平成21年度　宮崎大学2次試験前期日程(数学問題) 工・医・農(生物環境科学・応用生物・地域農業システム・獣医)・教育文化(中学数学・中学社会・理科・技術・家庭・初等教育・特別支援・社会システム)学部　平成21年2月25日

- 工学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ 数II・III・A・B (120分)
- 医学部　$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ 数II・III・A・B (120分)
- 農(生物環境科学・応用生物科学)・教育文化(中学数学)学部
  $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ 数II・III・A・B (120分)
- 教育文化(中学社会，理科，技術，家庭，初等教育，特別支援，社会システム)学部・農(地域農業システム・獣医)学部　$\boxed{8}$ $\boxed{10}$ $\boxed{11}$ 数II・A・B (90分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，次の方程式を解け．

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$$

(2) n が2以上の整数のとき，$n^3 - n$ は6で割り切れることを示せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数直線上に動点Pがある．硬貨を投げて，表が出たらPを今ある位置から正の向きに1だけ動かし，裏が出たらPを原点に動かす．はじめPを原点に置き，硬貨を5回投げるとき，

1回投げ終えた時点でのPの座標を X_1
2回投げ終えた時点でのPの座標を X_2
3回投げ終えた時点でのPの座標を X_3
4回投げ終えた時点でのPの座標を X_4
5回投げ終えた時点でのPの座標を X_5

とする．

X_1 から X_5 の最大値を X とするとき，次の各問に答えよ．ただし，硬貨の表と裏の出る確率はともに $\dfrac{1}{2}$ とする．

(1) $X = 3$ となる確率を求めよ．

(2) X の期待値を求めよ．

3 △ABC において，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\vec{b}$ とする．$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$ とするとき，次の各問いに答えよ．ただし，$|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$ は，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ の大きさ，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表すものとする．

(1) 線分 AB の長さを求めよ．

(2) 点 I を △ABC の内心とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{BI}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) △ABC の内接円の半径 r を求めよ．

4 次の各問いに答えよ．

(1) 次の関数を微分せよ．

(i) $y=\dfrac{\cos x}{e^x}$

(ii) $y=\sin(\log|x|)$

(2) 次の定積分の値を求めよ．

(i) $\displaystyle\int_0^2 xe^{x^2}\,dx$

(ii) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-4}\,dx$

(iii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$　ただし，$f(x)=\begin{cases}\sin x & (0\leqq x\leqq\pi \text{ のとき})\\ -x+\pi & (\pi\leqq x\leqq 2\pi \text{ のとき})\end{cases}$

(iv) $\displaystyle\int_0^1 x\log(x^2+1)\,dx$

5 関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{x-1}}+\dfrac{1}{1+e^{-x-1}}-1$ について，次の各問に答えよ．

(1) $f(x)$ が最大となる x の値を求めよ．

(2) 正の数 a に対し，定積分 $I(a)=\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ を a を用いて表せ．

(3) (2) の $I(a)$ について，極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty} I(a)$ を求めよ．

6 次の問に答えよ．

(1) $0\leqq x\leqq\pi$ のとき，次の方程式を解け．

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$$

(2) n が 3 以上の奇数のとき，n^3-n は 24 で割り切れることを示せ．

$\boxed{7}$ n を自然数とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{5}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$ を求めよ．

$\boxed{8}$ 数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=5$，$a_n=3a_{n-1}-2^{n-1}$ $(n=2,3,4,\cdots)$ で定められているとき，次の各問に答えよ．

(1) a_{n+1} を，a_{n-1} と n を用いて表せ．

(2) n が奇数のとき，a_n は 5 で割り切れることを示せ．

(3) $b_n=a_n-2^n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とするとき，b_n を n を用いて表せ．

(4) $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ を求めよ．

$\boxed{9}$ 関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{x-1}}+\dfrac{1}{1+e^{-x-1}}-1$ について，次の各問に答えよ．

(1) $f(x)$ が最大となる x の値を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$ の値を求めよ．

$\boxed{10}$ 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}2x^2+4x+4 & (x\leqq 0\text{ のとき})\\ x^2-4x+4 & (x\geqq 0\text{ のとき})\end{cases}$$

