平成19年度　宮崎大学２次試験前期日程(数学問題)
工・医・農(生物環境科学・獣医・地域農業システム)・教育文化(中学[理系]・生活環境・初等教育・中学[文系]・障害児教育)学部
平成19年2月25日

- 工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ 数II・III・A・B (120分)
- 医学部は，$\boxed{2}$ ～ $\boxed{6}$ 数II・III・A・B (120分)
- 農(生物環境科学・応用生物科学・獣医)学部，教育文化(中学[理系])学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{7}$, $\boxed{9}$ 数II・III・A・B (120分)
- 教育文化(初等教育コース，中学[文系]，障害児コース，生活環境)学部・農(地域農業システム)学部は，$\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{9}$ 数II・A・B (90分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 微分と積分に関する次の各問に答えよ．

(1) 次の関数を微分せよ．

(i) $y = e^{\cos x}$

(ii) $y = (\log|\,x\,|)^2$

(2) 次の定積分の値を求めよ．

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-1}\,dx$

(ii) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\log x}{x}\,dx$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x\,dx$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 実数 $\theta\,(0 < \theta < \pi)$ が等式

$$\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = 3 + 2\sqrt{2}$$

を満たすとき，$x > 0$ の範囲で関数

$$f(x) = \left(\log_2 \frac{x}{2\sin\theta}\right)\left(\log_4 \frac{x}{4\sin\theta}\right)$$

が最小となる x の値と，そのときの最小値を求めよ．

3 座標平面上の3点をA(1, 0)，B(0, 1)，C(−1, 0)とし，△ABCの内部の点をP(a, b)とする．ただし，点Pは△ABCの周上にはないものとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 直線ABに関して，点Pと対称な点Qの座標を求めよ．

(2) 直線BCに関して，点Pと対称な点をRとするとき，2点Q，Rを通る直線lの方程式を求めよ．

(3) 原点Oと直線lの距離が$\dfrac{4}{5}$より小さくなるような点Pのとりうる範囲を図示せよ．

4 四面体OABCにおいて，OB = OC = 1，$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{COA} = \dfrac{\pi}{3}$とする．△OACの重心をG，辺ABを1 : 2に内分する点をP，辺OAの中点をQとし，2直線OP，BQの交点をRとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$とするとき，次の各問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CR}}$であるとき，OAの長さを求めよ．さらに，CRの長さを求めよ．

5 関数$f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$について，次の各問に答えよ．

(1) 極限値$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$と$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$をそれぞれ求めよ．また，関数$f(x)$の極値を求めよ．

(2) nを自然数とするとき，直線$y = 2^{-n}$と曲線$y = f(x)$によって囲まれる部分の面積をS_nとする．このとき，S_nをnを用いて表せ．

(3) (2)のS_nについて，極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(S_{n+1} - S_n)$を求めよ．

6 次の各問いに答えよ．

(1) $x \geqq 1$のとき，不等式$\log x < 2\sqrt{x}$が成り立つことを示せ．ただし，$\log x$はxの自然対数を表す．

(2) nを自然数とするとき，極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}}$を求めよ．

(3) nを自然数とするとき，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+\sin x)^n\right\}^{\frac{1}{n}} = 3$$

であることを示せ．

$\boxed{7}$ 数列 $\{a_n\}$ が,

$$a_1 = 1,\quad a_2 = 2,\quad a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められるとき，次の各問に答えよ.

(1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とするとき，b_{n+1} を b_n を用いて表せ.

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を，n を用いて表せ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を，n を用いて表せ.

$\boxed{8}$ 曲線 $C : y = -x^2 + 2x$ と，直線 $l : y = a$ が異なる 2 つの共有点 $\mathrm{Q}(b,\ a)$, $\mathrm{R}(c,\ a)$ $(b < c)$ をもつとする．直線 l と y 軸との交点を $\mathrm{P}(0,\ a)$ とおくとき，次の各問に答えよ.

(1) 点 Q が線分 PR を 1 : 2 に内分するとき，a，b，c の値をそれぞれ求めよ.

(2) (1) で求めた a，b，c に対し，曲線 C の点 R における接線 m の方程式を求めよ.

(3) 点 Q を通り，y 軸に平行な直線を n とする．(2) で求めた接線 m，曲線 C，および直線 n で囲まれる部分の面積を求めよ.

