平成 20 年度　宮崎大学２次試験前期日程 (数学問題)
工・医・農 (生物環境科学・応用生物・地域農業システム・獣医)・教育文化 (中学数学・中学社会・理科・技術・家庭・初等教育・特別支援・社会システム) 学部　平成 20 年 2 月 25 日

- 工学部は， $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{5}$ 数 II・III・A・B (120 分)
- 医学部は， $\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$ 数 II・III・A・B (120 分)
- 農 (生物環境科学・応用生物科学)・教育文化 (中学数学) 学部は，
  $\boxed{2}$ 〜 $\boxed{5}$, $\boxed{8}$ 数 II・III・A・B (120 分)
- 教育文化 (中学社会，理科，技術，家庭，初等教育，特別支援，社会システム) 学部・農 (地域農業システム・獣医) 学部は， $\boxed{8}$ 〜 $\boxed{10}$ 数 II・A・B (90 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ．

(1) 不等式

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(x+1)>3$$

を満たす x の値の範囲を求めよ．

(2) $\dfrac{\pi}{6} \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，等式

$$(1+\sqrt{3})\sin x\tan x = 2\sqrt{3}\sin x+(1-\sqrt{3})\cos x$$

を満たす x の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 微分と積分に関する次の各問に答えよ．

(1) 次の関数を微分せよ．

(i) $y = x\log|\,x\,|$

(ii) $y = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

(2) 次の定積分の値を求めよ．

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

(ii) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

(iii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$

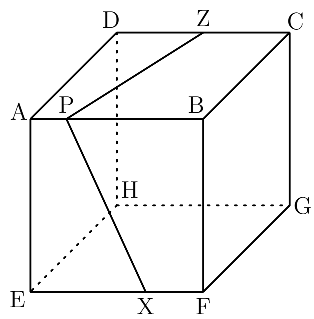
(iv) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\cos 3x\,dx$

3 座標平面において，原点 O(0, 0)，点 A(1, 0)，点 B(1, 2) を頂点とする △OAB の内部またはその周上に点 P(a, b) がある．点 P から 3 辺 OA，AB，BO までの距離の和を k とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) k を a と b についての 1 次式で表せ．

(2) k の最大値と最小値を求めよ．

4 空間内に右図のような 1 辺の長さが 1 である立方体がある．辺 EF を 3 : 1 に内分する点を X，辺 CD の中点を Z とする．さらに辺 AB を $t:1-t$ $(0<t<1)$ に内分する点を P とする．3 点 P，X，Z を通る平面と直線 GH との交点を Y とおく．$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{c}$ とするとき，次の各問に答えよ．



(1) $\overrightarrow{\mathrm{PY}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および t を用いて表せ．

(2) 点 Y が辺 GH 上にあるとき，t の値の範囲を求めよ．

(3) (2) において四角形 PXYZ がひし形になるとき，t の値を求めよ．

5 関数

$$f(x)=\frac{1}{2}x+\int_1^x (6t-4x)t\log t\,dt \quad (x>0)$$

について，次の各問に答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ について，$f'(x)=0$ を満たす x の値を求めよ．

(2) $f(x)$ の極値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 関数

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \int_1^{2x} (3t - 4x)t \log t \, dt \quad (x > 0)$$

について，次の各問に答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ について，$f'(x) = 0$ を満たす x の値を求めよ．

(2) $f(x)$ の極値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 座標平面上に点 $\mathrm{P}(-l,\ 0)$ をとる．ただし，l は正の定数とする．また，原点を中心とする半径 1 の円周上に 2 点 $\mathrm{Q}(\cos\theta, -\sin\theta)$，$\mathrm{R}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ をとる．$\triangle\mathrm{PQR}$ の周の長さを $f(\theta)$ とするとき，次の各問に答えよ．

