

平成 19 年度 宮崎大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
 工・医・農 (生物環境科学・獣医・地域農業システム)・教育文化 (中
 学 [理系]・生活環境・初等教育・中学 [文系]・障害児教育) 学部
 平成 19 年 2 月 25 日

- 工学部 1 2 3 4 5 数 II・III・A・B (120 分)
- 医学部 2 3 4 5 6 数 II・III・A・B (120 分)
- 農 (生物環境科学・応用生物科学・獣医) 学部, 教育文化 (中学 [理系]) 学部
1 3 5 7 9 数 II・III・A・B (120 分)
- 教育文化 (初等教育コース, 中学 [文系], 障害児コース, 生活環境) 学部・農 (地
 域農業システム) 学部 7 8 9 数 II・A・B (90 分)

1 微分と積分に関する次の各問に答えよ.

(1) 次の関数を微分せよ.

(i) $y = e^{\cos x}$

(ii) $y = (\log |x|)^2$

(2) 次の定積分の値を求めよ.

(i) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2 - 1} dx$

(ii) $\int_1^e \frac{\log x}{x} dx$

(iii) $\int_0^{\pi} \sin^3 x dx$

2 実数 θ ($0 < \theta < \pi$) が等式

$$\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = 3 + 2\sqrt{2}$$

を満たすとき, $x > 0$ の範囲で関数

$$f(x) = \left(\log_2 \frac{x}{2 \sin \theta} \right) \left(\log_4 \frac{x}{4 \sin \theta} \right)$$

が最小となる x の値と, そのときの最小値を求めよ.

3 座標平面上の3点を $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$ とし, $\triangle ABC$ の内部の点を $P(a, b)$ とする. ただし, 点 P は $\triangle ABC$ の周上にはないものとする. このとき, 次の各問に答えよ.

- (1) 直線 AB に関して, 点 P と対称な点 Q の座標を求めよ.
- (2) 直線 BC に関して, 点 P と対称な点を R とするとき, 2点 Q, R を通る直線 l の方程式を求めよ.
- (3) 原点 O と直線 l の距離が $\frac{4}{5}$ より小さくなるような点 P のとりうる範囲を図示せよ.

4 四面体 $OABC$ において, $OB = OC = 1$, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = \frac{\pi}{3}$ とする. $\triangle OAC$ の重心を G , 辺 AB を $1:2$ に内分する点を P , 辺 OA の中点を Q とし, 2直線 OP, BQ の交点を R とする. $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とするとき, 次の各問に答えよ.

- (1) \vec{OR} を \vec{a}, \vec{b} を用いて表せ.
- (2) $\vec{BG} \perp \vec{CR}$ であるとき, OA の長さを求めよ. さらに, CR の長さを求めよ.

5 関数 $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ について, 次の各問に答えよ.

- (1) 極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ と $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ をそれぞれ求めよ. また, 関数 $f(x)$ の極値を求めよ.
- (2) n を自然数とすると, 直線 $y = 2^{-n}$ と曲線 $y = f(x)$ によって囲まれる部分の面積を S_n とする. このとき, S_n を n を用いて表せ.
- (3) (2) の S_n について, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n+1} - S_n)$ を求めよ.

6 次の各問いに答えよ.

- (1) $x \geq 1$ のとき, 不等式 $\log x < 2\sqrt{x}$ が成り立つことを示せ. ただし, $\log x$ は x の自然対数を表す.
- (2) n を自然数とすると, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ.
- (3) n を自然数とすると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + \sin x)^n \right\}^{\frac{1}{n}} = 3$$

であることを示せ.

7 数列 $\{a_n\}$ が,

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められるとき, 次の各問に答えよ.

- (1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とするとき, b_{n+1} を b_n を用いて表せ.
- (2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を, n を用いて表せ.
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を, n を用いて表せ.

8 曲線 $C : y = -x^2 + 2x$ と, 直線 $l : y = a$ が異なる 2 つの共有点 $Q(b, a)$, $R(c, a)$ ($b < c$) をもつとする. 直線 l と y 軸との交点を $P(0, a)$ とおくとき, 次の各問に答えよ.

- (1) 点 Q が線分 PR を $1 : 2$ に内分するとき, a, b, c の値をそれぞれ求めよ.
- (2) (1) で求めた a, b, c に対し, 曲線 C の点 R における接線 m の方程式を求めよ.
- (3) 点 Q を通り, y 軸に平行な直線を n とする. (2) で求めた接線 m , 曲線 C , および直線 n で囲まれる部分の面積を求めよ.