$\boxed{9}$ 最初 A，B の 2 人は数直線上の原点にいるとする．はじめに A が 2 回サイコロを投げる．1 回サイコロを投げるごとに，現在いる地点から，サイコロの目が 4 以下であれば数直線上を正の方向に 1 進み，5 または 6 であれば正の方向に 2 進む.
次に B が 2 回サイコロを投げる．1 回サイコロを投げるごとに，現在いる地点から，サイコロの目が 4 以下であれば数直線上を負の方向に 1 進み，5 または 6 であれば正の方向に 3 進む.
このように A，B がそれぞれ 2 回ずつサイコロを投げ，進み終えたときの数直線上の 2 人の位置をそれぞれ a，b とする．このとき，次の各問に答えよ.

(1) $a \leqq b$ となる確率を求めよ.

(2) $a - b = c$ とするとき，c の期待値を求めよ.

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) (i) $y' = e^{\cos x}(\cos x)' = \boldsymbol{-e^{\cos x}\sin x}$

(ii) $y' = 2(\log|\,x\,|)(\log|\,x\,|)' = \boldsymbol{\dfrac{2}{x}\log|\,x\,|}$

(2) (i) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx$

$$= \frac{1}{2}\Big[\ \log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\ \Big]_0^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{-\frac{1}{2}\log 3}$$

(ii) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx = \int_1^e (\log x)(\log x)'\,dx = \Big[\ \frac{1}{2}(\log x)^2\ \Big]_1^e = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x\,dx = \int_0^{\pi}(1-\cos^2 x)\sin x\,dx = \Big[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 等式 $\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta} = 3+2\sqrt{2}\ (0<\theta<\pi)$ において $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\frac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1} = 3+2\sqrt{2} \quad ゆえに \quad \tan\theta = \sqrt{2}$$

$\tan\theta > 0$ より $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$$f(x) = \left(\log_2\frac{x}{2\sin\theta}\right)\left(\log_4\frac{x}{4\sin\theta}\right)$$
$$= \left(\log_2\frac{x}{\sin\theta}-1\right)\left(\frac{1}{2}\log_2\frac{x}{\sin\theta}-1\right)$$

ここで，$t = \log_2\dfrac{x}{\sin\theta}$，$g(t) = f(x)$ とおくと

$$g(t) = (t-1)\left(\frac{1}{2}t-1\right) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2) = \frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}$$

$t=\dfrac{3}{2}$ のとき　$\log_2\dfrac{x}{\sin\theta} = \dfrac{3}{2}$　ゆえに　$x = 2^{\frac{3}{2}}\sin\theta = 2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

よって，$f(x)$ は $\boldsymbol{x = \dfrac{4}{\sqrt{3}}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{1}{8}}$ をとる．

