

平成 16 年度 宮崎大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

工・教育文化・農学部 平成 16 年 2 月 25 日

- 工学部 ① ② ③ ④ 必答, ⑥ ⑦ ⑧ から 1 題選択. 数 II・III・B(120 分)
- 教育文化(中学[理系], 生活文化[生活環境コース])学部 ① ⑤ 必答,
⑥ ⑦ ⑧ から 1 題選択. 数 II・B(90 分)
- 教育文化(初等教育コース, 中学[文系], 障害児コース)学部・農(食料生産科学・生物環境科学・地域農業システム・獣医)学部 ⑨ ⑩ 必答,
⑪ ⑫ ⑬ から 1 題選択. 数 II・A(90 分)

① 関数 $f(x) = 4^x - 2^{x+2} + 3$ について, 次の各問に答えよ.

- $f(x) > 0$ を満たす x の値の範囲を求めよ.
- $f(1.59)$ の値の正負を判定せよ. ただし, $0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$,
 $0.477 < \log_{10} 3 < 0.478$ である.

② 定積分と極限に関する次の各問に答えよ.

- 次の定積分の値を求めよ.

$$(a) \int_0^1 x e^x dx \quad (b) \int_0^\pi x \sin x dx \quad (c) \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \quad (d) \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

- 次の極限值を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1})$$

③ 座標平面上の 3 つの円 C_1, C_2, C_3 は, それぞれ中心が $(0, 0), (0, 3), (4, 0)$, 半径が r_1, r_2, r_3 であり, どの 2 つの円も互いに外側で接しているとする. このとき, 次の各問に答えよ.

- r_1, r_2, r_3 の値を求めよ.
- 円 C が C_1, C_2, C_3 のそれぞれと互いに外接しているとき, 円 C の半径 r と中心の座標 (a, b) を求めよ.

4 2つの曲線 $C_1: y = \sin 2x$ ($0 \leq x < \frac{\pi}{2}$), $C_2: y = \tan x$ ($0 \leq x < \frac{\pi}{2}$) について、次の各問に答えよ.

- (1) $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ における $\sin 2x = \tan x$ の解をすべて求めよ.
- (2) C_1 と C_2 の概形を同一座標平面上にかけ.
- (3) C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を求めよ.

5 中心 $A(0, a)$, 半径1の円上の点 $P(\cos \theta, a + \sin \theta)$ について、 θ が $180^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ の範囲を動くときの点 P の軌跡を C とする. C が不等式 $y \geq x^2$ の表す領域にあるとき、次の各問に答えよ.

- (1) $a \geq \frac{5}{4}$ であることを示せ.
- (2) $a = \frac{5}{4}$ のとき、 C と放物線 $y = x^2$ で囲まれる部分の面積を求めよ.

6 四面体 $OABC$ において、 $OA = 2$, $OB = 1$, $OC \perp OA$, $OC \perp OB$ であるとする. 点 D を、直線 AB 上に、 $OD \perp AB$ となるようにとる. $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, $\vec{OD} = \vec{d}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = t$ とおくとき、次の各問に答えよ. ただし、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ はベクトル \vec{a} , \vec{b} の内積を表す.

- (1) \vec{d} を \vec{a} , \vec{b} , t を用いて表せ.
- (2) \vec{a} と \vec{b} のなす角が 120° , $\vec{d} - \vec{c}$ と \vec{d} のなす角が 60° であるとき、 $|\vec{c}|^2$ の値を求めよ.

7 係数 a, b が実数である2次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ は異なる2つの虚数解 α, β を持ち、 $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)\beta$ が成立しているとする. このとき、次の各問に答えよ.

- (1) $b > 0$ を示し、 α^2 の偏角を求めよ.
- (2) n を α^{2n} が実数となる最小の自然数とする. $b = 2$ のとき、 α^{2n} の値を求めよ.

8 5個のさいころがある. このうち、 k 個は1の目の出る確率が $\frac{1}{3}$ で、残りの $(5-k)$ 個は1の目の出る確率が $\frac{1}{2}$ である. この5個のさいころを同時に投げたとき、1の目の出たさいころの数を X とする. このとき、次の各問に答えよ.

