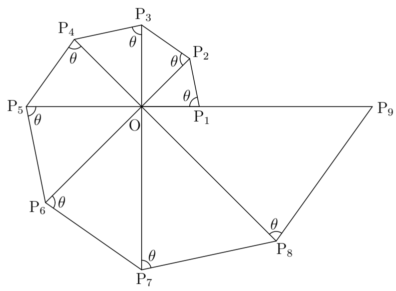
平成 17 年度　宮崎大学２次試験前期日程 (数学問題)
医・工・教育文化・農学部　平成 17 年 2 月 25 日

- 医・工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 必答，$\boxed{7}$ 〜 $\boxed{9}$ から 1 題選択．数 II・III・B(120 分)
- 教育文化 (中学 [理系]，生活文化 [生活環境コース]) 学部は，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 必答，$\boxed{7}$ 〜 $\boxed{9}$ から 1 題選択．数 II・B (90 分)
- 教育文化 (初等教育コース，中学 [文系]，障害児コース) 学部・農 (食料生産科学・生物環境科学・地域農業システム・獣医) 学部は，$\boxed{10}$, $\boxed{11}$ 必答，$\boxed{12}$ 〜 $\boxed{14}$ から 1 題選択．数 II・A (90 分)

$\boxed{1}$ 右の図のように 8 つの三角形 $\mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots 8)$ がある．ただし，$\mathrm{OP}_1 = 1$ であり各 n について $\angle\mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1} = \theta$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\angle\mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1} = \dfrac{\pi}{4}$ とする．このとき，次の各問に答えよ．



(1) 辺 OP_2 の長さを θ を用いて表せ．

(2) 辺 OP_9 の長さを θ を用いて表せ．

(3) 辺 OP_9 の長さが $\dfrac{81}{16}$ であるとき，$\tan\theta$ の値を求めよ．

$\boxed{2}$ 2 つの円 $C_1 : x^2 + y^2 = 4$，$C_2 : (x-4)^2 + y^2 = 1$ の両方に接する直線は全部で 4 本ある．この 4 本の直線の方程式を求めよ．

$\boxed{3}$ n を自然数とする．曲線 $y = 2+\sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \left(n + \dfrac{1}{3}\right)\pi\right)$，直線 $x = \left(n + \dfrac{1}{3}\right)\pi$，$x$ 軸および y 軸で囲まれる部分を D_n とおくとき，次の各問いに答えよ．

(1) D_n の面積 S_n を求めよ．

(2) D_n を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V_n を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{S_n}$ を求めよ．

$\boxed{4}$ すべての実数 x について $f(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{|t-x|}\,dt$ とおくとき，次の各問に答えよ．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最小値を求めよ．

$\boxed{5}$ 次の問に答えよ．

(1) $\alpha < \beta$ のとき，次の等式 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (\beta - x)(x - \alpha)\,dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ が成り立つことを示せ．

(2) $-2 \leqq a \leqq 2$ のとき，曲線 $y = (3x - a^3)(x - a + 1)$ と x 軸で囲まれる部分の面積 $S(a)$ の最小値を求めよ．

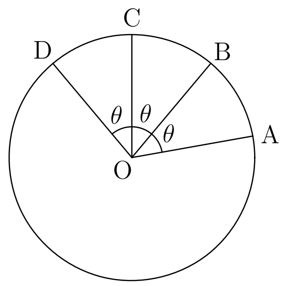
$\boxed{6}$ 直線 $l : y = x + 1$ と曲線 $C : y = 2x^2 - 4x + 1$ との交点を P，Q とするとき，次の各問に答えよ．ただし，P の x 座標は Q の x 座標より小さいものとする．

(1) 直線 l に平行で曲線 C に接する直線を m とするとき，点 P と直線 m との距離を求めよ．

(2) 曲線 C と (1) における直線 m との接点を R とする．このとき，△PQR の面積を求めよ．

(3) 点 $(x,\ y)$ が直線 l と曲線 C で囲まれる領域にあるとき，$x + y$ の最小値を求めよ．ただし，領域は境界を含むものとする．

$\boxed{7}$ 右図のように，中心 O，半径 1 の円周上に相異なる 4 つの点 A，B，C，D を $\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{COD} = \theta \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ となるようにとる．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ をそれぞれ $\vec{b}$，$\vec{c}$ とするとき，次の各問に答えよ．