(1) $f(\theta)$ を，l と θ を用いて表せ．

(2) $f(\theta)$ の最大値を，l を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ A はサイコロを 1 個投げる．そのときの A の得点は，出た目が 2 または 4 のときは 20 点，3 のときは 30 点，6 のときは 50 点，それ以外は 0 点とする．
一方，B はコインを 3 枚投げる．そのときの B の得点は，表が 2 枚以上出たときは p 点，それ以外は 0 点とする．
A の得点の期待値と B の得点の期待値が等しいとき，次の各問に答えよ．

(1) A の得点の期待値を求めよ．

(2) p の値を求めよ．

(3) A の得点が B の得点より大きくなる確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．

$$a_1 = 1, \quad S_{n-1} - a_n = -4 \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

が成り立つとき，次の各問に答えよ．

(1) a_2，a_3，a_4，a_5 の値をそれぞれ求めよ．

(2) 一般項 a_n を求めよ．

$\boxed{\mathbf{10}}$ x についての 4 次の整式 $f(x)$ は，次の条件 (i)，(ii)，(iii) を満たしている．

(i) $f(x)$ の 4 次の係数は 1 である．

(ii) $f(1)=0$，$f(2)=-1$ である．

(iii) $f(x)$ を x^2-3x で割った余りは $7x+5$ である．

$f(x)$ を x^2-3x+2 で割ったときの商を $g(x)$，余りを $k(x)$ とするとき，次の各問に答えよ．

(1) $k(x)$ を求めよ．

(2) $g(x)$ を求めよ．

(3) 座標平面上において，3 つの関数 $y=x^2-3x+2$，$y=g(x)$，$y=k(x)$ のグラフで囲まれた部分の面積を求めよ．

正解

$\boxed{\textbf{1}}$ (1) 真数は正であるから

$$x-1>0 \text{ かつ } x+1>0 \quad \text{すなわち} \quad x>1 \quad \cdots ①$$

不等式から　$-\log_3(x-1)+\log_3(x+1)>3$　ゆえに　$\log_3\dfrac{x+1}{x-1}>\log_3 27$

底 3 は 1 より大きいから　$\dfrac{x+1}{x-1}>27$

① に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{1<x<\dfrac{14}{13}}$

(2) $\dfrac{\pi}{6}\leqq x<\dfrac{\pi}{2}\cdots$ ① より $\sin x\neq 0$ であるから，与えられた等式は

$$(1+\sqrt{3})\tan x=2\sqrt{3}+\frac{1-\sqrt{3}}{\tan x}$$

整理すると　$(\sqrt{3}+1)\tan^2 x-2\sqrt{3}\tan x+(\sqrt{3}-1)=0$

ゆえに　$(\tan x-1)\{(\sqrt{3}+1)\tan x-(\sqrt{3}-1)\}=0$

① より，$\tan x\geqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから

$$\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{4}{3}\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)>0$$

したがって　$\tan x=1$　① に注意して　$\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{4}}$

補足 $\tan\dfrac{\pi}{12}=\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

別解 与えられた等式から

$$(1+\sqrt{3})\sin^2 x=2\sqrt{3}\sin x\cos x+(1-\sqrt{3})\cos^2 x$$

$\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$，$\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$，$\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$ より

$$\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{3} \quad \text{ゆえに} \quad \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

① より $\dfrac{\pi}{2}\leqq 2x+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{7}{6}\pi$ であるから

$$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi \quad \text{よって} \quad x=\frac{\pi}{4}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) (i) $y = x\log|x|$ より

$$y' = (x)'\log|\,x\,| + x(\log|\,x\,|)' = \boldsymbol{\log|\,x\,| + 1}$$

(ii) $y = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = 1 - \dfrac{2}{e^{2x}+1}$ より

$$y' = -2\cdot\frac{-(e^{2x}+1)'}{(e^{2x}+1)^2} = \boldsymbol{\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}}$$

(2) (i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x)'\,dx$

$$= \Big[\ x\sin x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2} + \Big[\ \cos x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2} - 1}$$

