

平成 21 年度 宮崎大学 2 次試験前期日程 (数学問題)  
 工・医・農 (生物環境科学・応用生物・地域農業システム・獣医)・  
 教育文化 (中学数学・中学社会・理科・技術・家庭・初等教育・  
 特別支援・社会システム) 学部 平成 21 年 2 月 25 日

- 工学部は, [1] ~ [5] 数 II・III・A・B (120 分)
- 医学部は, [2], [3], [5] ~ [7] 数 II・III・A・B (120 分)
- 農 (生物環境科学・応用生物科学)・教育文化 (中学数学) 学部は,  
[1] ~ [3], [8], [9] 数 II・III・A・B (120 分)
- 教育文化 (中学社会, 理科, 技術, 家庭, 初等教育, 特別支援, 社会システム)  
学部・農 (地域農業システム・獣医) 学部は, [8], [10], [11] 数 II・A・B (90 分)

[1] 次の各問に答えよ.

(1)  $0 \leq x \leq \pi$  のとき, 次の方程式を解け.

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$$

(2)  $n$  が 2 以上の整数のとき,  $n^3 - n$  は 6 で割り切れることを示せ.

[2] 数直線上に動点 P がある. 硬貨を投げて, 表が出たら P を今ある位置から正の向きに 1 だけ動かし, 裏が出たら P を原点に動かす. はじめ P を原点に置き, 硬貨を 5 回投げるとき,

- 1 回投げ終えた時点での P の座標を  $X_1$
- 2 回投げ終えた時点での P の座標を  $X_2$
- 3 回投げ終えた時点での P の座標を  $X_3$
- 4 回投げ終えた時点での P の座標を  $X_4$
- 5 回投げ終えた時点での P の座標を  $X_5$

とする.

$X_1$  から  $X_5$  の最大値を  $X$  とするとき, 次の各問に答えよ. ただし, 硬貨の表と裏の出る確率はともに  $\frac{1}{2}$  とする.

- (1)  $X = 3$  となる確率を求めよ.
- (2)  $X$  の期待値を求めよ.

- 3**  $\triangle ABC$ において、 $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ とする。  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$ とするとき、次の各問いに答えよ。ただし、 $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ は、それぞれ $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ の大きさ、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表すものとする。

- (1) 線分 AB の長さを求めよ。
- (2) 点 I を  $\triangle ABC$  の内心とすると、 $\overrightarrow{BI}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を用いて表せ。
- (3)  $\triangle ABC$  の内接円の半径  $r$  を求めよ。

- 4** 次の各問いに答えよ。

- (1) 次の関数を微分せよ。

(i)  $y = \frac{\cos x}{e^x}$

(ii)  $y = \sin(\log |x|)$

- (2) 次の定積分の値を求めよ。

(i)  $\int_0^2 x e^{x^2} dx$

(ii)  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 - 4} dx$

(iii)  $\int_0^{2\pi} f(x) dx$  ただし、 $f(x) = \begin{cases} \sin x & (0 \leq x \leq \pi \text{ のとき}) \\ -x + \pi & (\pi \leq x \leq 2\pi \text{ のとき}) \end{cases}$

(iv)  $\int_0^1 x \log(x^2 + 1) dx$

- 5** 関数  $f(x) = \frac{1}{1 + e^{x-1}} + \frac{1}{1 + e^{-x-1}} - 1$  について、次の各問いに答えよ。

- (1)  $f(x)$  が最大となる  $x$  の値を求めよ。
- (2) 正の数  $a$  に対し、定積分  $I(a) = \int_{-a}^a f(x) dx$  を  $a$  を用いて表せ。
- (3) (2) の  $I(a)$  について、極限值  $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a)$  を求めよ。

- 6** 次の問いに答えよ。

- (1)  $0 \leq x \leq \pi$  のとき、次の方程式を解け。

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$$

- (2)  $n$  が 3 以上の奇数のとき、 $n^3 - n$  は 24 で割り切れることを示せ。

7  $n$  を自然数とするととき、極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \right)$  を求めよ.