(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，θ を用いて表せ．

(2) 線分 AC と線分 BD の交点を P とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，θ を用いて表せ．

$\boxed{8}$ 複素数平面上に原点を中心とし半径 1 の円周 C 上の点 $\mathrm{P}(z)$ (z の偏角を θ とする) をとる．点 P を点 $\mathrm{A}(1 + i)$ を中心として，角 α だけ回転させた点を $\mathrm{Q}(w)$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 点 P が C 上を動くとき，点 Q はある点 $\mathrm{B}(a + bi)$ を中心とする円周上を動くことを示し，その半径を求めよ．ただし，a，b は実数とする．

(2) (1) において，$b = 1$ のとき，a の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ 出る目の確率が次のようなさいころがひとつある．

・1，3の目が出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{12}$

・5の目が出る確率は $\dfrac{1}{3}$

・2，4，6の目が出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{6}$

そこで，さいころを1回ふり，出た目を A とし，A を3で割った余りを X とする．次にもう1回さいころをふり，出た目を B とし，$A+B$ を3で割った余りを Y とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 事象 $X=Y=0$ が起こる確率を求めよ．

(2) 事象 $X+Y=3$ が起こる確率を求めよ．

(3) 事象 $X+Y=3$ が起こったという条件のもとでの，$X=1$，$Y=2$ である条件つき確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{10}}$ $0^\circ \leqq \alpha$，$\beta < 360^\circ$ とする．このとき，次の2つの等式

$$\sin\alpha = \cos\beta, \quad \cos\alpha = \sin\beta$$

が同時に成り立つための必要十分条件を α と β の関係式で表せ．

$\boxed{\mathbf{11}}$ 直線 $l : y = x+1$ と曲線 $C : y = 2x^2-4x+1$ との交点をP，Qとするとき，次の各問に答えよ．ただし，Pの x 座標はQの x 座標より小さいものとする．

(1) 直線 l と曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ．

(2) 直線 l に平行で曲線 C に接する直線を m とするとき，点Pと直線 m との距離を求めよ．

(3) 曲線 C と (2) における直線 m との接点をRとする．このとき，$\triangle$PQRの面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{12}}$ $\sqrt{2}$ は $x^2=2$ を満たす正の実数 x を表したものである．このことを用いて，次の各問に答えよ．

(1) $\sqrt{2}$ は $1.4\cdots$ と無限に続く小数で表される．そこで，$\sqrt{2}$ の小数第2位の値が1であることを確かめよ．

(2) n を自然数とするとき，n^2 が偶数ならば，n は偶数であることを示せ．

(3) (2) を利用して，$\sqrt{2}$ は有理数でないことを示せ．ただし，有理数は最大公約数が1である2つの整数 a，b $(b \neq 0)$ を用いて $\dfrac{a}{b}$ と表すことができる実数である．

$\boxed{\mathbf{13}}$ 関係式

$$a_1 = \beta, \quad a_{n+1} = 2a_n(1 - a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の各問に答えよ．ただし，$\beta < \dfrac{1}{2}$ とする．

(1) $n \geqq 1$ に対して，不等式 $a_n < \dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ．

(2) $n \geqq 1$ に対して，$b_n = \log_2 \left(\dfrac{1}{2} - a_n \right)$ とおく．このとき，関係式

$$b_{n+1} = 2b_n + 1$$

が成り立つことを示せ．

(3) a_n を n と β を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{14}}$ $\triangle$ABC に対し，点 P は辺 AB の中点，点 Q は辺 BC 上の B，C と異なる点，点 R は直線 AQ と直線 CP との交点とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $a = \dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RP}}$，$b = \dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QB}}$ とおくとき，a と b の関係式を求めよ．

(2) $\triangle$ABC の外接円 O と直線 CP との点 C 以外の交点を X とする．AP $=$ CR，CQ $=$ QB であるとき，CR : RP : PX を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\triangle \mathrm{OP_1P_2}$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{OP_1}}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\theta\right)}=\frac{\mathrm{OP_2}}{\sin\theta} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{OP_2}=\frac{\sin\theta}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}}$$