とし，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax+4$ $(-4\leqq a\leqq 4)$ とで囲まれる部分の面積を S とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) S を a を用いて表せ．

(2) S が最小となる a の値と，そのときの S の値を求めよ．

11 次の各問に答えよ．

(1) 図 1 のように，直線 AD と BC は点 P で交わっている．

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PD}=\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC}$$

が成り立つとき，四角形 ABCD は円に内接することを示せ．

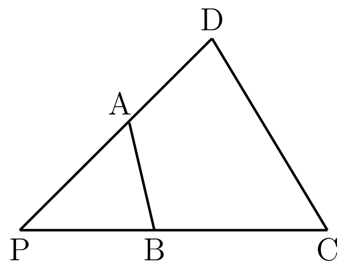


図 1

(2) 図 2 のように，鋭角三角形 ABC の内部に点 P をとり，直線 AP，BP，CP と，辺 BC，CA，AB との交点をそれぞれ D，E，F とする．次の 1)，2) がともに成り立つとき，点 P は △ABC の垂心であることを示せ．

1) 四角形 AFPE は円に内接する．

2) 四角形 CEPD は円に内接する．

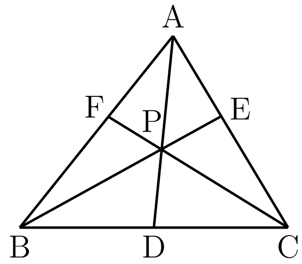


図 2

> 三角形の各頂点から対辺に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わる．この点を三角形の垂心という．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 加法定理により

$$\sin x + \sin 3x = 2\sin 2x\cos x, \quad \cos x + \cos 3x = 2\cos 2x\cos x$$

これを方程式

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$$

に代入すると

$$\begin{aligned} 2\sin 2x\cos x + \sin 2x &= 2\cos 2x\cos x + \cos 2x \\ (2\cos x + 1)\sin 2x &= (2\cos x + 1)\cos 2x \\ (2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos 2x) &= 0 \end{aligned}$$

ゆえに　$(2\cos x + 1)\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より　$\boldsymbol{x = \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{\pi}{8},\ \dfrac{5}{8}\pi}$

(2) $$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$$

連続する 3 数の積 $(n-1)n(n+1)$ は，2，3 を因数にもつので，
$n^3 - n$ は 6 で割り切れる．

2 (1) 下の樹形図より，$X=3$ となる確率は $\dfrac{5}{2^5}=\mathbf{\dfrac{5}{32}}$

$\boxed{X=0}$ 1通り

$$\begin{array}{ccccccccc}
X_1 & & X_2 & & X_3 & & X_4 & & X_5 \\
0 & — & 0 & — & 0 & — & 0 & — & 0
\end{array}$$

$\boxed{X=1}$ 12通り

$$\begin{array}{cccccccccc}
X_1 & & X_2 & & X_3 & & X_4 & & X_5 & \\
0 & — & 0 & — & 0 & — & 0 & — & 1 & \\
 & & & & & & 1 & — & 0 & \\
 & & & & 1 & — & 0 & — & * & (2) \\
 & & 1 & — & 0 & — & 0 & — & * & (2) \\
 & & & & & & 1 & — & 0 & \\
1 & — & 0 & — & 0 & — & 0 & — & * & (2) \\
 & & & & & & 1 & — & 0 & \\
 & & & & 1 & — & 0 & — & * & (2)
\end{array}$$

$\boxed{X=2}$ 11通り

$$\begin{array}{cccccccccc}
X_1 & & X_2 & & X_3 & & X_4 & & X_5 & \\
0 & — & 0 & — & 0 & — & 1 & — & 2 & \\
 & & & & 1 & — & 2 & — & 0 & \\
 & & 1 & — & 0 & — & 1 & — & 2 & \\
 & & & & 2 & — & 0 & — & * & (2) \\
1 & — & 0 & — & 0 & — & 1 & — & 2 & \\
 & & & & 1 & — & 2 & — & 0 & \\
 & & 2 & — & 0 & — & * & — & * & (4)
\end{array}$$