(ii) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx$

$$= \Big[\ \log\frac{x}{x+1}\ \Big]_1^2 = \boldsymbol{\log\frac{4}{3}}$$

(iii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$

$$= \Big[\ x - \log(1+e^x)\ \Big]_0^1$$

$$= 1 - \log\frac{1+e}{2} = \boldsymbol{\log\frac{2e}{1+e}}$$

別解 $t = e^x$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = e^x = t,$

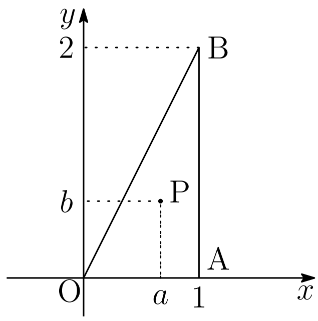
x	$0 \longrightarrow 1$
t	$1 \longrightarrow e$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int_1^e \frac{1}{1+t}\cdot\frac{dt}{t} = \Big[\ \log\frac{t}{t+1}\ \Big]_1^e = \log\frac{2e}{e+1}$$

(iv) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 5x + \cos x)\,dx$

$$= \frac{1}{2}\Big[\ \frac{1}{5}\sin 5x + \sin x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{5}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) P(a, b) から OA，AB までの距離は，それぞれ b，$1-a$ である．
直線 OB の方程式は $2x-y=0$ であるから，P から OB までの距離は，$b \leqq 2a$ に注意して



$$\frac{|\,2a-b\,|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2a-b}{\sqrt{5}}$$

よって　　$k=b+(1-a)+\dfrac{2a-b}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}a+\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}b+1}$

(2) (1) の結果より，k は a，b の 1 次式であるから，k の最大値・最小値は境界線上でとるから，△OAB の周上における k の値を調べればよい．

i) P が OA 上にあるとき，$b=0$ より

$$k=\frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}a+1 \quad (0 \leqq a \leqq 1)$$

よって　　$\dfrac{2}{\sqrt{5}} \leqq k \leqq 1$

ii) P が AB 上にあるとき，$a=1$ より

$$k=\frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}b+1=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}b+\frac{2}{\sqrt{5}} \quad (0 \leqq b \leqq 2)$$

よって　　$\dfrac{2}{\sqrt{5}} \leqq k \leqq 2$

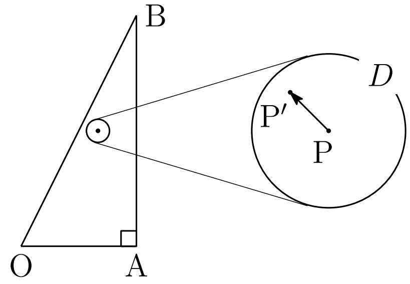
iii) P が OB 上にあるとき，$b=2a$ より

$$k=\frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}a+\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}\cdot 2a+1=a+1 \quad (0 \leqq a \leqq 1)$$

よって　　$1 \leqq k \leqq 2$

i)，ii)，iii) より　$\begin{cases} \textbf{最大値}\ \mathbf{2} & \boldsymbol{(a=1,\ b=2}\ \textbf{のとき)} \\ \textbf{最小値}\ \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{5}}{5}} & \boldsymbol{(a=1,\ b=0}\ \textbf{のとき)} \end{cases}$

解説 k は a，b の 1 次式であるから，△OAB の内部で最大値・最小値をとることはない．k を最大とする点 P が △OAB の内部にあると仮定すると，P を含み，△OAB の内部にある領域 D をとることができる (P の近傍).