(2) $\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ に正弦定理を適用すると $(n=1,2,\cdots,8)$

$$\frac{\mathrm{OP}_n}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\theta\right)}=\frac{\mathrm{OP}_{n+1}}{\sin\theta} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{OP}_{n+1}=\frac{\mathrm{OP}_n\sin\theta}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}\mathrm{OP}_n\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}}$$

数列 $\{\mathrm{OP}_n\}$ は初項 1，公比 $\dfrac{\sqrt{2}\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$ の等比数列であるから

$$\boldsymbol{\mathrm{OP_9}=16\left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right)^8}$$

(3) $\mathrm{OP_9}=\dfrac{81}{16}$ のとき，(2) の結果から

$$16\left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right)^8=\frac{81}{16} \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right)^8=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^8$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}>0$ であるから

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad (2-\sqrt{3})\sin\theta=\sqrt{3}\cos\theta$$

よって　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\boldsymbol{2\sqrt{3}+3}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 求める接線は，y 軸に平行ではないので，$l : y = ax + b$ とおく．

l と原点の距離は 2 であるから

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+1}} = 2 \quad ゆえに \quad b^2 = 4(a^2+1) \quad \cdots ①$$

l と $(4,\ 0)$ の距離は 1 であるから

$$\frac{|4a+b|}{\sqrt{a^2+1}} = 1 \quad ゆえに \quad (4a+b)^2 = a^2+1 \quad \cdots ②$$

①，② から

$$b^2 = 4(4a+b)^2 \quad ゆえに \quad b^2 = (8a+2b)^2$$

(i) $b = 8a + 2b$　すなわち　$b = -8a$ のとき

これを ① に代入すると

$$(-8a)^2 = 4(a^2+1) \quad ゆえに \quad 15a^2 = 1$$

すなわち　$y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{15}}(x-8)$

(ii) $b = -(8a+2b)$　すなわち　$b = -\dfrac{8}{3}a$ のとき

これを ① に代入すると

$$\left(-\frac{8}{3}a\right)^2 = 4(a^2+1) \quad ゆえに \quad 7a^2 = 9$$

すなわち　$y = \pm\dfrac{3}{\sqrt{7}}\left(x - \dfrac{8}{3}\right)$

よって　$\boldsymbol{y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{15}}(x-8),\ y = \pm\dfrac{3}{\sqrt{7}}\left(x - \dfrac{8}{3}\right)}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $2+\sin x>0$ であるから

$$S_n=\int_0^{\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi}(2+\sin x)\,dx=\Big[\,2x-\cos x\,\Big]_0^{\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi}$$
$$=2\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi-\cos\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi+1=\boldsymbol{2\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi-\frac{(-1)^n}{2}+1}$$

(2) 求める回転体の体積 V_n は

$$\frac{V_n}{\pi}=\int_0^{\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi}(2+\sin x)^2\,dx=\int_0^{\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi}(4+4\sin x+\sin^2 x)\,dx$$
$$=\int_0^{\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi}\left(4+4\sin x+\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$$
$$=\Big[\,\frac{9}{2}x-4\cos x-\frac{1}{4}\sin 2x\,\Big]_0^{\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi}$$
$$=\frac{9}{2}\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi-4\cos\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi+4-\frac{1}{4}\sin 2\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi$$
$$=\frac{9}{2}\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi-2(-1)^n+4-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

よって　$\boldsymbol{V_n=\pi\left\{\frac{9}{2}\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi-2(-1)^n+4-\frac{\sqrt{3}}{8}\right\}}$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi\left\{\frac{9}{2}\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi-2(-1)^n+4-\frac{\sqrt{3}}{8}\right\}}{2\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi-\frac{(-1)^n}{2}+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi\left\{\frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{3n}\right)\pi-\frac{2(-1)^n}{n}+\frac{4}{n}-\frac{\sqrt{3}}{8n}\right\}}{2\left(1+\frac{1}{3n}\right)\pi-\frac{(-1)^n}{2n}+\frac{1}{n}}=\boldsymbol{\frac{9}{4}\pi}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1)

$$f(x)=\int_0^1 e^{|t-x|}dt$$

(i) $x \leqq 0$ のとき

$$f(x)=\int_0^1 e^{t-x}\,dt=\Big[\ e^{t-x}\ \Big]_0^1=e^{1-x}-e^{-x}$$

(ii) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^x e^{-t+x}\,dt+\int_x^1 e^{t-x}\,dx=\Big[-e^{-t+x}\ \Big]_0^x+\Big[\ e^{t-x}\ \Big]_x^1\\&=e^x+e^{1-x}-2\end{aligned}$$