- (1) $k = 0$ のとき、 $X = 2$ となる確率を求めよ.
- (2) $k = 2$ のとき、 $X = 2$ となる確率を求めよ.
- (3) $k = 5$ のとき、 X の期待値を求めよ.

9 関数 $f(x) = 4^x - 2^{x+2} + 3$ について、次の各問に答えよ。

- (1) $f(x) > 0$ をみたす x の値の範囲を求めよ。
- (2) $f(1.6)$ の値の正負を判定せよ。ただし、 $0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$,
 $0.47 < \log_{10} 3 < 0.48$ である。

10 a を $0 < a < 1$ の範囲の定数とする。直線 $l: y = 1 - a^2$ と
曲線 $C: y = 1 - x^2$ ($x \geq 0$) について、次の各問に答えよ。

- (1) 曲線 C , y 軸, 直線 l で囲まれる部分の面積を S_1 とし, 曲線 C , 直線 l , 直線 $x = 1$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする。 S_1, S_2 を a を用いて表せ。
- (2) $S = S_1 + S_2$ とおくととき, $0 < a < 1$ の範囲における S の最小値を求めよ。

11 次の各問に答えよ。

- (1) 正の実数 a, b, c, d が $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ を満たすとき, 次の (A), (B) に答えよ。
 - (A) 不等式 $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ が成り立つことを示せ。
 - (B) $a < c$ のとき, 不等式 $\frac{a}{b} < \frac{2ac}{ad+bc} < \frac{a+c}{b+d}$ が成り立つことを示せ。
- (2) n を 2 以上の自然数とするととき, $n^4 + 4$ は素数にならないことを示せ。

12 数列 $\{a_n\}$ は, 初項 $a_1 = 2$, 公差 21 の等差数列で, 数列 $\{b_n\}$ は初項 b_1 から第 n 項 b_n までの和が $2^{n+1} - 2$ である数列とする。このとき, 次の各問に答えよ。

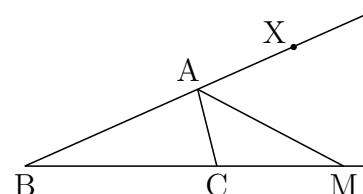
- (1) b_n を n を用いて表せ。
- (2) $c_n = b_n - a_n$ とおく。 $n \geq 5$ のとき, $c_{n+1} > c_n$ となることを示せ。
- (3) $a_n = b_n$ となる n の値をすべて求めよ。

13 $AB > AC$ である $\triangle ABC$ について、次の各問に答えよ。なお、下の2つの図において、点Xは辺BAの延長上の点とする。

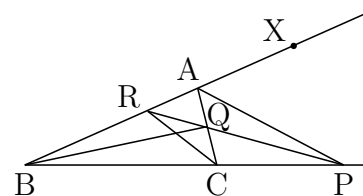
(1) 右図のように、点Mを辺BCの延長上に $AB : AC = BM : MC$ を満たすようにとる。このとき、次の(A), (B)に答えよ。

(A) 点Nを辺AB上に $AC = AN$ を満たすようにとるとき、 $MA \parallel CN$ であることを示せ。

(B) AMが $\angle A$ の外角を二等分することを示せ。



(2) 右図において、点Qは $\angle B$ の二等分線と辺ACの交点、点Rは $\angle C$ の二等分線と辺ABとの交点とする。また、直線RQと辺BCの延長との交点をPとする。このとき、APが $\angle A$ の外角を二等分することを示せ。



解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad f(x) = 4^x - 2^{x+2} + 3 = (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 3 = (2^x - 1)(2^x - 3)$$

$$f(x) > 0 \text{ より } 2^x < 1, 3 < 2^x \text{ よって } x < 0, \log_2 3 < x$$

$$(2) \quad 0.301 < \log_{10} 2 < 0.302, \quad 0.477 < \log_{10} 3 < 0.478 \text{ より}$$

