}$$
$$\triangle\mathrm{O_1PB} = \frac{1}{2}\mathrm{PB}$$



$\triangle\mathrm{PAB} = \triangle\mathrm{PO_1O_2} + \text{台形}\,\mathrm{O_1ABO_2} + \triangle\mathrm{O_1PA} + \triangle\mathrm{O_1PB}$ であるから

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot b = b-1+\frac{1}{2}(2+\mathrm{AB})+\frac{1}{2}\mathrm{PA}+\frac{1}{2}\mathrm{PB}$$

整理すると　$(b-1)\mathrm{AB} = \mathrm{PA}+\mathrm{PB}+2b \quad \cdots ①$

また　$\mathrm{PA}+\mathrm{PB} = (\mathrm{PT_1}+\mathrm{PT_2})+(\mathrm{AT_1}+\mathrm{BT_2}) \quad \cdots ②$

$\mathrm{AT_1}+\mathrm{BT_2} = \mathrm{AH_1}+\mathrm{BH_2} = \mathrm{AB}-2 \quad \cdots ③$

①，②，③ より

$$(b-2)\mathrm{AB} = \mathrm{PT_1}+\mathrm{PT_2}+2(b-1) \quad \cdots (*)$$

$b>2$ であるから，$\mathrm{PT_1}+\mathrm{PT_2}$ が最小のとき，AB は最小となる．

$$\begin{aligned}\mathrm{PT_1}+\mathrm{PT_2} &= \sqrt{\mathrm{O_1P}^2-\mathrm{O_1T_1}^2}+\sqrt{\mathrm{O_2P}^2-\mathrm{O_2T_2}^2}\\ &= \sqrt{(a+1)^2+(b-1)^2-1^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2-1^2}\\ &= \sqrt{(a+1)^2+b(b-2)}+\sqrt{(a-1)^2+b(b-2)}\end{aligned}$$

b は $b>2$ の定数であるから，$f(a)=\mathrm{PT}_1+\mathrm{PT}_2$ とおくと

$$f(a)=\sqrt{(a+1)^2+b(b-2)}+\sqrt{(a-1)^2+b(b-2)}$$
$$f'(a)=\frac{a+1}{\sqrt{(a+1)^2+b(b-2)}}+\frac{a-1}{\sqrt{(a-1)^2+b(b-2)}}$$
$$f''(a)=\frac{b(b-2)}{\{(a+1)^2+b(b-2)\}^{\frac{3}{2}}}+\frac{b(b-2)}{\{(a-1)^2+b(b-2)\}^{\frac{3}{2}}}$$

$f''(a)>0$ であるから，$f'(a)$ は単調増加である．また $f'(0)=0$ より

$$a<0 \text{ のとき } f'(a)<0, \quad a>0 \text{ のとき } f'(a)>0$$

したがって，$f(a)$ の増減表は，次のようになる．

a	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(a)$	$-$	0	$+$
$f(a)$	$\searrow$	$2(b-1)$	$\nearrow$

$(*)$ より，$a=0$ のとき，AB は最小値 $\dfrac{4(b-1)}{b-2}$ をとる．

(2) △PAB が最小となるのは，AB が最小のときである．
したがって，(1) の結果から

$$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot b=\frac{1}{2}\cdot\frac{4(b-1)}{b-2}\cdot b=\frac{2b(b-1)}{b-2}$$
$$=2\left(b-2+\frac{2}{b-2}+3\right) \quad \cdots④$$

$b-2>0$，$\dfrac{2}{b-2}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係により

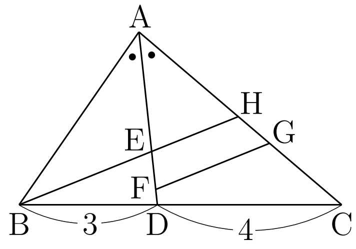
$$b-2+\frac{2}{b-2}\geqq 2\sqrt{(b-2)\times\frac{2}{b-2}}=2\sqrt{2} \quad \cdots⑤$$

④，⑤ より　　$\triangle\mathrm{PAB}\geqq 2(2\sqrt{2}+3)$

(等号が成り立つのは　$b-2=\dfrac{2}{b-2}$　すなわち　$b=2+\sqrt{2}$ のとき)

よって，求める最小値は　$\boldsymbol{2(2\sqrt{2}+3)}$

$\boxed{8}$ (1) $\triangle$ACD と直線 BH について，メネラウスの定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HC}}\cdot\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BD}}\cdot\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EA}}=1 \quad \cdots ①$$

仮定より $\quad \dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EA}}=\dfrac{3}{5} \quad \cdots ②$

AD は，$\angle$A の二等分線であるから

$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=3:4$ ゆえに $\dfrac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BD}}=\dfrac{7}{3} \quad \cdots ③$

②，③ を ① に代入すると

$$\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HC}}\times\frac{7}{3}\times\frac{3}{5}=1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HC}}=\frac{5}{7}}$$

(2) (1) の結果から $\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{5}{12} \quad \cdots ④$， 仮定から $\dfrac{\mathrm{AG}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{7}{12}$

上の 2 式から $\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AG}}=\dfrac{5}{7} \quad \cdots ⑤$

仮定から $\quad \dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{ED}}=\dfrac{5}{3}$，$\dfrac{\mathrm{EF}}{\mathrm{ED}}=\dfrac{2}{3}$

上の 2 式から $\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EF}}=\dfrac{5}{2}$ ゆえに $\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AF}}=\dfrac{5}{7} \quad \cdots ⑥$