(1) で求めた

$$k=\frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}a+\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}b+1$$

の a の係数が負，b の係数が正であるから，P よりも a の値が小さく，b の値が大きい点 $\mathrm{P}'\in D$ をとることができる．このとき，P′ における k の値が P における k の値よりも大きい．このことは，P が k の最大値を与える点であることに反する．したがって，k の最大値を与える点は △OAB の周上にある．
同様に，k の最小値を与える点も △OAB の周上にある．

別解 $k=\dfrac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}a+\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}b+1$ より

$$b=\frac{3-\sqrt{5}}{4}a+\frac{5+\sqrt{5}}{4}(k-1)\quad\cdots(*)$$

ゆえに，P$(a,\ b)$ を通る傾き $\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$ の直線上の点における k の値は等しい．

$(*)$ より，この直線の y 切片は $\dfrac{5+\sqrt{5}}{4}(k-1)$ である．

したがって，$0<\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}<2$ より，直線が B(1, 2) を通るとき k は最大であり，直線が A(1, 0) を通るとき k は最小である．

よって $\begin{cases}\text{最大値}\,2 & (a=1,\ b=2\text{ のとき})\\ \text{最小値}\,\dfrac{2\sqrt{5}}{5} & (a=1,\ b=0\text{ のとき})\end{cases}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 条件から　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{AX}}=\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{AZ}}=\vec{c}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{PX}}=\vec{a}+\left(\dfrac{3}{4}-t\right)\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{PZ}}=\vec{c}+\left(\dfrac{1}{2}-t\right)\vec{b}$

Y は平面 PXZ 上にあるから，α，β を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AY}}&=\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\alpha\overrightarrow{\mathrm{PX}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{PZ}}\quad\cdots①\\&=t\vec{b}+\alpha\left\{\vec{a}+\left(\frac{3}{4}-t\right)\vec{b}\right\}+\beta\left\{\vec{c}+\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b}\right\}\end{aligned}$$

また，Y は直線 GH 上にあるから，上式の $\vec{a}$ と $\vec{c}$ の係数に注意すると，$\alpha=1$，$\beta=1$ である．したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AY}}=\vec{a}+\vec{c}+\left(\frac{5}{4}-t\right)\vec{b}\quad\cdots②$$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PY}}&=\overrightarrow{\mathrm{AY}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=\vec{a}+\vec{c}+\left(\frac{5}{4}-t\right)\vec{b}-t\vec{b}\\&=\boldsymbol{\vec{a}+\left(\frac{5}{4}-2t\right)\vec{b}+\vec{c}}\end{aligned}$$

(2) Y が辺 GH 上にあるとき，② から

$$0\leqq\frac{5}{4}-t\leqq1\quad これを\ 0<t<1\ に注意して解くと\quad \boldsymbol{\frac{1}{4}\leqq t<1}$$

(3) ① に $\alpha=1$，$\beta=1$ を代入すると　$\overrightarrow{\mathrm{PY}}=\overrightarrow{\mathrm{PX}}+\overrightarrow{\mathrm{PZ}}$

したがって，四角形 PXYZ は平行四辺形である．
これがひし形であるためには，$|\overrightarrow{\mathrm{PX}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{PZ}}|^2$ である．
ここで，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ であるから

$$1+\left(\frac{3}{4}-t\right)^2=1+\left(\frac{1}{2}-t\right)^2\quad これを解いて\quad \boldsymbol{t=\frac{5}{8}}$$

別解　四角形 PXYZ は平行四辺形であるから，これがひし形であるためには，$\overrightarrow{\mathrm{PY}}\perp\overrightarrow{\mathrm{XZ}}$ である．したがって，$\overrightarrow{\mathrm{PY}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{XZ}}=0$ より

$$\left\{\vec{a}+\left(\frac{5}{4}-2t\right)\vec{b}+\vec{c}\right\}\cdot\left(-\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}+\vec{c}\right)=0$$

ゆえに　$-1-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{5}{4}-2t\right)+1=0$　これを解いて　$t=\dfrac{5}{8}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1)

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \int_1^x (6t - 4x)t\log t\,dt$$
$$= \frac{1}{2}x + 6\int_1^x t^2\log t\,dt - 4x\int_1^x t\log t\,dt \quad \cdots ①$$

これを微分すると

$$f'(x) = \frac{1}{2} + 6x^2\log x - 4\int_1^x t\log t\,dt - 4x\cdot x\log x$$
$$= \frac{1}{2} + 2x^2\log x - 4\int_1^x t\log t\,dt \quad \cdots ②$$

