平成18年度　宮崎大学２次試験前期日程 (数学問題)
工・医・農 (生物環境科学・獣医・地域農業システム)・教育文化 (中学 [理系]・生活環境・初等教育・中学 [文系]・障害児教育) 学部
平成18年2月25日

- 工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{5}$ 数 II・III・A・B (120 分)
- 医学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 II・III・A・B (120 分)
- 農 (生物環境科学・獣医) 学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$ 数 II・III・A・B (120 分)
- 教育文化 (中学 [理系]) 学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{7}$ 数 II・III・A・B (120 分)
- 教育文化 (初等教育コース，中学 [文系]，障害児コース) 学部・農 (地域農業システム) 学部は，$\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{9}$ 数 II・A・B (90 分)
- 教育文化 (生活環境) 学部は，$\boxed{5}$, $\boxed{7}$, $\boxed{9}$ 数学 II・B (90 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(4,-1)$，$\mathrm{B}\left(6,-\frac{1}{2}\right)$ を通る直線 l について，次の各問に答えよ．

(1) 点 $\mathrm{P}(3,-2)$ を通り，直線 l に点 A で接する円 C の方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた円 C の l 以外の接線で，直線 l に平行なものを求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の各問に答えよ．

(1) $-\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{4}$，$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ とする．このとき，$\sin\theta-\cos\theta$ の値を求めよ．

(2) 次の計算は誤りである．① から ⑥ の等号の中で誤っているものをすべてあげ，誤りと判断した理由を述べよ．

$$8 \underset{①}{=} \sqrt{64} \underset{②}{=} \sqrt{2^6} \underset{③}{=} \sqrt{(-2)^6} \underset{④}{=} \sqrt{((-2)^3)^2} \underset{⑤}{=} (-2)^3 \underset{⑥}{=} -8$$

(3) $p=\dfrac{2^{148}+1}{17}$ は整数である．p は何けたの整数か答えよ．ただし，$0.301<\log_{10}2<0.302$ である．

3 nを自然数として，曲線$y=e^{-x}$上の点$\mathrm{P}_n(n,\ e^{-n})$における接線とx軸との交点のx座標をa_nとする．また，x軸上に点$\mathrm{Q}_n(n,\ 0)$と点$\mathrm{R}_n(a_n,\ 0)$をとる．このとき，次の各問に答えよ．

(1) a_nをnを用いて表せ．

(2) $\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n$の面積を$n$を用いて表せ．

(3) 曲線$y=e^{-x}$，直線$x=1$，$x=a_n$およびx軸で囲まれる部分から，$\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{R}_1$，$\triangle \mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2\mathrm{R}_2$，$\cdots$，$\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n$を取り除いた部分の面積を$S_n$とする．このとき，極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$を求めよ．

4 曲線$y=\tan x\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$，直線$x=\dfrac{\pi}{4}$，および$x$軸で囲まれる部分を$S$とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) Sの面積を求めよ．

(2) 関数$f(x)=\tan x - x$を微分せよ．

(3) Sをx軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ．

5 四面体OABCにおいて，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=2$，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=1$とする．また，辺OB上に点PをAP$\perp$OBとなるようにとる．さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$をそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$とおく．このとき，次の各問に答えよ．

(1) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$\vec{b}$を用いて表せ．

(2) $\triangle$APCの面積を求めよ．

(3) 平面OAC上に点Qを直線PQが平面OACに垂直となるようにとる．このとき，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$を$\vec{a}$，$\vec{c}$を用いて表せ．ただし，平面OACは3点O，A，Cを通る平面である．

6 次の各問に答えよ．ただし，$\log x$はxの自然対数を表す．

(1) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\log(\cos x)+\frac{x^2}{2}<0$$

(2) 次の不等式を証明せよ．

$$-\frac{\pi}{3}\log 2+\frac{\pi^3}{81}<\int_0^{\frac{\pi}{3}}\log(\cos x)\,dx<-\frac{\pi^3}{162}$$

$\boxed{7}$ 座標平面において，曲線 $C : y = x^2$ 上の点 P(2, 4) における接線を l とし，l と直線 $y = -1$ との交点を Q とする．また点 Q を通り，曲線 C と接する直線のうち，l と異なるものを m とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 直線 l の方程式を求めよ．