(iii) $1 \leqq x$ のとき

$$f(x)=\int_0^1 e^{-t+x}\,dt=\Big[\ -e^{-t+x}\ \Big]_0^1=e^x-e^{x-1}$$

よって $\quad \boldsymbol{f(x)=\begin{cases} e^{1-x}-e^{-x} & (x \leqq 0) \\ e^x+e^{1-x}-2 & (0 \leqq x \leqq 1) \\ e^x-e^{x-1} & (1 \leqq x)\end{cases}}$

(2) $0<x<1$ のとき　$f'(x)=e^x-e^{1-x}=e^{1-x}(e^{2x-1}-1)$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって　$x=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\boldsymbol{2(e^{\frac{1}{2}}-1)}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (\beta - x)(x-\alpha)\,dx = \int_\alpha^\beta \{(\beta-\alpha)-(x-\alpha)\}(x-\alpha)\,dx$

$$= \int_\alpha^\beta \{(\beta-\alpha)(x-\alpha)-(x-\alpha)^2\}\,dx$$

$$= \left[\ \frac{1}{2}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2 - \frac{1}{3}(x-\alpha)^3\ \right]_\alpha^\beta$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

(2) $f(a) = \dfrac{1}{3}a^3 - (a-1)$ とおくと　$f'(a) = (a+1)(a-1)$

$-2 \leqq a \leqq 2$ における $f(a)$ の増減表は次のようになる．

a	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(a)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(a)$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$\frac{5}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$\frac{5}{3}$

(1) の結果を利用すると

$$S(a) = -\int_{a-1}^{\frac{1}{3}a^3} (3x-a^3)(x-a+1)\,dx$$

$$= 3\int_{a-1}^{\frac{1}{3}a^3} \left(\frac{1}{3}a^3 - x\right)\{x-(a-1)\}dx$$

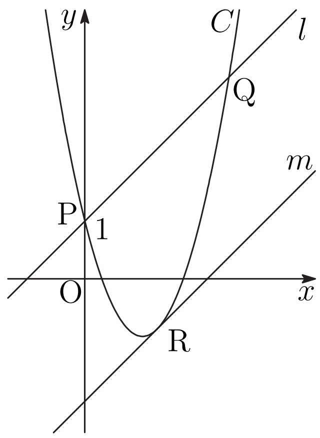
$$= \frac{1}{2}\{f(a)\}^3$$

よって，$a=-2,\ 1$ のとき $S(a)$ の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{54}}$

$\boxed{\textbf{6}}$ (1) $C: y = 2x^2 - 4x + 1$ と $l: y = x + 1$ から，y を消去すると

$$2x^2 - 4x + 1 = x + 1 \quad \text{ゆえに} \quad x(2x-5) = 0$$

したがって　　$\mathrm{P}(0,\ 1)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$



$f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ とおく．

これを微分すると　　$f'(x) = 4x - 4$

$f'(x) = 1$ とすると　　$4x - 4 = 1$

ゆえに　　$x = \dfrac{5}{4}$，$f\left(\dfrac{5}{4}\right) = -\dfrac{7}{8}$

m は，$\mathrm{R}\left(\dfrac{5}{4}, -\dfrac{7}{8}\right)$ を通り，傾き 1 の直線であるから

$$y - \left(-\frac{7}{8}\right) = x - \frac{5}{4} \quad \text{すなわち} \quad y = x - \frac{17}{8}$$

P と m の距離を d とすると　　$d = \dfrac{\left|-1 - \dfrac{17}{8}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{\mathbf{25\sqrt{2}}}{\mathbf{16}}$