$\boxed{X=3}$ 5通り

$$\begin{array}{cccccccccc}
X_1 & & X_2 & & X_3 & & X_4 & & X_5 & \\
0 & — & 0 & — & 1 & — & 2 & — & 3 & \\
 & & 1 & — & 2 & — & 3 & — & 0 & \\
1 & — & 0 & — & 1 & — & 2 & — & 3 & \\
 & & 2 & — & 3 & — & 0 & — & * & (2)
\end{array}$$

$\boxed{X=4}$ 2通り

$$\begin{array}{ccccccccc}
X_1 & & X_2 & & X_3 & & X_4 & & X_5 \\
0 & — & 1 & — & 2 & — & 3 & — & 4 \\
1 & — & 2 & — & 3 & — & 4 & — & 0
\end{array}$$

$\boxed{X=5}$ 1通り

$$\begin{array}{ccccccccc}
X_1 & & X_2 & & X_3 & & X_4 & & X_5 \\
1 & — & 2 & — & 3 & — & 4 & — & 5
\end{array}$$

(記号 $*$ は表裏のどちらでもよい場合)

(2) (1) の樹形図により，求める X の期待値は

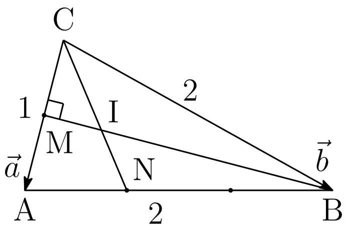
$$1\times\frac{12}{32}+2\times\frac{11}{32}+3\times\frac{5}{32}+4\times\frac{2}{32}+5\times\frac{1}{32}=\frac{62}{32}=\mathbf{\frac{31}{16}}$$

■

3 (1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\vec{b}-\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2 = 2^2 - 2\times\dfrac{1}{2} + 1^2 = 4$

よって　$\mathbf{AB = 2}$

(2) 線分 CA の中点を M，線分 AB を 1 : 2 を内分する点を N とすると，I は線分 BM と CN の交点である．△ABM と直線 CN について，メネラウスの定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{NB}}\cdot\frac{\mathrm{BI}}{\mathrm{IM}}\cdot\frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{CA}} = 1 \quad ゆえに \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{BI}}{\mathrm{IM}}\cdot\frac{1}{2} = 1$$

BI : IM = 4 : 1 であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{BI}} = \frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{BM}} = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}) = \frac{2}{5}\{(\vec{a}-\vec{b}) + (-\vec{b})\} = \boldsymbol{\frac{2}{5}(\vec{a}-2\vec{b})}$$

(3) (2) の結果から，$r = \mathrm{IM}$，$\overrightarrow{\mathrm{IM}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{BI}} = \dfrac{1}{10}(\vec{a}-2\vec{b})$

$$|\vec{a}-2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 1^2 - 4\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot{}^2 = 15$$

よって　$r = |\overrightarrow{\mathrm{IM}}| = \dfrac{1}{10}|\vec{a}-2\vec{b}| = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{15}}{10}}$

別解　直角三角形 △BCM により

$$\mathrm{BM} = \sqrt{\mathrm{BC}^2 - \mathrm{CM}^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

よって　$r = \mathrm{IM} = \dfrac{1}{5}\mathrm{BM} = \dfrac{1}{5}\times\dfrac{\sqrt{15}}{2} = \dfrac{\sqrt{15}}{10}$ ■

$\boxed{4}$ (1) (i) $y = e^{-x}\cos x$ であるから

$$y' = -e^{-x}\cos x + e^{-x}(-\sin x) = \boldsymbol{-e^{-x}(\sin x + \cos x)}$$

(ii) $\boldsymbol{y' = \dfrac{1}{x}\cos(\log|\,x\,|)}$

(2) (i) $\displaystyle\int_0^2 xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (x^2)'e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\ e^{x^2}\ \Big]_0^2 = \boldsymbol{\frac{1}{2}(e^4 - 1)}$

(ii) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)dx$

$$= \frac{1}{2}\Big[\ \log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\ \Big]_0^1 = \boldsymbol{-\frac{1}{2}\log 3}$$

(iii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi}\sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi}(-x+\pi)\,dx$

$$= \Big[-\cos x\ \Big]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\Big[\ (x-\pi)^2\ \Big]_{\pi}^{2\pi} = \boldsymbol{2 - \frac{1}{2}\pi^2}$$