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} < \frac{0.478}{0.301} = 1.58 \cdots < 1.59$$

$$(1) \text{ の結果から } \quad f(1.59) > 0 \quad \blacksquare$$

$$\boxed{2} \quad (1) \quad (a) \quad \int_0^1 x e^x dx = \left[(x-1)e^x \right]_0^1 = 1$$

$$(b) \quad \int_0^\pi x \sin x dx = \left[\sin x - x \cos x \right]_0^\pi = \pi$$

$$(c) \quad \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \log(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \log 2$$

$$(d) \quad x = \tan \theta \text{ とおくと } \quad \frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow 1 \\ \hline \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \end{array}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + 1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - x + 1) - (x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= -\frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

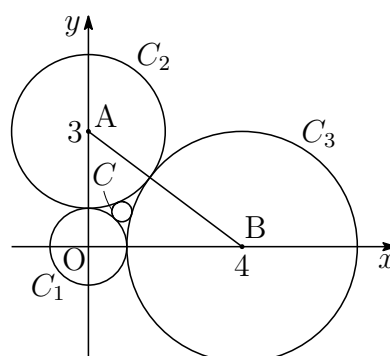
- 3** (1) 2点 $A(0, 3)$, $B(4, 0)$ 間の距離は5
右の図から

$$r_1 + r_2 = 3$$

$$r_2 + r_3 = 5$$

$$r_3 + r_1 = 4$$

よって $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$



- (2) C の中心を $P(a, b)$, 半径 r について

$$OP = 1 + r, \quad AP = 2 + r, \quad BP = 3 + r$$

である。したがって

$$a^2 + b^2 = (1 + r)^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a^2 + (b - 3)^2 = (2 + r)^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$(a - 4)^2 + b^2 = (3 + r)^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

- ② - ① および ③ - ① より

$$\begin{cases} -6b + 9 = 2r + 3 \\ -8a + 16 = 4r + 8 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{2-r}{2}, \quad b = \frac{3-r}{3} \quad \dots \textcircled{4}$$

- ④ を ① に代入すると

$$\left(\frac{2-r}{2}\right)^2 + \left(\frac{3-r}{3}\right)^2 = (1+r)^2$$

$$23r^2 + 132r - 36 = 0$$

$$(r+6)(23r-6) = 0$$

$r > 0$ であるから

$$r = \frac{6}{23}$$

これを ④ に代入すると $(a, b) = \left(\frac{20}{23}, \frac{21}{23}\right)$



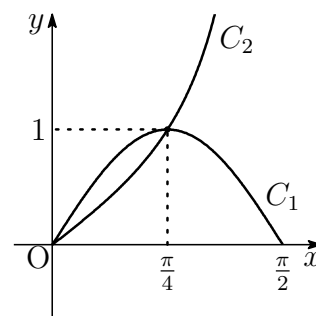
4 (1) $\sin 2x = \tan x$ より

$$2 \sin x \cos x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin x(2 \cos^2 x - 1) = 0$$

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ より } \sin x = 0, \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{よって } x = 0, \frac{\pi}{4}$$



(2) C_1 と C_2 の概形は右の図のようになる.

(3) 求める面積を S とすると

$$S = \int_0^{\pi/4} (\sin 2x - \tan x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + \log \cos x \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2$$

■

5 (1) $P(\cos \theta, a + \sin \theta)$ が $y \geq x^2$ の表す領域にあるとき

$$a + \sin \theta \geq \cos^2 \theta \quad \text{ゆえに} \quad \sin^2 \theta + \sin \theta + a - 1 \geq 0$$

$$\text{したがって} \quad \left(\sin \theta + \frac{1}{2} \right)^2 + a - \frac{5}{4} \geq 0 \quad \cdots (*)$$

$180^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ であるから

$$-1 \leq \sin \theta \leq 0 \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leq \left(\sin \theta + \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

上式から, (*) を常にみたす a の値の範囲は

$$a - \frac{5}{4} \geq 0 \quad \text{よって} \quad a \geq \frac{5}{4}$$

(2) $a = \frac{5}{4}$ のとき, C の方程式は

$$x^2 + \left(y - \frac{5}{4} \right)^2 = 1 \quad \left(y \leq \frac{5}{4} \right)$$

これと $y = x^2$ から x^2 を消去すると

$$\left(y - \frac{3}{4} \right)^2 = 0$$

ゆえに, C と放物線 $y = x^2$ は, 次の 2 点で, 右の図のように接する.