(2) $\mathrm{PQ} = \sqrt{\left(\dfrac{7}{2} - 1\right)^2 + \left(\dfrac{5}{2} - 0\right)^2} = \dfrac{5}{2}\sqrt{2}$

よって　　$\triangle\mathrm{PQR} = \dfrac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot d = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{5}{2}\sqrt{2} \times \dfrac{25\sqrt{2}}{16} = \dfrac{\mathbf{125}}{\mathbf{32}}$

(3) $x + y = k$ とおくと　$y = -x + k$

この直線が C に接するとき，k は最小になるから，$f'(x) = -1$ より

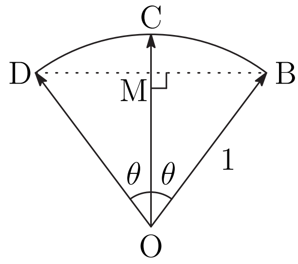
$$4x - 4 = -1 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{3}{4}, \quad f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{7}{8}$$

よって，$\left(\dfrac{3}{4}, -\dfrac{7}{8}\right)$ で，最小値

$$k = \frac{3}{4} + \left(-\frac{7}{8}\right) = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$$

をとる．

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) B，D の中点を M とすると，M は OC 上にあり，



$$\mathrm{OM} = \cos\theta$$

したがって　$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}}{2} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$

ゆえに　$\dfrac{\vec{b} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}}{2} = (\cos\theta)\vec{c}$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 2(\cos\theta)\vec{c} - \vec{b}}$

(2) (1) と同様に，A，C の中点を N とすると

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2} = \overrightarrow{\mathrm{ON}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{ON}} = (\cos\theta)\vec{b}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 2(\cos\theta)\vec{b} - \vec{c}$

AC と BD の交点 P は，実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\{2(\cos\theta)\vec{b} - \vec{c}\} + (1-s)\vec{c} = (1-t)\vec{b} + t\{2(\cos\theta)\vec{c} - \vec{b}\}$

整理すると　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 2s(\cos\theta)\vec{b} + (1-2s)\vec{c} = (1-2t)\vec{b} + 2t(\cos\theta)\vec{c}$

$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから

$$2s\cos\theta = 1 - 2t, \quad 1 - 2s = 2t\cos\theta$$

上の 2 式から　$2s = 2t = \dfrac{1}{1+\cos\theta}$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)\vec{b} + \left(\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)\vec{c}}$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $w-(1+i)=\{z-(1+i)\}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ であるから

$$w-(1+i)(1-\cos\alpha-i\sin\alpha)=z(\cos\alpha+i\sin\alpha)\qquad\cdots(*)$$

ここで，$a+bi=(1+i)(1-\cos\alpha-i\sin\alpha)$ とおくと

$$a+bi=1-\cos\alpha+\sin\alpha+(1-\cos\alpha-\sin\alpha)i$$

ゆえに　　$a=1-\cos\alpha+\sin\alpha$，$b=1-\cos\alpha-\sin\alpha$

したがって，$(*)$ および $|z|=1$ から

$$|w-(a+bi)|=|z||\cos\alpha+i\sin\alpha|=1$$

よって，点 $\mathrm{Q}(w)$ は $a+bi$ を中心とし，**半径 1** の円周上を動く.

(2) $b=1$ より　$1=1-\cos\alpha-\sin\alpha$　すなわち　$\cos\alpha=-\sin\alpha$

ゆえに　$\sin\alpha=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，　$\cos\alpha=\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，　$a=1\pm\sqrt{2}$　(複号同順)

よって　　$\boldsymbol{a=1\pm\sqrt{2}}$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $X=0$ となるのは，A が 3 または 6 のときで，このとき，$Y=0$ となるのは，B も 3 または 6 のときである．よって，求める確率は

$$\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{6}\right)^2=\boldsymbol{\frac{1}{16}}$$

(2) $X+Y=3$ となるのは，次の場合である．

(i) $X=1,\ Y=2$ のとき，
A が 1 または 4，B も 1 または 4 で，その確率は

$$P(X=1,\ Y=2)=\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{16}$$

(ii) $X=2,\ Y=1$ のとき，
A が 2 または 5，B も 2 または 5 で，その確率は

$$P(X=2,\ Y=1)=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{4}$$

(i)，(ii) は，互いに排反であるから，求める確率は

$$P(X+Y=3)=\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{5}{16}}$$

(3) (2) の結果から，求める確率は

$$\frac{P(X=1,\ Y=2)}{P(X+Y=3)}=\frac{1}{16}\div\frac{5}{16}=\boldsymbol{\frac{1}{5}}$$