(iv) $\displaystyle\int_0^1 x\log(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)'\log(x^2+1)\,dx$

$$= \frac{1}{2}\Big[\ (x^2+1)\log(x^2+1)\ \Big]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 2x\,dx$$

$$= \log 2 - \frac{1}{2}\Big[\ x^2\ \Big]_0^1 = \boldsymbol{\log 2 - \frac{1}{2}}$$

■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $t = e^x$，$g(t) = f(x)$ とおくと

$$g(t) = \frac{1}{1+\frac{t}{e}} + \frac{1}{1+\frac{1}{et}} - 1 = \frac{e}{t+e} + \left(\frac{et}{et+1} - 1\right) = \frac{e}{t+e} - \frac{1}{et+1}$$

したがって

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\frac{e}{(t+e)^2} + \frac{e}{(et+1)^2} = \frac{e\{(t+e)^2 - (et+1)^2\}}{(t+e)^2(et+1)^2} \\ &= \frac{e(t+e+et+1)(t+e-et-1)}{(t+e)^2(et+1)^2} \\ &= \frac{e(1+e)(1-e)(t+1)(t-1)}{(t+e)^2(et+1)^2} \end{aligned}$$

$t > 0$ であるから，$g(t)$ の増減表は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$
$g(t)$		$\nearrow$	最大	$\searrow$

よって，$t = 1$，すなわち，$\boldsymbol{x = 0}$ で $f(x)$ は最大となる．

(2)
$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{1}{1+e^{x-1}} - 1\right) + \frac{1}{1+e^{-x-1}} \\ &= -\frac{e^{x-1}}{e^{x-1}+1} + \frac{e^{x+1}}{e^{x+1}+1} = \left\{\log\left(\frac{e^{x+1}+1}{e^{x-1}+1}\right)\right\}' \end{aligned}$$

上式および $f(x)$ が偶関数であることから

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\Big[\ \log\left(\frac{e^{x+1}+1}{e^{x-1}+1}\right)\ \Big]_0^a \\ &= 2\log\frac{e^{a+1}+1}{e^{a-1}+1} - 2\log\frac{e+1}{e^{-1}+1} \\ &= 2\log\frac{e^{a+1}+1}{e^{a-1}+1} - 2 = \boldsymbol{2\log\frac{e^{a+1}+1}{e^a+e}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\lim_{a\to\infty} I(a) = \lim_{a\to\infty} 2\log\frac{e^{a+1}+1}{e^a+1} = \lim_{a\to\infty} 2\log\frac{e+e^{-a}}{1+e^{-a}} = \mathbf{2}$$

■

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 加法定理により

$$\sin x + \sin 3x = 2\sin 2x \cos x, \quad \cos x + \cos 3x = 2\cos 2x \cos x$$

これを方程式

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$$

に代入すると

$$\begin{aligned} 2\sin 2x \cos x + \sin 2x &= 2\cos 2x \cos x + \cos 2x \\ (2\cos x + 1)\sin 2x &= (2\cos x + 1)\cos 2x \\ (2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos 2x) &= 0 \end{aligned}$$

ゆえに　$(2\cos x + 1)\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より　$\boldsymbol{x = \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{\pi}{8},\ \dfrac{5}{8}\pi}$

(2)　$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$

連続する 3 数の積 $(n-1)n(n+1)$ は，3 を因数にもつ．
また，$n-1$，$n+1$ は偶数で，一方は 4 の倍数である．
したがって，$n^3 - n$ は $3 \times 2 \times 4 = 24$ で割り切れる． ■

$\boxed{7}$ $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ とおくと，$f(x)<1$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0$$

$f(x)$ は単調増加であるから，区間 $k-1\leqq x\leqq k$ において $(1\leqq k\leqq n)$

$$\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx<\int_{k-1}^{k} f(k)\,dx<\int_{k-1}^{k} dx$$