3 (1) 直線ABに関して，点P$(a,\ b)$と対称な点Qの座標を$(x_1,\ y_1)$とする．

PQの中点$\left(\dfrac{x_1+a}{2},\ \dfrac{y_1+b}{2}\right)$は直線$y=-x+1$上にあるから

$$\frac{y_1+b}{2}=-\frac{x_1+a}{2}+1\quad ゆえに\quad x_1+y_1=2-a-b\quad \cdots①$$

直線PQは直線$y=-x+1$に垂直であるから

$$\frac{y_1-b}{x_1-a}=1\quad ゆえに\quad x_1-y_1=a-b\cdots②$$

①，②より　$x_1=1-b,\ y_1=1-a$　よって　$\mathbf{Q(1-b,\ 1-a)}$

(2) 直線BCに関して，点P$(a,\ b)$と対称な点Rの座標を$(x_2,\ y_2)$とする．

PRの中点$\left(\dfrac{x_2+a}{2},\ \dfrac{y_2+b}{2}\right)$は直線$y=x+1$上にあるから

$$\frac{y_2+b}{2}=\frac{x_2+a}{2}+1\quad ゆえに\quad -x_2+y_2=a-b+2\quad \cdots③$$

直線PRは直線$y=x+1$に垂直であるから

$$\frac{y_2-b}{x_2-a}=-1\quad ゆえに\quad x_2+y_2=a+b\cdots④$$

③，④より　$x_2=b-1,\ y_1=a+1$　よって　R$(b-1,\ a+1)$

2点Q$(1-b,\ 1-a)$，R$(b-1,\ a+1)$を通る直線lの方程式は

$$y-(1-a)=\frac{(a+1)-(1-a)}{(b-1)-(1-b)}\{x-(1-b)\}$$

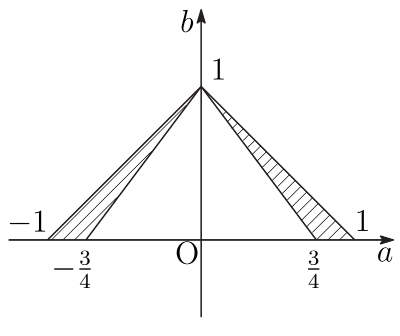
すなわち　$\boldsymbol{ax+(1-b)y+b-1=0}$

(3) (2)の結果から，$\dfrac{|b-1|}{\sqrt{a^2+(1-b)^2}}<\dfrac{4}{5}$であるから

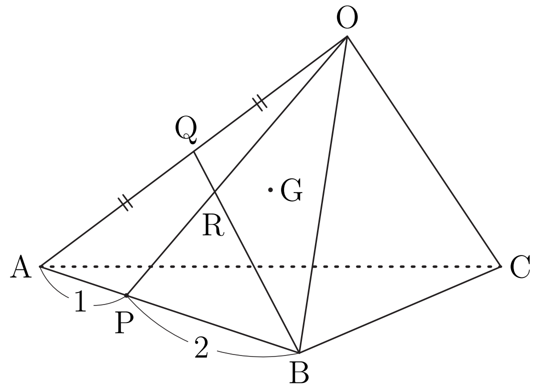
$$16\{a^2+(1-b)^2\}>25(b-1)^2\quad ゆえに\quad 16a^2-9(b-1)^2>0$$

したがって　$(4a+3b-3)(4a-3b+3)>0$

よって，求める領域は，下の図の斜線部分．ただし，境界線を含まない．



$\boxed{\textbf{4}}$ (1) $\triangle$OAP と直線 BQ についてメネラウスの定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BP}}\cdot\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RO}}=1$$

ゆえに $\quad \dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RO}}=1$

したがって $\quad \mathrm{PR}:\mathrm{RO}=2:3$

R は線分 OP を $3:2$ に内分するから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{5}\times\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}=\boldsymbol{\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{5}}$$

(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{\vec{a}+\vec{c}}{3}-\vec{b}=\frac{1}{3}(\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{5}-\vec{c}=\frac{1}{5}(2\vec{a}+\vec{b}-5\vec{c})$$

$\overrightarrow{\mathrm{BG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{BG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CR}}=0$ であるから

$$(\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c})\cdot(2\vec{a}+\vec{b}-5\vec{c})=0$$
$$2|\vec{a}|^2-3|\vec{b}|^2-5|\vec{c}|^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}+16\vec{b}\cdot\vec{c}-3\vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

$|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot1\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}|\vec{a}|$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot1\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ より

$$2|\vec{a}|^2-3-5-\frac{5}{2}|\vec{a}|+16\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{2}|\vec{a}|=0 \quad \text{ゆえに} \quad 2|\vec{a}|^2-4|\vec{a}|=0$$

$|\vec{a}|\neq0$ であるから $\quad \mathrm{OA}=|\vec{a}|=\mathbf{2}$

このとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{a}=2\cdot1\cos\dfrac{\pi}{3}=1$ であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CR}}|^2&=\frac{1}{25}|2\vec{a}+\vec{b}-5\vec{c}|^2\\&=\frac{1}{25}(4|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+25|\vec{c}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}-10\vec{b}\cdot\vec{c}-20\vec{c}\cdot\vec{a})\\&=\frac{1}{25}\left(4\cdot2^2+1+25+4\cdot1-10\cdot\frac{1}{2}-20\cdot1\right)=\frac{21}{25}\end{aligned}$$

よって $\quad \mathrm{CR}=|\overrightarrow{\mathrm{CR}}|=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{21}}{5}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x+\frac{1}{x}} = \mathbf{0},$ 同様に $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \mathbf{0}$

$f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ を微分すると $f'(x) = -\dfrac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$f(x)$ の増減表は，右のようになる．