9 最初 A, B の 2 人は数直線上の原点にいるとする. はじめに A が 2 回サイコロを投げる. 1 回サイコロを投げるごとに, 現在いる地点から, サイコロの目が 4 以下であれば数直線上を正の方向に 1 進み, 5 または 6 であれば正の方向に 2 進む.

次に B が 2 回サイコロを投げる. 1 回サイコロを投げるごとに, 現在いる地点から, サイコロの目が 4 以下であれば数直線上を負の方向に 1 進み, 5 または 6 であれば正の方向に 3 進む.

このように A, B がそれぞれ 2 回ずつサイコロを投げ, 進み終わったときの数直線上の 2 人の位置をそれぞれ a, b とする. このとき, 次の各問に答えよ.

- (1) $a \leq b$ となる確率を求めよ.
- (2) $a - b = c$ とするとき, c の期待値を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad (i) \quad y' = e^{\cos x}(\cos x)' = -e^{\cos x} \sin x$$

$$(ii) \quad y' = 2(\log |x|)(\log |x|)' = \frac{2}{x} \log |x|$$

$$(2) \quad (i) \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \log 3$$

$$(ii) \quad \int_1^e \frac{\log x}{x} dx = \int_1^e (\log x)(\log x)' dx = \left[\frac{1}{2}(\log x)^2 \right]_1^e = \frac{1}{2}$$

$$(iii) \quad \int_0^\pi \sin^3 x dx = \int_0^\pi (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \left[-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x \right]_0^\pi = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{2} \quad \text{等式 } \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = 3 + 2\sqrt{2} \quad (0 < \theta < \pi) \text{ において } \theta \neq \frac{\pi}{2} \text{ であるから}$$

$$\frac{\tan \theta + 1}{\tan \theta - 1} = 3 + 2\sqrt{2} \quad \text{ゆえに} \quad \tan \theta = \sqrt{2}$$

$$\tan \theta > 0 \text{ より } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ であるから} \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$f(x) = \left(\log_2 \frac{x}{2 \sin \theta} \right) \left(\log_4 \frac{x}{4 \sin \theta} \right)$$

$$= \left(\log_2 \frac{x}{\sin \theta} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} \log_2 \frac{x}{\sin \theta} - 1 \right)$$

ここで、 $t = \log_2 \frac{x}{\sin \theta}$, $g(t) = f(x)$ とおくと

$$g(t) = (t-1) \left(\frac{1}{2}t - 1 \right) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2) = \frac{1}{2} \left(t - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{1}{8}$$

$$t = \frac{3}{2} \text{ のとき } \log_2 \frac{x}{\sin \theta} = \frac{3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad x = 2^{\frac{3}{2}} \sin \theta = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

よって、 $f(x)$ は $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$ のとき、最小値 $-\frac{1}{8}$ をとる。 ■

- 3 (1) 直線 AB に関して、点 P(a, b) と対称な点 Q の座標を (x₁, y₁) とする。

PQ の中点 $\left(\frac{x_1+a}{2}, \frac{y_1+b}{2}\right)$ は直線 $y = -x + 1$ 上にあるから

$$\frac{y_1+b}{2} = -\frac{x_1+a}{2} + 1 \quad \text{ゆえに} \quad x_1 + y_1 = 2 - a - b \quad \dots \textcircled{1}$$

直線 PQ は直線 $y = -x + 1$ に垂直であるから

$$\frac{y_1 - b}{x_1 - a} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad x_1 - y_1 = a - b \dots \textcircled{2}$$

①, ② より $x_1 = 1 - b, y_1 = 1 - a$ よって **Q(1 - b, 1 - a)**

- (2) 直線 BC に関して、点 P(a, b) と対称な点 R の座標を (x₂, y₂) とする。

PR の中点 $\left(\frac{x_2+a}{2}, \frac{y_2+b}{2}\right)$ は直線 $y = x + 1$ 上にあるから

$$\frac{y_2+b}{2} = \frac{x_2+a}{2} + 1 \quad \text{ゆえに} \quad -x_2 + y_2 = a - b + 2 \quad \dots \textcircled{3}$$

直線 PR は直線 $y = x + 1$ に垂直であるから

$$\frac{y_2 - b}{x_2 - a} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad x_2 + y_2 = a + b \dots \textcircled{4}$$