(2) 直線 m の方程式を求めよ．

(3) 曲線 l，m および曲線 C で囲まれる部分の面積 S を求めよ．

$\boxed{8}$ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，関係式 $S_n = 2a_n + n$ が成り立っている．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $n \geqq 2$ のとき，a_n を a_{n-1} を用いて表せ．

(2) $n \geqq 1$ のとき，$b_n = a_{n+1} - a_n$ とおく．b_n を n を用いて表せ．

(3) a_n を n を用いて表せ．

$\boxed{9}$ 座標平面上に，原点 O を中心とし，4 点 A(1, 0)，B(0, 1)，C(−1, 0)，D(0, −1) を通る円がある．点 P を弧 AB 上にとり，$\angle \mathrm{POA} = 2\theta$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ)$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) PC の長さを θ を用いて表せ．

(2) $\mathrm{PA} + \mathrm{PC} - \mathrm{PD}$ のとりうる値の範囲を求めよ．

正解

$\boxed{1}$ (1) C の中心を Q$(a,\ b)$ とすると，$\mathrm{AQ}^2=\mathrm{PQ}^2$ であるから

$$(a-4)^2+(b+1)^2=(a-3)^2+(b+2)^2$$

整理すると　$a+b=2 \quad \cdots ①$

2 点 A$(4,-1)$，B$\left(6,-\dfrac{1}{2}\right)$ を通る直線 l の傾きは

$$\frac{-\frac{1}{2}+1}{6-4}=\frac{1}{4}$$

l に垂直な直線 AQ の傾きは -4 であるから

$$\frac{b+1}{a-4}=-4 \quad \text{ゆえに} \quad 4a+b=15 \quad \cdots ②$$

①，② を解いて　$a=\dfrac{13}{3}$，$b=-\dfrac{7}{3}$

このとき　$\mathrm{AQ}^2=\left(\dfrac{13}{3}-4\right)^2+\left(-\dfrac{7}{3}+1\right)^2=\dfrac{17}{9}$

よって，求める円の方程式は　$\boldsymbol{\left(x-\dfrac{13}{3}\right)^2+\left(y+\dfrac{7}{3}\right)^2=\dfrac{17}{9}}$

(2) 求める接線と C の接点を R$(x_1,\ y_1)$ とすると，線分 AR の中点が Q であるから

$$\frac{4+x_1}{2}=\frac{13}{3},\quad \frac{-1+y_1}{2}=-\frac{7}{3} \quad \text{すなわち} \quad x_1=\frac{14}{3},\ y_1=-\frac{11}{3}$$

これを解いて　$x_1=\dfrac{14}{3}$，$y_1=-\dfrac{11}{3}$

求める接線は，点 $\left(\dfrac{14}{3},-\dfrac{11}{3}\right)$ を通り，傾き $\dfrac{1}{4}$ の直線であるから

$$y+\frac{11}{3}=\frac{1}{4}\left(x-\frac{14}{3}\right) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{3x-12y-58=0}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $-\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ より　$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)<0$　$\cdots$①

$(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2=2$ であるから，これに $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ を代入すると

$$\frac{1}{4}+(\sin\theta-\cos\theta)^2=2 \quad \text{ゆえに} \quad (\sin\theta-\cos\theta)^2=\frac{7}{4}$$

① より　$\boldsymbol{\sin\theta-\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{7}}{2}}$

(2) ⑤

a が実数であるとき，一般に $\sqrt{a^2}=|\,a\,|$ である．ここでは $a=(-2)^3$ であるから，$|(-2)^3|=8$ となる．

(3) $a=16$ とおくと

$$p=\frac{2^{148}+1}{17}=\frac{(2^4)^{37}+1}{16+1}=\frac{a^{37}+1}{a+1}=\sum_{k=0}^{36}(-1)^k a^{36-k}$$

このとき　$p=a^{36}-(a^{35}-a^{34})-(a^{33}-a^{32})-\cdots-(a-1)$

$p=a^{36}-a^{35}+(a^{34}-a^{33})+(a^{32}-a^{31})+\cdots+(a^2-a)+1$

ゆえに　$(a-1)a^{35}<p<a^{36}$　すなわち　$10{\cdot}2^{140}<15{\cdot}2^{140}<p<2^{144}$

したがって，$10{\cdot}2^{140}<p<2^{144}$ の各辺の常用対数をとることにより

$$1+140\log_{10}2<\log_{10}p<144\log_{10}2$$
$$43.140=1+140\times0.301<\log_{10}p<144\times0.302=43.488$$