⑤，⑥ より　EH//FG　よって　BH//FG

(3) (2) の結果から，$\triangle\mathrm{AEH} \backsim \triangle\mathrm{AFG}$ であるから $\dfrac{\mathrm{EH}}{\mathrm{FG}}=\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AF}}$

上式に $\mathrm{FG}=7$ および ⑥ を代入すると $\quad \mathrm{EH}=5 \quad \cdots ⑦$

仮定より $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{3}{4}$ これと ④ により $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AH}}=\dfrac{9}{5} \quad \cdots ⑧$

AE は $\angle$A の二等分線であるから，$\mathrm{BE}:\mathrm{EH}=\mathrm{AB}:\mathrm{AH}$

⑦，⑧ により　$\mathrm{BE}:5=9:5$　よって　$\mathbf{BE=9}$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) 1 と書かれた球を取り出さない場合の確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{2}{7}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから

$$1 - \frac{2}{7} = \mathbf{\frac{5}{7}}$$

(2) 2 個の球に書かれた数の和を X とする．

$X = 2$ となるのは，$\{1,\ 1\}$ を取り出す場合で，その確率は

$$P(X = 2) = \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{3}{21}$$

$X = 3$ となるのは，$\{1,\ 2\}$ を取り出す場合で，その確率は

$$P(X = 3) = \frac{{}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{6}{21}$$

$X = 4$ となるのは，$\{1,\ 3\}$, $\{2,\ 2\}$ を取り出す場合で，その確率は

$$P(X = 4) = \frac{{}_3\mathrm{C}_1 \cdot 1 + {}_2\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{4}{21}$$

$X = 5$ となるのは，$\{1,\ 4\}$, $\{2,\ 3\}$ を取り出す場合で，その確率は

$$P(X = 5) = \frac{{}_3\mathrm{C}_1 \cdot 1 + {}_2\mathrm{C}_1 \cdot 1}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{5}{21}$$

$X = 6$ となるのは，$\{2,\ 4\}$ を取り出す場合で，その確率は

$$P(X = 6) = \frac{{}_2\mathrm{C}_1 \cdot 1}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{2}{21}$$

$X = 7$ となるのは，$\{3,\ 4\}$ を取り出す場合で，その確率は

$$P(X = 7) = \frac{1 \cdot 1}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{1}{21}$$

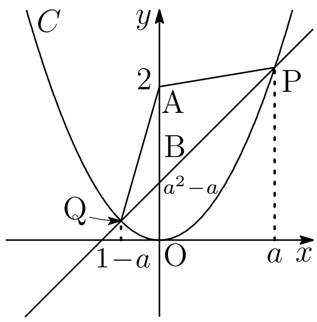
以上の結果から，求める期待値は

$$\sum_{k=2}^{7} kP(X = k) = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 1}{21} = \mathbf{4}$$

(3) 3 個の球に書かれた数の和が 6 となるのは，$\{1,\ 1,\ 4\}$, $\{1,\ 2,\ 3\}$ であるから，求める確率は

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2 \cdot 1 + {}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1 \cdot 1}{{}_7\mathrm{C}_3} = \frac{3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1}{35} = \mathbf{\frac{9}{35}}$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ (1) 直線PQは，点P$(a,\ a^2)$を通り，傾き1の直線であるから



$$y - a^2 = 1(x-a) \quad \text{ゆえに} \quad y = x + a^2 - a$$

直線PQとy軸の交点をBとすると

$$\mathrm{AB} = |2-(a^2-a)| = |-a^2+a+2|$$

$1 \leqq a < 2$ より　$-a^2+a+2 = (a+1)(2-a) > 0$

したがって　　　$\mathrm{AB} = -a^2+a+2$

直線PQとCの共有点のx座標は

$$x^2 = x + a^2 - a \quad \text{ゆえに} \quad (x-a)(x+a-1) = 0$$

これを解いて　$x = a,\ 1-a$　ゆえに，点Qのx座標は　$x = 1-a$

よって　$S = \dfrac{1}{2}\{a-(1-a)\}\mathrm{AB} = \dfrac{1}{2}(2a-1)(-a^2+a+2)$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}(-2a^3+3a^2+3a-2)}$$

(2) (1)の結果から，$f(a) = -a^3 + \dfrac{3}{2}a^2 + \dfrac{3}{2}a - 1$ とおくと

$$f'(a) = -3a^2 + 3a + \frac{3}{2}$$

$$f(a) = \left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{6}\right)f'(a) + \frac{3}{2}a - \frac{1}{4} \quad \cdots ①$$

$f'(a) = 0$　すなわち　$-3a^2+3a+\dfrac{3}{2} = 0$　これを解いて　$a = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

したがって，$1 \leqq a < 2$ における $f(a)$ の増減表は

a	1	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	(2)
$f'(a)$		+	0	−	
$f(a)$	0	↗	最大	↘	(0)

①から　$f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

よって　$\boldsymbol{a = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}}$ のとき，Sは最大値 $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$ をとる．

(3) 直線 PQ と C で囲まれた図形の面積は

$$\begin{aligned}\int_{1-a}^{a}\{(x+a^2-a)-x^2\}dx &= -\int_{1-a}^{a}\{x-(1-a)\}(x-a)dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)\{a-(1-a)\}^3 \\ &= \frac{1}{6}(2a-1)^3\end{aligned}$$

これと S が等しいから　$\dfrac{1}{6}(2a-1)^3 = \dfrac{1}{2}(2a-1)(-a^2+a+2)$

したがって　$(2a-1)(7a^2-7a-5)=0$

$1 \leqq a < 2$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{a = \dfrac{7+3\sqrt{21}}{14}}$