よって $x=1$ のとき **極大値 1**

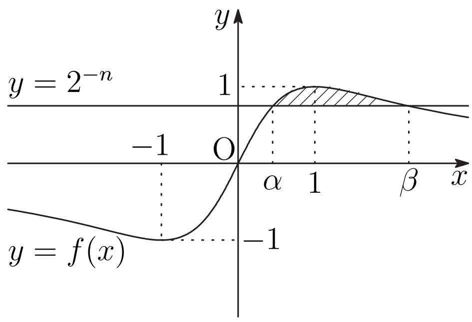
$x=-1$ のとき **極小値 $-$ 1**

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$

(2) $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$ と $y = 2^{-n}$ の共有点の x 座標は

$$\frac{2x}{x^2+1} = 2^{-n} \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - 2{\cdot}2^n x + 1 = 0 \quad \cdots(*)$$

方程式 $(*)$ の解を α，β とすると $(\alpha < \beta)$



$$\begin{aligned} S_n &= \int_\alpha^\beta \frac{2x}{x^2+1}\,dx - 2^{-n}(\beta-\alpha) \\ &= \Big[\ \log(x^2+1)\ \Big]_\alpha^\beta - 2^{-n}(\beta-\alpha) \\ &= \log\frac{\beta^2+1}{\alpha^2+1} - 2^{-n}(\beta-\alpha) \end{aligned}$$

$(*)$ を解いて $\alpha = 2^n - \sqrt{4^n-1}$, $\beta = 2^n + \sqrt{4^n-1}$, $\beta - \alpha = 2\sqrt{4^n-1}$

また，α，β は方程式 $(*)$ の解であるから

$$\alpha^2+1 = 2^{n+1}\alpha, \quad \beta^2+1 = 2^{n+1}\beta, \quad \alpha\beta = 1$$

したがって $\dfrac{\beta^2+1}{\alpha^2+1} = \dfrac{2^{n+1}\beta}{2^{n+1}\alpha} = \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\beta^2}{\alpha\beta} = \beta^2$

上の諸式から $S_n = \log\beta^2 - 2^{-n}{\cdot}2\sqrt{4^n-1}$

$$= \mathbf{2\log(2^n + \sqrt{4^n-1}) - 2^{1-n}\sqrt{4^n-1}}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= 2\log\frac{2^{n+1}+\sqrt{4^{n+1}-1}}{2^n+\sqrt{4^n-1}} - 2^{-n}\sqrt{4^{n+1}-1} + 2^{1-n}\sqrt{4^n-1} \\ &= 2\log\frac{2+\sqrt{4-4^{-n}}}{1+\sqrt{1-4^{-n}}} - \sqrt{4-4^{-n}} + 2\sqrt{1-4^{-n}} \end{aligned}$$

このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 4^{-n} = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}(S_{n+1}-S_n) = 2\log\frac{2+\sqrt{4}}{1+\sqrt{1}} - \sqrt{4} + 2\sqrt{1} = \mathbf{2\log 2}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $f(x)=2\sqrt{x}-\log x$ とおくと　　$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$

したがって　$x \geqq 1$ のとき，$f'(x) \geqq 0$

$x>1$ で $f(x)$ は単調増加で，$f(1)=2>0$ であるから

$$x \geqq 1 \text{ のとき}\quad f(x)>0 \quad \text{ゆえに}\quad \log x < 2\sqrt{x}$$

(2) (1) の結果から，自然数 n に対して

$$0<\log(n+1)<2\sqrt{n+1}\quad \text{ゆえに}\quad 0<\log(n+1)^{\frac{1}{n}}<2\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\log(n+1)^{\frac{1}{n}}=0 \quad \text{よって}\quad \lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}}=\mathbf{1}$$

(3) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$2+\dfrac{2}{\pi}x<2+\sin x<3$ であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2+\frac{2}{\pi}x\right)^n dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+\sin x)^n\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}3^n\,dx$$

ゆえに
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2+\frac{2}{\pi}x\right)^n dx=\left[\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\left(2+\frac{2}{\pi}x\right)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{3^n}{n+1}\cdot\frac{3\pi}{2}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right\},$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}3^n\,dx=3^n\cdot\frac{\pi}{2}$$

したがって

$$\frac{3}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right\}^{\frac{1}{n}}<\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+\sin x)^n\,dx\right\}^{\frac{1}{n}}<3\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

(2) の結果により
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right\}^{\frac{1}{n}}=3$$
$$\lim_{n\to\infty}3\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}}=3$$

よって，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+\sin x)^n\,dx\right\}^{\frac{1}{n}}=3$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n$ より