したがって $$\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx<f(k)<1$$

上式を k について，1 から n まで加えると

$$\int_0^n f(x)\,dx<\sum_{k=1}^{n} f(k)<n$$

このとき $$\int_0^n f(x)\,dx=\Big[\sqrt{x^2+1}\Big]_0^n=\sqrt{n^2+1}-1$$

したがって $$\sqrt{n^2+1}-1<\sum_{k=1}^{n} f(k)<n$$

ゆえに $$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\frac{1}{n}<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k)<1$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\frac{1}{n}\right)=1$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k)=1 \quad \text{すなわち} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{5}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)=\mathbf{1}$$

解説 $a_n=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ とおくと，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=1$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha \text{ のとき} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\alpha$$

証明 (ε-N 論法) $n\geqq n_0\Longrightarrow|a_n-\alpha|<\varepsilon/2$ とし，

$\displaystyle\mathop{\mathrm{Max}}_{1\leqq n\leqq n_0}|a_n-\alpha|=M$ に対し，$n\geqq n_1\Longrightarrow Mn_0/n<\varepsilon/2$

となる $n_1>n_0$ をとり，$n\geqq n_1$ とすればよい． 証終 ■

$\boxed{8}$ (1) $$a_n = 3a_{n-1} - 2^{n-1}, \qquad a_{n+1} = 3a_n - 2^n$$

上の第 1 式を第 2 式に代入すると

$$a_{n+1} = 3(3a_{n-1} - 2^{n-1}) - 2^n = \mathbf{9}\boldsymbol{a_{n-1}} - \mathbf{5{\cdot}2^{\boldsymbol{n}-1}}$$

(2) (1) の結果から $\qquad a_{n+1} + a_{n-1} = 5(2a_{n-1} - 2^{n-1})$

$a_{n+1} + a_{n-1}$ は 5 の倍数であるから，a_{n-1} が 5 の倍数のとき，a_{n+1} は 5 の倍数である．$a_1 = 5$ であるから，n が奇数のとき，a_n は 5 で割り切れる．

(3) 与えられた漸化式から

$$a_n - 2^n = (3a_{n-1} - 2^{n-1}) - 2^n \quad \text{ゆえに} \quad a_n - 2^n = 3(a_{n-1} - 2^{n-1})$$

したがって $\qquad b_n = 3b_{n-1}$

また $\qquad b_1 = a_1 - 2^1 = 5 - 2 = 3$

$\{b_n\}$ は，初項 3，公比 3 の等比数列であるから $\qquad b_n = 3{\cdot}3^{n-1} = \mathbf{3}^{\boldsymbol{n}}$

(4) (3) の結果から，$a_k = 2^k + 3^k$ であるから

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}(2^k + 3^k) = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} + \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}(3^{n+1} + 2^{n+2} - 7)} \end{aligned}$$

■

9 (1) $t=e^x$，$g(t)=f(x)$ とおくと

$$g(t)=\frac{1}{1+\frac{t}{e}}+\frac{1}{1+\frac{1}{et}}-1=\frac{e}{t+e}+\left(\frac{et}{et+1}-1\right)=\frac{e}{t+e}-\frac{1}{et+1}$$

したがって

$$\begin{aligned}g'(t)&=-\frac{e}{(t+e)^2}+\frac{e}{(et+1)^2}=\frac{e\{(t+e)^2-(et+1)^2\}}{(t+e)^2(et+1)^2}\\&=\frac{e(t+e+et+1)(t+e-et-1)}{(t+e)^2(et+1)^2}\\&=\frac{e(1+e)(1-e)(t+1)(t-1)}{(t+e)^2(et+1)^2}\end{aligned}$$

$t>0$ であるから，$g(t)$ の増減表は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$
$g(t)$		$\nearrow$	最大	$\searrow$

よって，$t=1$，すなわち，$\boldsymbol{x=0}$ で $f(x)$ は最大となる．

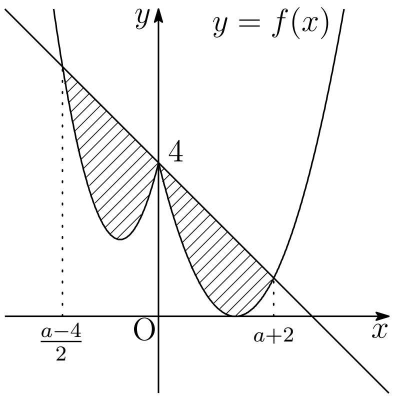
(2)
$$\begin{aligned}f(x)&=\left(\frac{1}{1+e^{x-1}}-1\right)+\frac{1}{1+e^{-x-1}}\\&=-\frac{e^{x-1}}{e^{x-1}+1}+\frac{e^{x+1}}{e^{x+1}+1}=\left\{\log\left(\frac{e^{x+1}+1}{e^{x-1}+1}\right)\right\}'\end{aligned}$$