$\boxed{\mathbf{10}}$

$$\begin{aligned}(\sin\alpha-\cos\beta)^2+(\cos\alpha-\sin\beta)^2&=2-2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\\&=2\{1-\sin(\alpha+\beta)\}\qquad\cdots(*)\end{aligned}$$

$\sin\alpha=\cos\beta,\ \cos\alpha=\sin\beta$ のとき，$(*)$ より，$0^\circ\leqq\alpha,\ \beta<360^\circ$ より

$$\sin(\alpha+\beta)=1\quad\text{すなわち}\quad\boldsymbol{\alpha+\beta=90^\circ,\ 450^\circ}$$

逆に，$\alpha+\beta=90^\circ,\ 450^\circ$ のとき，$(*)$ より

$$\sin\alpha=\cos\beta,\ \cos\alpha=\sin\beta$$

$\boxed{\mathbf{11}}$ (1) $C: y=2x^2-4x+1$ と $l: y=x+1$ から，y を消去すると

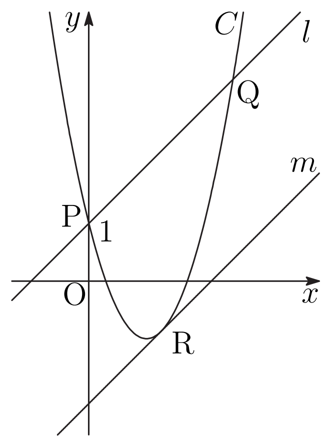
$$2x^2-4x+1=x+1 \quad \text{ゆえに} \quad x(2x-5)=0$$

したがって　　$\mathrm{P}(0,\ 1)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$

求める面積を S とすると

$$S=\int_0^{\frac{5}{2}}\{(x+1)-(2x^2-4x+1)\}\,dx$$
$$=-2\int_0^{\frac{5}{2}}x\left(x-\frac{5}{2}\right)dx=\frac{2}{6}\left(\frac{5}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{125}{24}}$$

(2) $f(x)=2x^2-4x+1$ とおく．



これを微分すると　　$f'(x)=4x-4$

$f'(x)=1$ とすると　　$4x-4=1$

ゆえに　　$x=\dfrac{5}{4}$，$f\left(\dfrac{5}{4}\right)=-\dfrac{7}{8}$

m は，$\mathrm{R}\left(\dfrac{5}{4}, -\dfrac{7}{8}\right)$ を通り，傾き 1 の直線であるから

$$y-\left(-\frac{7}{8}\right)=x-\frac{5}{4}$$

すなわち　　$y=x-\dfrac{17}{8}$

P と m の距離を d とすると　　$d=\dfrac{\left|-1-\dfrac{17}{8}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\boldsymbol{\dfrac{25\sqrt{2}}{16}}$

(3) $\mathrm{PQ}=\sqrt{\left(\dfrac{7}{2}-1\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}-0\right)^2}=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$

よって　　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot d=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2}\sqrt{2}\times\dfrac{25\sqrt{2}}{16}=\boldsymbol{\dfrac{125}{32}}$

$\boxed{\mathbf{12}}$ (1) $1.41^2 = 1.9881$，$1.42^2 = 2.0164$ であるから

$$1.41^2 < 2 < 1.42^2 \quad \text{ゆえに} \quad 1.41 < \sqrt{2} < 1.42$$

よって，$\sqrt{2}$ の小数第 2 位の値は 1 である．

(2) 「n^2 が偶数ならば，n は偶数である.」

この命題の対偶は

「n が奇数ならば，n^2 は奇数である.」　$\cdots(*)$

奇数 n は，ある整数 m を用いて $n = 2m+1$ と表され

$$\begin{aligned} n^2 &= (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 \\ &= 2(2m^2 + 2m) + 1 \end{aligned}$$