8 数列  $\{a_n\}$  が、 $a_1 = 5$ ,  $a_n = 3a_{n-1} - 2^{n-1}$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ) で定められているとき、次の各問に答えよ.

- (1)  $a_{n+1}$  を、 $a_{n-1}$  と  $n$  を用いて表せ.
- (2)  $n$  が奇数のとき、 $a_n$  は 5 で割り切れることを示せ.
- (3)  $b_n = a_n - 2^n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) とするとき、 $b_n$  を  $n$  を用いて表せ.
- (4)  $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$  を求めよ.

9 関数  $f(x) = \frac{1}{1+e^{x-1}} + \frac{1}{1+e^{-x-1}} - 1$  について、次の各問に答えよ.

- (1)  $f(x)$  が最大となる  $x$  の値を求めよ.
- (2) 定積分  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  の値を求めよ.

10 関数  $f(x)$  を

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4x + 4 & (x \leq 0 \text{ のとき}) \\ x^2 - 4x + 4 & (x \geq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とし、曲線  $y = f(x)$  と直線  $y = ax + 4$  ( $-4 \leq a \leq 4$ ) とで囲まれる部分の面積を  $S$  とする. このとき、次の各問に答えよ.

- (1)  $S$  を  $a$  を用いて表せ.
- (2)  $S$  が最小となる  $a$  の値と、そのときの  $S$  の値を求めよ.

11 次の各問に答えよ。

- (1) 図1のように，直線 AD と BC は点 P で交わっている。

$$PA \cdot PD = PB \cdot PC$$

が成り立つとき，四角形 ABCD は円に内接することを示せ。

- (2) 図2のように，鋭角三角形 ABC の内部に点 P をとり，直線 AP, BP, CP と，辺 BC, CA, AB との交点をそれぞれ D, E, F とする。次の 1), 2) がともに成り立つとき，点 P は  $\triangle ABC$  の垂心であることを示せ。

- 1) 四角形 AFPE は円に内接する。
- 2) 四角形 CEPD は円に内接する。

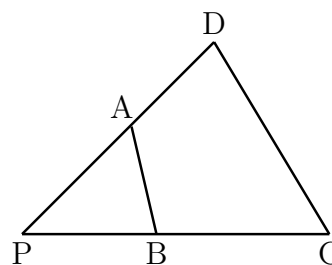


図1

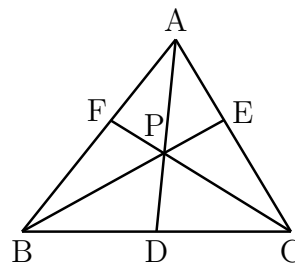


図2

三角形の各頂点から対辺に下ろした3本の垂線は1点で交わる。  
この点を三角形の垂心という。

## 正解

□1 (1) 加法定理により

$$\sin x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x, \quad \cos x + \cos 3x = 2 \cos 2x \cos x$$

これを方程式

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$$

に代入すると

$$\begin{aligned} 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x &= 2 \cos 2x \cos x + \cos 2x \\ (2 \cos x + 1) \sin 2x &= (2 \cos x + 1) \cos 2x \\ (2 \cos x + 1)(\sin 2x - \cos 2x) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad (2 \cos x + 1) \sin \left( 2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$0 \leq x \leq \pi \text{ より} \quad x = \frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{8}, \frac{5}{8}\pi$$

$$(2) \quad n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$$

連続する3数の積  $(n - 1)n(n + 1)$  は、2, 3 を因数にもつので、 $n^3 - n$  は6で割り切れる。

2 (1) 下の樹形図より,  $X = 3$  となる確率は  $\frac{5}{2^5} = \frac{5}{32}$

$X = 0$  1通り

$X_1$   $X_2$   $X_3$   $X_4$   $X_5$   
0 — 0 — 0 — 0 — 0

$X = 1$  12通り

$X_1$   $X_2$   $X_3$   $X_4$   $X_5$   
0 — 0 — 0 — 0 — 1  
0 — 0 — 0 — 1 — 0  
0 — 1 — 0 — 0 — \* (2)  
1 — 0 — 0 — 1 — 0  
1 — 0 — 0 — 0 — \* (2)  
1 — 0 — 1 — 0 — \* (2)