したがって　$43<\log_{10}p<44$　ゆえに　$10^{43}<p<10^{44}$

よって，p は **44** 桁の整数である．

解説 1 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$，$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

一般に　$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a^{2n-k}b^k$

解説 2 $2^4\equiv-1 \pmod{17}$ より　$(2^4)^{37}\equiv(-1)^{37} \pmod{17}$

よって　$2^{148}+1\equiv0 \pmod{17}$

$\boxed{3}$ (1) $y=e^{-x}$ より　$y'=-e^{-x}$

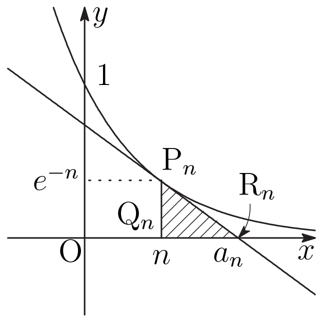
曲線 $y=e^{-x}$ の $\mathrm{P}_n(n,\ e^{-n})$ における接線は

$$y-e^{-n}=-e^{-n}(x-n)$$

ゆえに　$y=-e^{-n}(x-n-1)$

この直線と x 軸の交点の x 座標 a_n は

$$\boldsymbol{a_n=n+1}$$



(2) (1) の結果から　$\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n=a_n-n=1$，$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=e^{-n}$

よって　$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n=\dfrac{1}{2}\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n\cdot\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot e^{-n}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}e^{-n}}$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}S_n&=\int_1^{n+1}e^{-x}\,dx-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}e^{-k}\\&=\Big[-e^{-x}\Big]_1^{n+1}-\frac{1}{2}e^{-1}\times\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}\\&=-e^{-n-1}+\frac{1}{e}-\frac{1-e^{-n}}{2(e-1)}\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{e}-\frac{1}{2(e-1)}=\boldsymbol{\frac{e-2}{2e(e-1)}}$

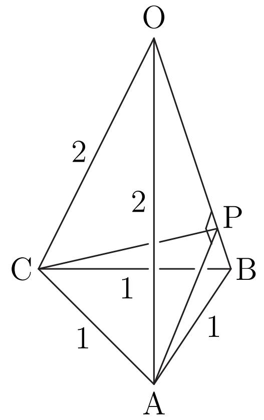
$\boxed{4}$ (1) $S=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x=\Big[-\log\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2}$

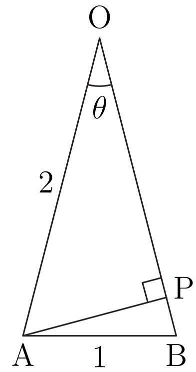
(2) $f'(x)=(\tan x-x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1=\boldsymbol{\tan^2 x}$

(3) (2) の結果から

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx=\Big[\ \tan x-x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\theta = \angle\mathrm{AOB}$ とおくと





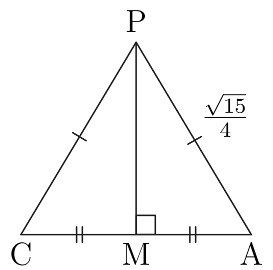
$$\cos\theta = \frac{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}} = \frac{2^2 + 2^2 - 1^2}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{7}{8}$$

ゆえに $\quad \mathrm{OP} = \mathrm{OA}\cos\theta = 2 \times \frac{7}{8} = \frac{7}{4}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と同じ向きの単位ベクトルは $\quad \dfrac{\vec{b}}{2}$

よって $\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \mathrm{OP}\cdot\dfrac{\vec{b}}{2} = \dfrac{7}{4}\cdot\dfrac{\vec{b}}{2} = \boldsymbol{\dfrac{7}{8}\vec{b}}$

(2) (1) の結果から



$$\mathrm{AP} = \mathrm{OA}\sin\theta = 2\sqrt{1 - \cos^2\theta} = 2\sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$\triangle\mathrm{ABP} \equiv \triangle\mathrm{CBP}$ であるから $\quad \mathrm{CP} = \mathrm{AP} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