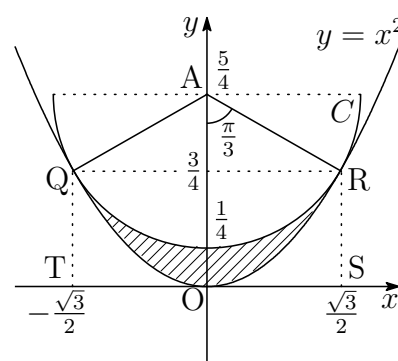
$$Q \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4} \right), \quad R \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4} \right)$$

$\angle QAR = \frac{2}{3}\pi$ より, C と直線 QR で囲まれ部分の面積を S_1 とすると

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{2}{3}\pi - \triangle AQR = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

四角形 $QRST$ の面積が $\frac{3}{4}\sqrt{3}$ であるから, 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{4}\sqrt{3} - S_1 - 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2 dx \\ &= \frac{3}{4}\sqrt{3} - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$



6 (1) D は直線 AB 上にあるから

$$\vec{d} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b} \quad (s \text{ は実数})$$

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}, \quad OD \perp AB \text{ より}$$

$$\{(1-s)\vec{a} + s\vec{b}\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

$$(s-1)|\vec{a}|^2 + (1-2s)\vec{a} \cdot \vec{b} + s|\vec{b}|^2 = 0$$

$$|\vec{a}| = 2, \quad |\vec{b}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = t \text{ であるから}$$

$$4(s-1) + (1-2s)t + s = 0 \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{t-4}{2t-5}$$

$$\text{よって} \quad \vec{d} = \frac{t-1}{2t-5}\vec{a} + \frac{t-4}{2t-5}\vec{b}$$

(2) \vec{a} と \vec{b} のなす角が 120° であるから

$$t = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 120^\circ = 2 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$\text{これを (1) の結果に代入すると} \quad \vec{d} = \frac{2}{7}\vec{a} + \frac{5}{7}\vec{b}$$

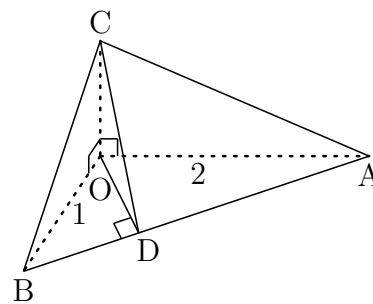
$$\text{したがって} \quad |\vec{d}| = \frac{1}{7} \sqrt{4|\vec{a}|^2 + 20\vec{a} \cdot \vec{b} + 25|\vec{b}|^2}$$

$$= \frac{1}{7} \sqrt{16 - 20 + 25} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

$\vec{d} - \vec{c}$ と \vec{d} のなす角が 60° であるから $\angle ODC = 60^\circ$

直角三角形 ODC から $|\vec{c}| = \sqrt{3}|\vec{d}|$

$$\text{ゆえに} \quad |\vec{c}| = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{3}{\sqrt{7}} \quad \text{よって} \quad |\vec{c}|^2 = \frac{9}{7}$$



- 7 (1) 実係数の2次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の解 α, β は互いに共役であるから

$$\beta = \bar{\alpha}$$

上式と解と係数の関係により $b = \alpha\beta = \alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2 \dots (*)$

$\alpha \neq 0$ であるから, $|\alpha| > 0$ より $b > 0$

(1) の結果と $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)\beta$ により

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)\alpha\beta = b \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \dots (**)$$

よって $\arg(\alpha^2) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ (k は整数)

(2) $b = 2$ のとき, $(**)$ より

$$\alpha^2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

ゆえに $\alpha^{2n} = (\alpha^2)^n$ が実数となる最小の自然数 n は

$$n \cdot \frac{\pi}{6} = \pi \quad \text{すなわち} \quad n = 6$$

このとき $\alpha^{2n} = (\alpha^2)^6 = 2^6 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^6 = 2^6 \cdot (-1) = -64$ ■

- 8 (1) 5個のさいころはすべて、1の目が出る確率が $\frac{1}{2}$ であるから、丁度2個が1の目である確率は

$${}_5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

- (2) 1の目が出る確率が $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ であるさいころをそれぞれA, Bとすると, Aは2個, Bは3個あるので, $X=2$ となるのは, 次の場合である.