$X = 2$  11通り

$X_1$   $X_2$   $X_3$   $X_4$   $X_5$   
0 — 0 — 0 — 1 — 2  
0 — 0 — 1 — 2 — 0  
1 — 0 — 0 — 1 — 2  
1 — 0 — 2 — 0 — \* (2)  
1 — 0 — 0 — 1 — 2  
1 — 0 — 1 — 2 — 0  
2 — 0 — \* — \* (4)

$X = 3$  5通り

$X_1$   $X_2$   $X_3$   $X_4$   $X_5$   
0 — 0 — 1 — 2 — 3  
1 — 2 — 3 — 0  
1 — 0 — 1 — 2 — 3  
2 — 3 — 0 — \*

$X = 4$  2通り

$X_1$   $X_2$   $X_3$   $X_4$   $X_5$   
0 — 1 — 2 — 3 — 4  
1 — 2 — 3 — 4 — 0

$X = 5$  1通り

$X_1$   $X_2$   $X_3$   $X_4$   $X_5$   
1 — 2 — 3 — 4 — 5

(記号\*は表裏のどちらでもよい場合)

(2) (1) の樹形図により, 求める  $X$  の期待値は

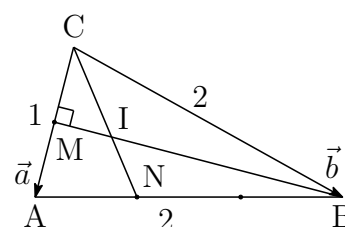
$$1 \times \frac{12}{32} + 2 \times \frac{11}{32} + 3 \times \frac{5}{32} + 4 \times \frac{2}{32} + 5 \times \frac{1}{32} = \frac{62}{32} = \frac{31}{16}$$

$$\boxed{3} \quad (1) \quad |\vec{AB}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = 2^2 - 2 \times \frac{1}{2} + 1^2 = 4$$

よって  $AB = 2$

- (2) 線分 CA の中点を M, 線分 AB を 1:2 を内分する点を N とすると, I は線分 BM と CN の交点である.  $\triangle ABM$  と直線 CN について, メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BI}{IM} \cdot \frac{MC}{CA} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{BI}{IM} \cdot \frac{1}{2} = 1$$



BI : IM = 4 : 1 であるから

$$\vec{BI} = \frac{4}{5} \vec{BM} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} (\vec{BA} + \vec{BC}) = \frac{2}{5} \{(\vec{a} - \vec{b}) + (-\vec{b})\} = \frac{2}{5} (\vec{a} - 2\vec{b})$$

- (3) (2) の結果から,  $r = IM$ ,  $\vec{IM} = \frac{1}{4} \vec{BI} = \frac{1}{10} (\vec{a} - 2\vec{b})$

$$|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 1^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 2^2 = 15$$

$$\text{よって} \quad r = |\vec{IM}| = \frac{1}{10} |\vec{a} - 2\vec{b}| = \frac{\sqrt{15}}{10}$$

別解 直角三角形  $\triangle BCM$  により

$$BM = \sqrt{BC^2 - CM^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{よって} \quad r = IM = \frac{1}{5} BM = \frac{1}{5} \times \frac{\sqrt{15}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{10}$$

**4** (1) (i)  $y = e^{-x} \cos x$  であるから

$$y' = -e^{-x} \cos x + e^{-x}(-\sin x) = -e^{-x}(\sin x + \cos x)$$

(ii)  $y' = \frac{1}{x} \cos(\log |x|)$

(2) (i)  $\int_0^2 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (x^2)' e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \left[ e^{x^2} \right]_0^2 = \frac{1}{2} (e^4 - 1)$

(ii)  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 - 4} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx$   
 $= \frac{1}{2} \left[ \log \left| \frac{x-2}{x+2} \right| \right]_0^1 = -\frac{1}{2} \log 3$