③, ④ より $x_2 = b - 1, y_2 = a + 1$ よって **R(b - 1, a + 1)**

2点 Q(1 - b, 1 - a), R(b - 1, a + 1) を通る直線 l の方程式は

$$y - (1 - a) = \frac{(a + 1) - (1 - a)}{(b - 1) - (1 - b)} \{x - (1 - b)\}$$

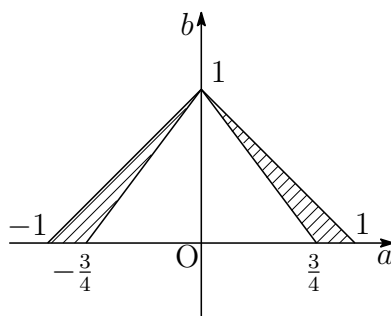
すなわち **$ax + (1 - b)y + b - 1 = 0$**

- (3) (2) の結果から, $\frac{|b-1|}{\sqrt{a^2 + (1-b)^2}} < \frac{4}{5}$ であるから

$$16\{a^2 + (1-b)^2\} > 25(b-1)^2 \quad \text{ゆえに} \quad 16a^2 - 9(b-1)^2 > 0$$

したがって $(4a + 3b - 3)(4a - 3b + 3) > 0$

よって、求める領域は、下の図の斜線部分。ただし、境界線を含まない。



- 4 (1) $\triangle OAP$ と直線 BQ についてメネラウスの定理を適用すると

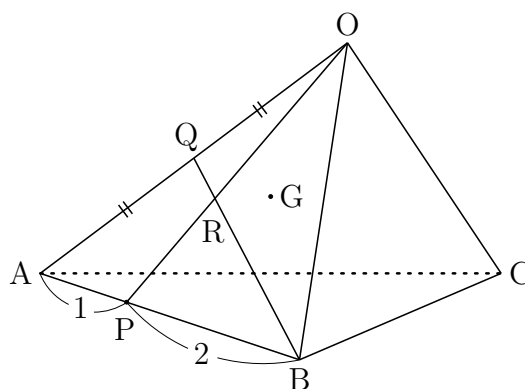
$$\frac{OQ}{QA} \cdot \frac{AB}{BP} \cdot \frac{PR}{RO} = 1$$

ゆえに
$$\frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{PR}{RO} = 1$$

したがって $PR : RO = 2 : 3$

R は線分 OP を $3 : 2$ に内分するから

$$\vec{OR} = \frac{3}{5}\vec{OP} = \frac{3}{5} \times \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{5}$$



- (2) (1) の結果から

$$\vec{BG} = \vec{OG} - \vec{OB} = \frac{\vec{a} + \vec{c}}{3} - \vec{b} = \frac{1}{3}(\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c})$$

$$\vec{CR} = \vec{OR} - \vec{OC} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{5} - \vec{c} = \frac{1}{5}(2\vec{a} + \vec{b} - 5\vec{c})$$

$\vec{BG} \perp \vec{CR}$ より, $\vec{BG} \cdot \vec{CR} = 0$ であるから

$$(\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b} - 5\vec{c}) = 0$$

$$2|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 - 5|\vec{c}|^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 16\vec{b} \cdot \vec{c} - 3\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

$|\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot 1 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}|\vec{a}|$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 1 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ より

$$2|\vec{a}|^2 - 3 - 5 - \frac{5}{2}|\vec{a}| + 16 \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2}|\vec{a}| = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 2|\vec{a}|^2 - 4|\vec{a}| = 0$$

$|\vec{a}| \neq 0$ であるから $OA = |\vec{a}| = 2$

このとき, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 2 \cdot 1 \cos \frac{\pi}{3} = 1$ であるから

$$\begin{aligned} |\vec{CR}|^2 &= \frac{1}{25} |2\vec{a} + \vec{b} - 5\vec{c}|^2 \\ &= \frac{1}{25} (4|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 25|\vec{c}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} - 10\vec{b} \cdot \vec{c} - 20\vec{c} \cdot \vec{a}) \\ &= \frac{1}{25} \left(4 \cdot 2^2 + 1 + 25 + 4 \cdot 1 - 10 \cdot \frac{1}{2} - 20 \cdot 1 \right) = \frac{21}{25} \end{aligned}$$

よって $CR = |\vec{CR}| = \frac{\sqrt{21}}{5}$ ■

5 (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x + \frac{1}{x}} = 0$, 同様に $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \text{ を微分すると } f'(x) = -\frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$f(x)$ の増減表は、右のようになる。