ここで

$$\int_1^x t\log t\,dt = \frac{1}{2}\int_1^x (t^2)'\log t\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\, t^2\log t \,\Big]_1^x - \frac{1}{2}\int_1^x t\,dt$$
$$= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}\Big[\, t^2 \,\Big]_1^x$$
$$= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4} \quad \cdots ③$$

③ を ② に代入すると

$$f'(x) = \frac{1}{2} + 2x^2\log x - 4\left(\frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}\right)$$
$$= x^2 - \frac{1}{2} \quad \cdots ④$$

$f'(x) = 0$ のとき　$x^2 - \dfrac{1}{2} = 0$　$x > 0$ に注意して　$\boldsymbol{x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

(2) ④ を積分すると　$f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x}{2} + C$　(C は積分定数)

① より，$f(1) = \dfrac{1}{2}$ であるから，上式に $x = 1$ を代入すると

$\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + C = \dfrac{1}{2}$　ゆえに　$C = \dfrac{2}{3}$　よって　$f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{3}$

増減表は右のようになるから

$x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき極小値 $\boldsymbol{\dfrac{4 - \sqrt{2}}{6}}$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1)

$$f(x)=\frac{1}{2}x+\int_1^{2x}(3t-4x)t\log t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}x+3\int_1^{2x}t^2\log t\,dt-4x\int_1^{2x}t\log t\,dt \quad \cdots ①$$

これを微分すると

$$f'(x)=\frac{1}{2}+3\cdot 2\cdot(2x)^2\log 2x-4\int_1^{2x}t\log t\,dt-4x\cdot 2\cdot 2x\log 2x$$
$$=\frac{1}{2}+8x^2\log 2x-4\int_1^{2x}t\log t\,dt \quad \cdots ②$$

ここで $\displaystyle\int_1^{2x}t\log t\,dt=\frac{1}{2}\int_1^{2x}(t^2)'\log t\,dt$

$$=\frac{1}{2}\Big[\,t^2\log t\,\Big]_1^{2x}-\frac{1}{2}\int_1^{2x}t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}(2x)^2\log 2x-\frac{1}{4}\Big[\,t^2\,\Big]_1^{2x}$$
$$=2x^2\log 2x-x^2+\frac{1}{4} \quad \cdots ③$$

③ を ② に代入すると

$$f'(x)=\frac{1}{2}+8x^2\log 2x-4\left(2x^2\log 2x-x^2+\frac{1}{4}\right)$$
$$=4x^2-\frac{1}{2} \quad \cdots ④$$

$f'(x)=0$ のとき　$4x^2-\dfrac{1}{2}=0$　$x>0$ に注意して　$\boldsymbol{x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}}$

(2) ④ を積分すると　$f(x)=\dfrac{4}{3}x^3-\dfrac{x}{2}+C$　(C は積分定数)

① より，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$ であるから，上式に $x=\dfrac{1}{2}$ を代入すると

$\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{4}+C=\dfrac{1}{4}$　ゆえに　$C=\dfrac{1}{3}$　よって　$f(x)=\dfrac{4}{3}x^3-\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{3}$

増減表は右のようになるから

$x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ のとき極小値 $\boldsymbol{\dfrac{4-\sqrt{2}}{12}}$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗

解説 関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とすると

$$\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = \Big[\ F(t)\ \Big]_a^{g(x)} = F(g(x)) - F(a)$$

これを x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

本題では

$$\frac{d}{dx}\int_1^{2x} f(t)\,dt = f(2x)\cdot(2x)' = 2f(2x)$$

また，$\boxed{\mathbf{5}}$，$\boxed{\mathbf{6}}$ の関数をそれぞれ

$$f_5(x) = \frac{1}{2}x + \int_1^x (6t-4x)t\log t\,dt$$
$$f_6(x) = \frac{1}{2}x + \int_1^{2x} (3t-4x)t\log t\,dt$$