CA の中点を M とすると $\quad \mathrm{PM} = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{11}}{4}$

よって $\quad \triangle\mathrm{APC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{PM} = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{4} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{11}}{8}}$

(3) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$, $\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{COA} = \theta$ であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 2\cdot 2\cos\theta = 2\cdot 2\cdot\frac{7}{8} = \frac{7}{2}$$

Q は線分 OM 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると

$$\vec{e} = \frac{\vec{c} + \vec{a}}{|\vec{c} + \vec{a}|} = \frac{\vec{c} + \vec{a}}{\sqrt{|\vec{c}|^2 + 2\vec{c}\cdot\vec{a} + |\vec{a}|^2}} = \frac{\vec{c} + \vec{a}}{\sqrt{4 + 7 + 4}} = \frac{\vec{c} + \vec{a}}{\sqrt{15}}$$

よって $\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{e})\vec{e} = \dfrac{1}{15}\left\{\dfrac{7}{8}\vec{b}\cdot(\vec{c} + \vec{a})\right\}(\vec{c} + \vec{a}) = \dfrac{7}{120}(\vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{c} + \vec{a})$

$$= \frac{7}{120}\left(\frac{7}{2} + \frac{7}{2}\right)(\vec{c} + \vec{a}) = \boldsymbol{\frac{49}{120}(\vec{c} + \vec{a})}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\tan^2 x > 0$ であるから

$$\int_0^x \tan^2 t\,dt > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \tan x - x > 0 \quad \cdots ①$$

① より

$$\int_0^x (\tan t - t)\,dx > 0 \quad \text{ゆえに} \quad -\log(\cos x) - \frac{1}{2}x^2 > 0$$

したがって　$\log(\cos x) + \dfrac{1}{2}x^2 < 0$

(2) (1) の結果から，$\log(\cos x) < -\dfrac{1}{2}x^2$ であるから

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \log(\cos x)\,dx &< \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{6}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{\pi^3}{162}\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \log(\cos x)\,dx &= \Big[\,x\log(\cos x)\,\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\{\log(\cos x)\}'\,dx \\ &= -\frac{\pi}{3}\log 2 + \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\tan x\,dx\end{aligned}$$

① より，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\tan x > x$ であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\tan x\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi^3}{81}$$

上の諸式から　$-\dfrac{\pi}{3}\log 2 + \dfrac{\pi^3}{81} < \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \log(\cos x)\,dx < -\dfrac{\pi^3}{162}$

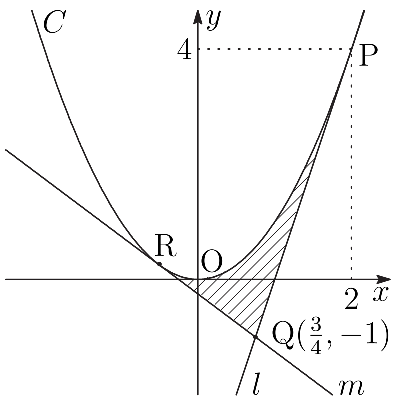
$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$

C の点 P(2, 4) における接線の傾きは 4 であるから，l の方程式は

$$y-4=4(x-2)\quad\text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=4x-4}$$

(2) l と直線 $y=-1$ の交点 Q は $\left(\dfrac{3}{4},-1\right)$

R の座標を $(a,\ a^2)$ とすると $(a\neq 2)$，傾きは $2a$ となるから，その方程式は



$$y-a^2=2a(x-a)$$

すなわち　$y=2ax-a^2$　$\cdots$①

これが点 Q を通るから

$$-1=2a\cdot\frac{3}{4}-a^2\quad\text{ゆえに}\quad 2a^2-3a-2=0$$

したがって　$(a-2)(2a+1)=0$　$a\neq 2$ に注意して　$a=-\dfrac{1}{2}$

これを ① に代入すると　$\boldsymbol{y=-x-\dfrac{1}{4}}$

(3) 求める面積 S は，上の図の斜線部分であるから

$$\begin{aligned}S&=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}\left\{x^2-\left(-x-\frac{1}{4}\right)\right\}dx+\int_{\frac{3}{4}}^{2}\{x^2-(4x-4)\}\,dx\\&=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2dx+\int_{\frac{3}{4}}^{2}(x-2)^2\,dx\\&=\left[\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^3\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}+\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_{\frac{3}{4}}^{2}=\boldsymbol{\frac{125}{96}}\end{aligned}$$

解説 一般に，放物線 C と 2 接線 l，m について，次が成り立つ (九大 2009 年一般前期文系数学 $\boxed{\mathbf{4}}$ の補足[1]を参照．).