となる．$2m^2 + 2m$ は整数であるから，n^2 は奇数である．

よって，命題 $(*)$ は真であり，元の命題も真である．

(3) 「$\sqrt{2}$ は有理数」であると仮定すると，

$\sqrt{2}$ は整数 a，b を用いて (a，b は互いに素)

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

と表すことができる．ゆえに　$\sqrt{2}b = a$　これを平方すると

$$2b^2 = a^2 \quad \cdots ①$$

よって，a^2 は偶数である．(2) の結果から，a は偶数である．

偶数 a は，整数 c を用いて，$a = 2c$ と表されるから，① に代入して

$$2b^2 = (2c)^2 \quad \text{ゆえに} \quad b^2 = 2c^2$$

よって，b^2 は偶数となり，b も偶数である．

a と b が偶数となることは，a と b が互いに素であることに反する．

よって，$\sqrt{2}$ は有理数ではない．

$\boxed{\mathbf{13}}$ (1) $$a_n < \frac{1}{2} \quad \cdots (*)$$

(i) $n=1$ のとき，$a_1 = \beta < \dfrac{1}{2}$ であるから，$(*)$ が成り立つ.

(ii) $n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると，漸化式により

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_k(1-a_k) \\ &= -2\left(a_k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも，$(*)$ が成り立つ.

(i)，(ii) から，$(*)$ が成り立つ.

(2) 与えられた漸化式から $\quad \dfrac{1}{2} - a_{n+1} = 2\left(\dfrac{1}{2} - a_n\right)^2$

(1) の結果から，$\dfrac{1}{2} - a_n > 0$ であるから

$$\log_2\left(\frac{1}{2} - a_{n+1}\right) = 2\log_2\left(\frac{1}{2} - a_n\right) + 1$$

$b_n = \log_2\left(\dfrac{1}{2} - a_n\right)$ であるから $\quad b_{n+1} = 2b_n + 1$

(3) (2) の結果から $\quad b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$

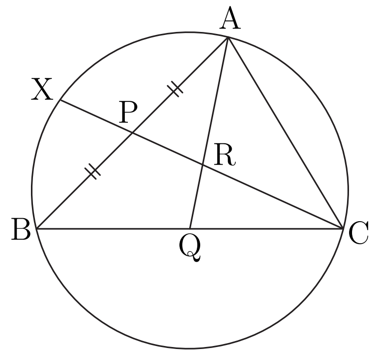
ゆえに $$\begin{aligned} b_n + 1 &= 2^{n-1}(b_1 + 1) = 2^{n-1}\left\{\log_2\left(\frac{1}{2} - \beta\right) + 1\right\} \\ &= \log_2(1-2\beta)^{2^{n-1}} \quad \cdots ① \end{aligned}$$

また $\quad b_n + 1 = \log_2\left(\dfrac{1}{2} - a_n\right) + 1 = \log_2(1-2a_n) \quad \cdots ②$

①，② から $\quad 1 - 2a_n = (1-2\beta)^{2^{n-1}}$

よって $\quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{2}\left\{1 - (1-2\beta)^{2^{n-1}}\right\}}$

$\boxed{\textbf{14}}$ (1) $\triangle$BCP と直線 AQ について，メネラウスの定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RP}}\cdot\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{AB}}=1$$

ゆえに　$\dfrac{1}{b}\cdot a\cdot\dfrac{1}{2}=1$

よって　$\boldsymbol{a=2b}$

(2) $\mathrm{CQ}=\mathrm{QB}$ より，R は $\triangle$ABC の重心であるから

$$\mathrm{CR}=2k,\quad \mathrm{RP}=k\quad (k\text{ は定数})$$

とおくと，$\mathrm{AP}=\mathrm{CR}$ より　$\mathrm{AP}=\mathrm{PB}=2k$

方べきの定理により

$$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{CP}\cdot\mathrm{PX}\quad\text{ゆえに}\quad 2k\cdot 2k=3k\cdot\mathrm{PX}$$

したがって　$\mathrm{PX}=\dfrac{4}{3}k$

よって　$\mathrm{CR}:\mathrm{RP}:\mathrm{PX}=2k:k:\dfrac{4}{3}k=\mathbf{6:3:4}$