よって $x = 1$ のとき 極大値 1

$x = -1$ のとき 極小値 -1

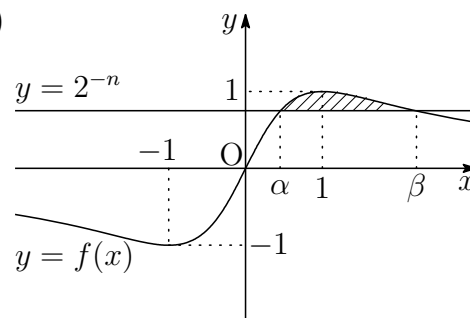
x	...	-1	...	1	...	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	
$f(x)$		↘	-1	↗	1	↘

(2) $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$ と $y = 2^{-n}$ の共有点の x 座標は

$$\frac{2x}{x^2 + 1} = 2^{-n} \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - 2 \cdot 2^n x + 1 = 0 \quad \dots (*)$$

方程式(*)の解を α, β とすると ($\alpha < \beta$)

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2x}{x^2 + 1} dx - 2^{-n}(\beta - \alpha) \\ &= \left[\log(x^2 + 1) \right]_{\alpha}^{\beta} - 2^{-n}(\beta - \alpha) \\ &= \log \frac{\beta^2 + 1}{\alpha^2 + 1} - 2^{-n}(\beta - \alpha) \end{aligned}$$



(*) を解いて $\alpha = 2^n - \sqrt{4^n - 1}$, $\beta = 2^n + \sqrt{4^n - 1}$, $\beta - \alpha = 2\sqrt{4^n - 1}$

また, α, β は方程式(*)の解であるから

$$\alpha^2 + 1 = 2^{n+1}\alpha, \quad \beta^2 + 1 = 2^{n+1}\beta, \quad \alpha\beta = 1$$

したがって $\frac{\beta^2 + 1}{\alpha^2 + 1} = \frac{2^{n+1}\beta}{2^{n+1}\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta^2}{\alpha\beta} = \beta^2$

上の諸式から $S_n = \log \beta^2 - 2^{-n} \cdot 2\sqrt{4^n - 1}$

$$= 2 \log(2^n + \sqrt{4^n - 1}) - 2^{1-n} \sqrt{4^n - 1}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= 2 \log \frac{2^{n+1} + \sqrt{4^{n+1} - 1}}{2^n + \sqrt{4^n - 1}} - 2^{-n} \sqrt{4^{n+1} - 1} + 2^{1-n} \sqrt{4^n - 1} \\ &= 2 \log \frac{2 + \sqrt{4 - 4^{-n}}}{1 + \sqrt{1 - 4^{-n}}} - \sqrt{4 - 4^{-n}} + 2\sqrt{1 - 4^{-n}} \end{aligned}$$

このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^{-n} = 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n+1} - S_n) = 2 \log \frac{2 + \sqrt{4}}{1 + \sqrt{1}} - \sqrt{4} + 2\sqrt{1} = 2 \log 2$$



6 (1) $f(x) = 2\sqrt{x} - \log x$ とおくと $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x}$

したがって $x \geq 1$ のとき, $f'(x) \geq 0$

$x > 1$ で $f(x)$ は単調増加で, $f(1) = 2 > 0$ であるから

$$x \geq 1 \text{ のとき } f(x) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \log x < 2\sqrt{x}$$

(2) (1) の結果から, 自然数 n に対して

$$0 < \log(n+1) < 2\sqrt{n+1} \quad \text{ゆえに} \quad 0 < \log(n+1)^{\frac{1}{n}} < 2\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} 2\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 0$ であるから, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(n+1)^{\frac{1}{n}} = 0 \quad \text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{\frac{1}{n}} = 1$$

(3) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき, $2 + \frac{2}{\pi}x < 2 + \sin x < 3$ であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 + \frac{2}{\pi}x\right)^n dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + \sin x)^n dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3^n dx$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 + \frac{2}{\pi}x\right)^n dx &= \left[\frac{1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} \left(2 + \frac{2}{\pi}x\right)^{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{3^n}{n+1} \cdot \frac{3\pi}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right\}, \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3^n dx = 3^n \cdot \frac{\pi}{2}$$

したがって

$$\frac{3}{(n+1)^{\frac{1}{n}}} \left(\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right\}^{\frac{1}{n}} < \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + \sin x)^n dx \right\}^{\frac{1}{n}} < 3 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

(2) の結果により $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{(n+1)^{\frac{1}{n}}} \left(\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right\}^{\frac{1}{n}} = 3$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = 3$$