上式および $f(x)$ が偶関数であることから

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}f(x)\,dx&=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=2\Big[\ \log\left(\frac{e^{x+1}+1}{e^{x-1}+1}\right)\ \Big]_0^1\\&=2\log\frac{e^2+1}{2}-2\log\frac{e+1}{e^{-1}+1}\\&=2\log\frac{e^2+1}{2}-2=\boldsymbol{2\log\frac{e^2+1}{2e}}\end{aligned}$$

■

10 (1) $y = f(x)$ と $y = ax + 4$ の交点の x 座標は



$x \leqq 0$ のとき　$2x^2 + 4x + 4 = ax + 4$

$$x(2x + 4 - a) = 0$$

$$x = 0,\ \frac{a-4}{2}$$

$x \geqq 0$ のとき　$x^2 - 4x + 4 = ax + 4$

$$x(x - a - 4) = 0$$

$$x = 0,\ a + 4$$

$-4 \leqq a \leqq 4$ より，$\dfrac{a-4}{2} \leqq 0 \leqq a + 4$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6}\cdot 2\left(0 - \frac{a-4}{2}\right)^3 + \frac{1}{6}(a + 4 - 0)^3 \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{24}(a-4)^3 + \frac{1}{6}(a+4)^3} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{dS}{da} &= -\frac{1}{8}(a-4)^2 + \frac{1}{2}(a+2)^2 \\ &= \frac{1}{8}(3a^2 + 40a + 48) \\ &= \frac{1}{8}(3a + 4)(a + 12) \end{aligned}$$

$S(a)$ の増減表は，次のようになる．

a	-4	$\cdots$	$-\frac{4}{3}$	$\cdots$	4
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$	$\frac{256}{27}$	$\nearrow$	

よって　$\boldsymbol{a = -\dfrac{4}{3}}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{256}{27}}$ ■

11 (1) $\triangle$PAB と $\triangle$PCD において　$\angle\text{APB} = \angle\text{CPD}$ (共通)

条件より，$\text{PA}\cdot\text{PD} = \text{PB}\cdot\text{PC}$ であるから　$\text{PA} : \text{PB} = \text{PC} : \text{PD}$

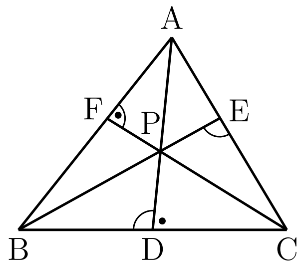
2 組の辺の比が等しく，その間の角が等しいので

$$\triangle\text{PAB} \backsim \triangle\text{PCD}$$

したがって　$\angle\text{PAB} = \angle\text{PCD}$

ゆえに，$\angle\text{BAD} + \angle\text{BCD} = 180^\circ$ となり，四角形 ABCD は，向かい合う角の和が 180° であるから，四角形 ABCD は円に内接する．

(2) 1), 2) より



$$\angle\text{PFA} = \angle\text{PEC} = \angle\text{PDB} = \alpha$$

とおく．

1) より　$\text{BF}\cdot\text{BA} = \text{BP}\cdot\text{BE}$　$\cdots$ ①

2) より　$\text{BP}\cdot\text{BE} = \text{BD}\cdot\text{BC}$　$\cdots$ ②

①，② より　$\text{BF}\cdot\text{BA} = \text{BD}\cdot\text{BC}$

したがって，方べきの定理の逆により，四角形 AFDC は円に内接するので

$$\angle\text{PFA} = \angle\text{PDC} = \beta$$

とおくと，このとき

$$\alpha = \beta,\quad \alpha + \beta = 180^\circ \quad \text{すなわち} \quad \alpha = \beta = 90^\circ$$

よって，点 P は $\triangle$ABC の垂心である．■