(iii)  $\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-x + \pi) dx$   
 $= \left[ -\cos x \right]_0^{\pi} - \frac{1}{2} \left[ (x - \pi)^2 \right]_{\pi}^{2\pi} = 2 - \frac{1}{2} \pi^2$

(iv)  $\int_0^1 x \log(x^2 + 1) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + 1)' \log(x^2 + 1) dx$   
 $= \frac{1}{2} \left[ (x^2 + 1) \log(x^2 + 1) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 2x dx$   
 $= \log 2 - \frac{1}{2} \left[ x^2 \right]_0^1 = \log 2 - \frac{1}{2}$



5 (1)  $t = e^x$ ,  $g(t) = f(x)$  とおくと

$$g(t) = \frac{1}{1 + \frac{t}{e}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{et}} - 1 = \frac{e}{t+e} + \left( \frac{et}{et+1} - 1 \right) = \frac{e}{t+e} - \frac{1}{et+1}$$

したがって

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\frac{e}{(t+e)^2} + \frac{e}{(et+1)^2} = \frac{e\{(t+e)^2 - (et+1)^2\}}{(t+e)^2(et+1)^2} \\ &= \frac{e(t+e+et+1)(t+e-et-1)}{(t+e)^2(et+1)^2} \\ &= \frac{e(1+e)(1-e)(t+1)(t-1)}{(t+e)^2(et+1)^2} \end{aligned}$$

$t > 0$  であるから,  $g(t)$  の増減表は次のようになる.

$t$	(0)	...	1	...
$g'(t)$		+	0	-
$g(t)$		↗	最大	↘

よって,  $t = 1$ , すなわち,  $x = 0$  で  $f(x)$  は最大となる.

$$\begin{aligned} (2) \quad f(x) &= \left( \frac{1}{1 + e^{x-1}} - 1 \right) + \frac{1}{1 + e^{-x-1}} \\ &= -\frac{e^{x-1}}{e^{x-1} + 1} + \frac{e^{x+1}}{e^{x+1} + 1} = \left\{ \log \left( \frac{e^{x+1} + 1}{e^{x-1} + 1} \right) \right\}' \end{aligned}$$

上式および  $f(x)$  が偶関数であることから

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \left[ \log \left( \frac{e^{x+1} + 1}{e^{x-1} + 1} \right) \right]_0^a \\ &= 2 \log \frac{e^{a+1} + 1}{e^{a-1} + 1} - 2 \log \frac{e + 1}{e^{-1} + 1} \\ &= 2 \log \frac{e^{a+1} + 1}{e^{a-1} + 1} - 2 = 2 \log \frac{e^{a+1} + 1}{e^a + e} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\lim_{a \rightarrow \infty} I(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} 2 \log \frac{e^{a+1} + 1}{e^a + 1} = \lim_{a \rightarrow \infty} 2 \log \frac{e + e^{-a}}{1 + e^{-a}} = 2$$

**6** (1) 加法定理により

$$\sin x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x, \quad \cos x + \cos 3x = 2 \cos 2x \cos x$$

これを方程式

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$$

に代入すると

$$\begin{aligned} 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x &= 2 \cos 2x \cos x + \cos 2x \\ (2 \cos x + 1) \sin 2x &= (2 \cos x + 1) \cos 2x \\ (2 \cos x + 1)(\sin 2x - \cos 2x) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad (2 \cos x + 1) \sin \left( 2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$0 \leq x \leq \pi \text{ より} \quad x = \frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{8}, \frac{5}{8}\pi$$

$$(2) \quad n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$$

連続する3数の積  $(n - 1)n(n + 1)$  は、3を因数にもつ。  
 また、 $n - 1$ 、 $n + 1$  は偶数で、一方は4の倍数である。  
 したがって、 $n^3 - n$  は  $3 \times 2 \times 4 = 24$  で割り切れる。

$$\boxed{7} \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \text{ とおくと, } f(x) < 1$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$$