1. 放物線 C 上の 2 点 P，R におけるそれぞれの接線 l，m の交点 Q の x 座標は，2 点 P，R の中点の x 座標である．
2. C と直線 PR で囲まれた部分の面積を S_0 とすると，C と 2 接線 l，m で囲まれた部分の面積 S は (S_0 は，x^2 の係数および接点の x 座標から)

$$S=\frac{1}{2}S_0,\qquad S_0=\frac{1}{6}\left\{2-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^3=\frac{125}{48}$$

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $n \geqq 2$ のとき

$$S_n = 2a_n + n$$
$$S_{n-1} = 2a_{n-1} + n - 1$$

上の 2 式の辺々を引くと　$S_n - S_{n-1} = 2a_n - 2a_{n-1} + 1$

$S_n - S_{n-1} = a_n$ であるから

$$a_n = 2a_n - 2a_{n-1} + 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_n = 2a_{n-1} - 1}$$

(2) (1) の結果から，$n \geqq 1$ のとき

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - 1$$
$$a_{n+1} = 2a_n - 1$$

上の 2 式の辺々を引くと

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) \quad \text{すなわち} \quad b_{n+1} = 2b_n$$

ここで，$S_1 = 2a_1 + 1$, $S_1 = a_1$, $a_2 = 2a_1 - 1$ であるから

$$a_1 = -1,\ a_2 = -3$$

$\{b_n\}$ は，初項が $b_1 = a_2 - a_1 = -2$，公比が 2 の等比数列であるから

$$b_n = -2 \cdot 2^{n-1} = \boldsymbol{-2^n}$$

(3) (1)，(2) の結果から

$$a_{n+1} = 2a_n - 1, \quad b_n = a_{n+1} - a_n$$

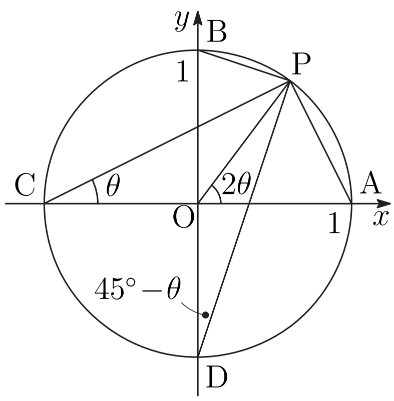
上の 2 式から a_{n+1} を消去すると

$$a_n = b_n + 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_n = -2^n + 1}$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $\angle\mathrm{POA} = 2\theta$ より，$\angle\mathrm{PCA} = \theta$，$\angle\mathrm{APC} = 90^\circ$ であるから

$$\mathrm{PC} = \mathrm{CA}\cos\theta = \mathbf{2\cos\boldsymbol{\theta}}$$

(2) (1) と同様に



$$\mathrm{PA} = \mathrm{CA}\sin\theta = 2\sin\theta$$

$\angle\mathrm{POB} = 90^\circ - 2\theta$ であるから

$$\angle\mathrm{PDB} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{POB} = 45^\circ - \theta$$

$\angle\mathrm{DPB} = 90^\circ$ であるから

$$\mathrm{PD} = \mathrm{DB}\cos(45^\circ - \theta) = 2\cos(45^\circ - \theta)$$

したがって

$$\begin{aligned} \mathrm{PA} + \mathrm{PC} &= 2\sin\theta + 2\cos\theta = 2\sqrt{2}\cos(45^\circ - \theta)\,, \\ \mathrm{PA} + \mathrm{PC} - \mathrm{PD} &= 2\sqrt{2}\cos(45^\circ - \theta) - 2\cos(45^\circ - \theta) \\ &= 2(\sqrt{2} - 1)\cos(45^\circ - \theta) \end{aligned}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ$ であるから　$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \cos(45^\circ - \theta) \leqq 1$

よって　　$\mathbf{2 - \sqrt{2} \leqq PA + PC - PD \leqq 2(\sqrt{2} - 1)}$