よって, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + \sin x)^n dx \right\}^{\frac{1}{n}} = 3$$



7 (1) $a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n$ より

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -2(a_{n+1} - a_n) \quad \text{よって} \quad b_{n+1} = -2b_n$$

(2) $b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$

$\{b_n\}$ は初項が 1, 公比が -2 の等比数列であるから

$$b_n = 1 \cdot (-2)^{n-1} = (-2)^{n-1}$$

(3) (2) の結果から, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-2)^{k-1} \\ &= 1 + \frac{1 - (-2)^{n-1}}{1 - (-2)} = \frac{4 - (-2)^{n-1}}{3} \end{aligned}$$

上式は, $n = 1$ のときも成立するので $a_n = \frac{4 - (-2)^{n-1}}{3}$

解説 漸化式 $a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$ について

$$\alpha \neq \beta \text{ のとき} \quad a_n = a\alpha^n + b\beta^n \quad (a, b \text{ は定数})$$

$$\alpha = \beta \text{ のとき} \quad a_n = (cn + d)\alpha^n \quad (c, d \text{ は定数})$$

が成り立つ¹.

漸化式 $a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n = 0$ の特性方程式 $x^2 + x - 2 = 0$ の解が 1, -2 であるから, 一般項は

$$a_n = a + b \cdot (-2)^n$$

とおける. $a_1 = 1, a_2 = 2$ であるから

$$a - 2b = 1, \quad a + 4b = 2 \quad \text{これを解いて} \quad a = \frac{4}{3}, \quad b = \frac{1}{6}$$

よって $a_n = \frac{4}{3} + \frac{1}{6}(-2)^n$ ■

¹ http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou_2014.pdf の 4 の補足を参照

8 (1) Qは線分PRを1:2に内分する点であるから $c = 3b$ …①

2点Q, Rの中点のx座標は1であるから $\frac{b+c}{2} = 1$ …②

①, ②を解いて $b = \frac{1}{2}, c = \frac{3}{2}$

$y = -x^2 + 2x$ と $y = a$ から y を消去すると $x^2 - 2x + a = 0$ …③

方程式③の解が b, c であるから, 解と係数の関係により

$$a = bc = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

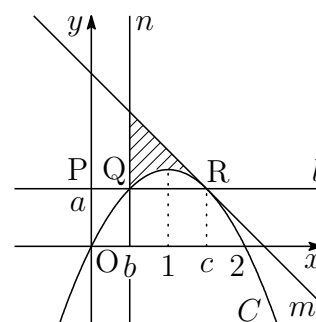
(2) $y = -x^2 + 2x$ より $y' = -2x + 2$ ゆえに $x = \frac{3}{2}$ のとき $y' = -1$

l は点 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$ を通り, 傾き -1 の直線であるから

$$y - \frac{3}{4} = -1 \left(x - \frac{3}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = -x + \frac{9}{4}$$

(3) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left\{ \left(-x + \frac{9}{4}\right) - (-x^2 + 2x) \right\} dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{3}{2}\right)^3 \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



別解 C と l で囲まれた部分の面積は $\frac{1}{6} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}$

よって $S = \frac{1}{2}QR^2 - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ ■

$$\boxed{9} \quad (1) \quad P(a = 2) = P(b = -2) = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{9}$$

$$P(a = 3) = P(b = 2) = \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} \times 2 = \frac{4}{9}$$

$$P(a = 4) = P(b = 6) = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$$

したがって、 $a \leq b$ となる確率は

$$P(a = 2) \times P(b = 2) + P(b = 6) = \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{25}{81}$$

(2)

a	b	c	$P(c)$
2	6	-4	$\frac{4}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{4}{81}$
3	6	-3	$\frac{4}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{4}{81}$
4	6	-2	$\frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{81}$
2	2	0	$\frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$
3	2	1	$\frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$
4	2	2	$\frac{1}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{81}$
2	-2	4	$\frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$
3	-2	5	$\frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$
4	-2	6	$\frac{1}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{81}$

よって、求める期待値は

$$\begin{aligned} E(c) &= (-4) \times \frac{4}{81} + (-3) \times \frac{4}{81} + (-2) \times \frac{1}{81} + 1 \times \frac{16}{81} \\ &\quad + 2 \times \frac{4}{81} + 4 \times \frac{16}{81} + 5 \times \frac{16}{81} + 6 \times \frac{4}{81} \\ &= 2 \end{aligned}$$