$f(x)$  は単調増加であるから, 区間  $k-1 \leq x \leq k$  において ( $1 \leq k \leq n$ )

$$\int_{k-1}^k f(x) dx < \int_{k-1}^k f(k) dx < \int_{k-1}^k dx$$

したがって 
$$\int_{k-1}^k f(x) dx < f(k) < 1$$

上式を  $k$  について, 1 から  $n$  まで加えると

$$\int_0^n f(x) dx < \sum_{k=1}^n f(k) < n$$

このとき 
$$\int_0^n f(x) dx = \left[ \sqrt{x^2+1} \right]_0^n = \sqrt{n^2+1} - 1$$

したがって 
$$\sqrt{n^2+1} - 1 < \sum_{k=1}^n f(k) < n$$

ゆえに 
$$\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k) < 1$$

ここで,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n} \right) = 1$  であるから, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k) = 1 \quad \text{すなわち} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \right) = 1$$

解説  $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$  とおくと,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$  であるから,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \text{ のとき} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \alpha$$

証明 ( $\varepsilon$ - $N$  論法)  $n \geq n_0 \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon/2$  とし,

$$\text{Max}_{1 \leq n \leq n_0} |a_n - \alpha| = M \text{ に対し, } n \geq n_1 \implies Mn_0/n < \varepsilon/2$$

となる  $n_1 > n_0$  をとり,  $n \geq n_1$  とすればよい.

証終

$$\boxed{8} \quad (1) \quad a_n = 3a_{n-1} - 2^{n-1}, \quad a_{n+1} = 3a_n - 2^n$$

上の第1式を第2式に代入すると

$$a_{n+1} = 3(3a_{n-1} - 2^{n-1}) - 2^n = 9a_{n-1} - 5 \cdot 2^{n-1}$$

$$(2) \quad (1) \text{の結果から} \quad a_{n+1} + a_{n-1} = 5(2a_{n-1} - 2^{n-1})$$

$a_{n+1} + a_{n-1}$  は5の倍数であるから、 $a_{n-1}$  が5の倍数のとき、 $a_{n+1}$  は5の倍数である。 $a_1 = 5$ であるから、 $n$  が奇数のとき、 $a_n$  は5で割り切れる。

(3) 与えられた漸化式から

$$a_n - 2^n = (3a_{n-1} - 2^{n-1}) - 2^n \quad \text{ゆえに} \quad a_n - 2^n = 3(a_{n-1} - 2^{n-1})$$

$$\text{したがって} \quad b_n = 3b_{n-1}$$

$$\text{また} \quad b_1 = a_1 - 2^1 = 5 - 2 = 3$$

$$\{b_n\} \text{は、初項} 3, \text{公比} 3 \text{の等比数列であるから} \quad b_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$$

(4) (3)の結果から、 $a_k = 2^k + 3^k$ であるから

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (2^k + 3^k) = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} + \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} \\ &= \frac{1}{2}(3^{n+1} + 2^{n+2} - 7) \end{aligned}$$

9 (1)  $t = e^x$ ,  $g(t) = f(x)$  とおくと

$$g(t) = \frac{1}{1 + \frac{t}{e}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{et}} - 1 = \frac{e}{t+e} + \left( \frac{et}{et+1} - 1 \right) = \frac{e}{t+e} - \frac{1}{et+1}$$

したがって

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\frac{e}{(t+e)^2} + \frac{e}{(et+1)^2} = \frac{e\{(t+e)^2 - (et+1)^2\}}{(t+e)^2(et+1)^2} \\ &= \frac{e(t+e+et+1)(t+e-et-1)}{(t+e)^2(et+1)^2} \\ &= \frac{e(1+e)(1-e)(t+1)(t-1)}{(t+e)^2(et+1)^2} \end{aligned}$$

$t > 0$  であるから,  $g(t)$  の増減表は次のようになる.