とおくと

$$f_5(2x) = x + \int_1^{2x} (6t-8x)t\log t\,dt = 2f_6(x)$$

$f_6(x) = \dfrac{1}{2}f_5(2x)$ であるから，f_6 の極値は f_5 の極値の $\dfrac{1}{2}$ で，そのときの x の値も $\dfrac{1}{2}$ であることが分かる．

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $\mathrm{RQ} = 2\sin\theta$，$\mathrm{PR} = \mathrm{PQ} = \sqrt{(\cos\theta + l)^2 + \sin^2\theta} = \sqrt{2l\cos\theta + l^2 + 1}$

よって　　$\boldsymbol{f(\theta) = 2\sin\theta + 2\sqrt{2l\cos\theta + l^2 + 1}}$

(2) $g(\theta) = \sqrt{2l\cos\theta + l^2 + 1}$ とおくと　$g'(\theta) = -\dfrac{l\sin\theta}{g(\theta)}$

$f(\theta) = 2\sin\theta + 2g(\theta)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= 2\cos\theta - \frac{2l\sin\theta}{g(\theta)} = \frac{2}{g(\theta)}\{g(\theta)\cos\theta - l\sin\theta\} \\ &= \frac{2\{(2l\cos\theta + l^2 + 1)\cos^2\theta - l^2\sin^2\theta\}}{g(\theta)\{g(\theta)\cos\theta + l\sin\theta\}} \\ &= \frac{2\{l^2(2\cos^2\theta - 1) + 2l\cos^3\theta + \cos^2\theta\}}{g(\theta)\{g(\theta)\cos\theta + l\sin\theta\}} \\ &= \frac{2(l + \cos\theta)\{l(2\cos^2\theta - 1) + \cos\theta\}}{g(\theta)\{g(\theta)\cos\theta + l\sin\theta\}} \end{aligned}$$

$0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より　$\dfrac{l + \cos\theta}{g(\theta)\{g(\theta)\cos\theta + l\sin\theta\}} > 0$

ここで，$h(\theta) = l(2\cos^2\theta - 1) + \cos\theta$ とおくと

$$h'(\theta) = -\sin\theta(4l\cos\theta + 1) < 0$$

ゆえに，$h(\theta)$ は単調減少で，$h\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$h\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -l$ であるから

$$h(\alpha) = 0 \quad \left(\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

をみたす α が唯一存在する．

$$l(2\cos^2\alpha - 1) + \cos\alpha = 0 \quad \text{すなわち} \quad \cos\alpha = \frac{-1 + \sqrt{8l^2 + 1}}{4l}$$

$f'(\theta)$ と $h(\theta)$ の符号は一致するから，$f(\theta)$ の増減表は次のようになる．

θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，$f(\theta)$ の最大値は

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 2\sin\alpha + 2\sqrt{2l\cos\alpha + l^2 + 1} \\ &= 2\sqrt{1 - \cos^2\alpha} + 2\sqrt{2l\cos\alpha + l^2 + 1} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2l}\sqrt{8l^2 - 2 + 2\sqrt{8l^2 + 1}} + \sqrt{4l^2 + 2 + 2\sqrt{8l^2 + 1}}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) A の確率分布表は，次のようになる．

得点	0	20	30	50	合計
確率	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

よって，A の期待値は

$$20 \times \frac{2}{6} + 30 \times \frac{1}{6} + 50 \times \frac{1}{6} = \mathbf{20} \quad (\text{点})$$

(2) コインを 3 枚投げ，表が 2 枚以上である確率は

$${}_3\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$$

したがって，B の確率分布表は，次のようになる．

得点	0	p	合計
確率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

B の期待値は $\dfrac{1}{2}p$ となり，これが A の期待値に等しいから

$$\frac{1}{2}p = 20 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{p = 40}$$

(3) A の得点が B の解く点より大きくなるのは，次の 2 つの場合である．

i) B が 40 点で A が 50 点

ii) B が 0 点で A が 0 点以外

よって，求める確率は

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{6} = \mathbf{\frac{5}{12}}$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) 漸化式から，$S_1 = a_1 = 1$，$a_n = S_{n-1} + 4$．また，$S_n = S_{n-1} + a_n$