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -2(a_{n+1} - a_n) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b_{n+1} = -2b_n}$$

(2) $b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$

$\{b_n\}$ は初項が 1，公比が -2 の等比数列であるから

$$b_n = 1\cdot(-2)^{n-1} = \boldsymbol{(-2)^{n-1}}$$

(3) (2) の結果から，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-2)^{k-1} \\ &= 1 + \frac{1-(-2)^{n-1}}{1-(-2)} = \frac{4-(-2)^{n-1}}{3} \end{aligned}$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するので $\quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{4-(-2)^{n-1}}{3}}$

解説 漸化式 $a_{n+2} - (\alpha+\beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$ について

$\alpha \neq \beta$ のとき $\quad a_n = a\alpha^n + b\beta^n \quad$ (a, b は定数)

$\alpha = \beta$ のとき $\quad a_n = (cn+d)\alpha^n \quad$ (c, d は定数)

が成り立つ[1].

漸化式 $a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n = 0$ の特性方程式 $x^2 + x - 2 = 0$ の解が 1，-2 であるから，一般項は

$$a_n = a + b\cdot(-2)^n$$

とおける．$a_1 = 1$，$a_2 = 2$ であるから

$$a - 2b = 1, \quad a + 4b = 2 \quad \text{これを解いて} \quad a = \frac{4}{3}, \quad b = \frac{1}{6}$$

よって $\quad a_n = \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{6}(-2)^n$

---

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou_2014.pdf の $\boxed{\mathbf{4}}$ の補足を参照

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) Q は線分 PR を $1:2$ に内分する点であるから　　$c=3b$　$\cdots$①

2 点 Q，R の中点の x 座標は 1 であるから　　$\dfrac{b+c}{2}=1$　$\cdots$②

①，② を解いて　　$\boldsymbol{b=\dfrac{1}{2},\ c=\dfrac{3}{2}}$

$y=-x^2+2x$ と $y=a$ から y を消去すると　　$x^2-2x+a=0$　$\cdots$③

方程式 ③ の解が b，c であるから，解と係数の関係により

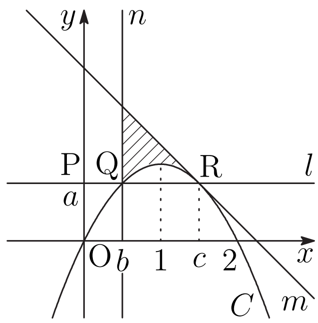
$$a=bc=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

(2) $y=-x^2+2x$ より　$y'=-2x+2$　ゆえに　$x=\dfrac{3}{2}$ のとき　$y'=-1$

l は点 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$ を通り，傾き -1 の直線であるから

$$y-\frac{3}{4}=-1\left(x-\frac{3}{2}\right)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=-x+\frac{9}{4}}$$

(3) 求める面積を S とすると



$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left\{\left(-x+\frac{9}{4}\right)-(-x^2+2x)\right\}dx$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

別解 C と l で囲まれた部分の面積は　$\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{6}$

よって　　$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{QR}^2-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}\cdot1^2-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1)

$$P(a=2)=P(b=-2)=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{9}$$

$$P(a=3)=P(b=2)=\frac{4}{6}\times\frac{2}{6}\times 2=\frac{4}{9}$$

$$P(a=4)=P(b=6)=\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{9}$$

したがって，$a \leqq b$ となる確率は

$$P(a=2)\times P(b=2)+P(b=6)=\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\mathbf{\frac{25}{81}}$$

(2)

a	b	c	$P(c)$
2	6	-4	$\frac{4}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{4}{81}$
3	6	-3	$\frac{4}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{4}{81}$
4	6	-2	$\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{81}$
2	2	0	$\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{16}{81}$
3	2	1	$\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{16}{81}$
4	2	2	$\frac{1}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{81}$
2	-2	4	$\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{16}{81}$
3	-2	5	$\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{16}{81}$
4	-2	6	$\frac{1}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{81}$

よって，求める期待値は

$$\begin{aligned}E(c)&=(-4)\times\frac{4}{81}+(-3)\times\frac{4}{81}+(-2)\times\frac{1}{81}+1\times\frac{16}{81}\\&\quad+2\times\frac{4}{81}+4\times\frac{16}{81}+5\times\frac{16}{81}+6\times\frac{4}{81}\\&=\mathbf{2}\end{aligned}$$