$t$	(0)	...	1	...
$g'(t)$		+	0	-
$g(t)$		↗	最大	↘

よって,  $t = 1$ , すなわち,  $x = 0$  で  $f(x)$  は最大となる.

$$\begin{aligned} (2) \quad f(x) &= \left( \frac{1}{1 + e^{x-1}} - 1 \right) + \frac{1}{1 + e^{-x-1}} \\ &= -\frac{e^{x-1}}{e^{x-1} + 1} + \frac{e^{x+1}}{e^{x+1} + 1} = \left\{ \log \left( \frac{e^{x+1} + 1}{e^{x-1} + 1} \right) \right\}' \end{aligned}$$

上式および  $f(x)$  が偶関数であることから

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \left[ \log \left( \frac{e^{x+1} + 1}{e^{x-1} + 1} \right) \right]_0^1 \\ &= 2 \log \frac{e^2 + 1}{2} - 2 \log \frac{e + 1}{e^{-1} + 1} \\ &= 2 \log \frac{e^2 + 1}{2} - 2 = 2 \log \frac{e^2 + 1}{2e} \end{aligned}$$

10 (1)  $y = f(x)$  と  $y = ax + 4$  の交点の  $x$  座標は

$$x \leq 0 \text{ のとき } 2x^2 + 4x + 4 = ax + 4$$

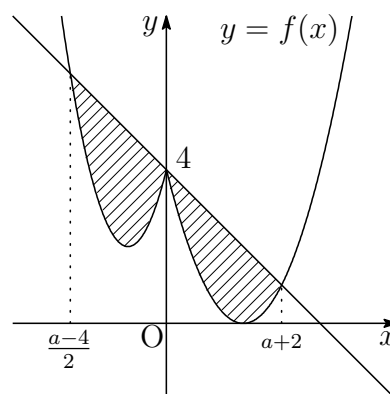
$$x(2x + 4 - a) = 0$$

$$x = 0, \frac{a-4}{2}$$

$$x \geq 0 \text{ のとき } x^2 - 4x + 4 = ax + 4$$

$$x(x - a - 4) = 0$$

$$x = 0, a + 4$$



$-4 \leq a \leq 4$  より,  $\frac{a-4}{2} \leq 0 \leq a+4$  であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6} \cdot 2 \left( 0 - \frac{a-4}{2} \right)^3 + \frac{1}{6} (a+4 - 0)^3 \\ &= -\frac{1}{24} (a-4)^3 + \frac{1}{6} (a+4)^3 \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{dS}{da} &= -\frac{1}{8} (a-4)^2 + \frac{1}{2} (a+2)^2 \\ &= \frac{1}{8} (3a^2 + 40a + 48) \\ &= \frac{1}{8} (3a+4)(a+12) \end{aligned}$$

$S(a)$  の増減表は, 次のようになる.

$a$	$-4$	$\dots$	$-\frac{4}{3}$	$\dots$	$4$
$S'(a)$		$-$	$0$	$+$	
$S(a)$		$\searrow$	$\frac{256}{27}$	$\nearrow$	

よって  $a = -\frac{4}{3}$  のとき最小値  $\frac{256}{27}$

- 11 (1)  $\triangle PAB$  と  $\triangle PCD$  において  $\angle APB = \angle CPD$  (共通)  
 条件より,  $PA \cdot PD = PB \cdot PC$  であるから  $PA : PB = PC : PD$   
 2組の辺の比が等しく, その間の角が等しいので

$$\triangle PAB \sim \triangle PCD$$

したがって  $\angle PAB = \angle PCD$

ゆえに,  $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$  となり, 四角形 ABCD は, 向かい合う角の和が  $180^\circ$  であるから, 四角形 ABCD は円に内接する.

- (2) 1), 2) より

$$\angle PFA = \angle PEC = \angle PDB = \alpha$$

とおく.

1) より  $BF \cdot BA = BP \cdot BE \dots \textcircled{1}$

2) より  $BP \cdot BE = BD \cdot BC \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$  より  $BF \cdot BA = BD \cdot BC$

したがって, 方べきの定理の逆により, 四角形 AFDC は円に内接するので

$$\angle PFA = \angle PDC = \beta$$

とおくと, このとき

$$\alpha = \beta, \quad \alpha + \beta = 180^\circ \quad \text{すなわち} \quad \alpha = \beta = 90^\circ$$

よって, 点 P は  $\triangle ABC$  の垂心である.