上の 2 式に順次 $n = 2,\ 3,\ 4,\ 5$ を代入すると

$$a_2 = S_1 + 4 = 1 + 4 = 5, \qquad S_2 = S_1 + a_2 = 1 + 5 = 6,$$
$$a_3 = S_2 + 4 = 6 + 4 = 10, \qquad S_3 = S_2 + a_3 = 6 + 10 = 16,$$
$$a_4 = S_3 + 4 = 16 + 4 = 20, \qquad S_4 = S_3 + a_4 = 16 + 20 = 36,$$
$$a_5 = S_4 + 4 = 36 + 4 = 40$$

よって　$\boldsymbol{a_2 = 5,\ a_3 = 10,\ a_4 = 20,\ a_5 = 40}$

(2) $n \geqq 2$ のとき　$a_n = S_{n-1} + 4$，$a_{n+1} = S_n + 4$

上の第 2 式から第 1 式の辺々を引くと　$a_{n+1} - a_n = S_n - S_{n-1}$

また，$S_n - S_{n-1} = a_n$ であるから　$a_{n+1} - a_n = a_n$

したがって　$a_{n+1} = 2a_n$　ゆえに　$a_n = a_2 \cdot 2^{n-2} = 5 \cdot 2^{n-2}$

よって　$$\boldsymbol{a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ 5 \cdot 2^{n-2} & (n = 2, 3, \cdots) \end{cases}}$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ (1) (i)，(iii) より，$f(x) = (x^2 - 3x)(x^2 + px + q) + 7x + 5$ とおける (p，q は定数)．(ii) を上式に適用すると

$$(1-3)(1+p+q)+12=0 \qquad \text{ゆえに} \qquad p+q=5$$
$$(4-6)(4+2p+q)+19=-1 \qquad \text{ゆえに} \qquad 2p+q=6$$

これを解いて　$p = 1$，$q = 4$

したがって

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x)(x^2+x+4)+7x+5 \\ &= \{(x^2-3x+2)-2\}\{(x^2-3x+2)+(4x+2)\}+7x+5 \\ &= (x^2-3x+2)^2+4x(x^2-3x+2)-2(4x+2)+7x+5 \\ &= (x^2-3x+2)(x^2+x+2)-x+1 \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{k(x) = -x+1}$

(2) (1) の結果から　$\boldsymbol{g(x) = x^2+x+2}$

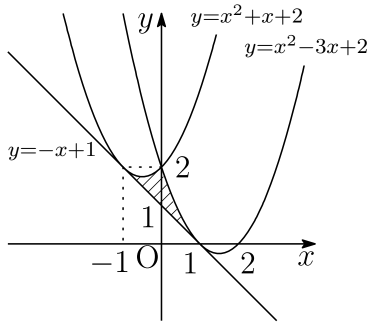
(3) $y = x^2 - 3x + 2 \cdots$ ①，$y = x^2 + x + 2 \cdots$ ②，$y = -x + 1 \cdots$ ③ とおく．

①，② を解くと　交点 $(0,\ 2)$，

①，③ を解くと　接点 $(1,\ 0)$，

②，③ を解くと　接点 $(-1,\ 2)$

したがって，①，②，③ で囲まれ部分は，下の図の斜線部分である．
斜線部分の面積を S とすると



$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{0} \{(x^2+x+2)-(-x+1)\}dx \\ &\qquad + \int_{0}^{1} \{(x^2-3x+2)-(-x+1)\}dx \\ &= \int_{-1}^{0} (x+1)^2\,dx + \int_{0}^{1} (x-1)^2\,dx \\ &= \left[\ \frac{1}{3}(x+1)^3\ \right]_{-1}^{0} + \left[\ \frac{1}{3}(x-1)^3\ \right]_{0}^{1} = \boldsymbol{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$