- (i) Aは2個とも1の目, Bは3個とも1以外の目である確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{72}$$

- (ii) A, Bがそれぞれ1個ずつ1の目である確率は

$${}_2C_1 \cdot \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times {}_3C_1 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{12}{72}$$

- (iii) Aは2個とも1以外の目, Bは2個が1の目である確率は

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 \times {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{12}{72}$$

- (i)~(iii)から, 求める確率は

$$\frac{1}{72} + \frac{12}{72} + \frac{12}{72} = \frac{25}{72}$$

- (3) 5個のさいころはすべて, 1の目が出る確率が $\frac{1}{3}$ より, 求める期待値は

$$\sum_{k=0}^5 k {}_5C_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{5-k} = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

解説 $p + q = 1$ とすると, 一般に, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k {}_n C_k p^k q^{n-k} &= \sum_{k=1}^n k {}_n C_k p^k q^{n-k} \\ &= np \sum_{k=1}^n {}_{n-1} C_{k-1} p^{k-1} q^{n-k} \\ &= np \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1} C_k p^k q^{n-1-k} = np \end{aligned}$$



9 (1) $f(x) = 4^x - 2^{x+2} + 3 = (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 3 = (2^x - 1)(2^x - 3)$
 $f(x) > 0$ より $2^x < 1, 3 < 2^x$ よって $x < 0, \log_2 3 < x$

(2) $0.3 < \log_{10} 2 < 0.31, 0.47 < \log_{10} 3 < 0.48$ より

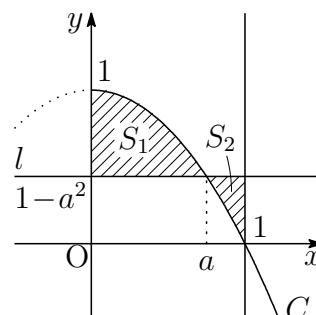
$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} < \frac{0.48}{0.3} = 1.6$$

(1) の結果から $f(1.6) > 0$ ■

10 (1) C と l の交点は $(a, 1 - a^2)$

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^a \{(1 - x^2) - (1 - a^2)\} dx \\ &= \int_0^a (a^2 - x^2) dx \\ &= \left[a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^a = \frac{2}{3} a^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_a^1 \{(1 - a^2) - (1 - x^2)\} dx \\ &= \int_a^1 (x^2 - a^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 - a^2 x \right]_a^1 = \frac{2}{3} a^3 - a^2 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$



(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 = \frac{2}{3} a^3 + \left(\frac{2}{3} a^3 - a^2 + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{4}{3} a^3 - a^2 + \frac{1}{3} \\ S' &= 4a^2 - 2a \\ &= 2a(2a - 1) \end{aligned}$$

したがって、 S の増減表は、次のようになる。

a	(0)	...	$\frac{1}{2}$...	(1)
S'		-	0	+	
S		↘	極小	↗	

よって、 $a = \frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{1}{4}$ をとる。 ■

11 (1) a, b, c, d は正の実数, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ より $ad < bc \dots \textcircled{1}$

(A) $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned} \frac{a+c}{b+d} &= \frac{b(a+c)}{b(b+d)} = \frac{ab+bc}{b(b+d)} > \frac{ab+ad}{b(b+d)} = \frac{a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{a}{b} \\ \frac{a+c}{b+d} &= \frac{d(a+c)}{d(b+d)} = \frac{ad+cd}{d(b+d)} < \frac{bc+cd}{d(b+d)} = \frac{c(b+d)}{d(b+d)} = \frac{c}{d} \end{aligned}$$

よって $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

(B) $c > a$ より, $c = ka$ とおくと ($k > 1$)

$$\frac{2ac}{ad+bc} = \frac{ac+ac}{ad+bc} = \frac{a \cdot ka + ac}{ad+b \cdot ka} = \frac{ka+c}{kb+d} \dots \textcircled{2}$$

(A) の結果から, $\frac{(k-1)a}{(k-1)b} < \frac{a+c}{b+d}$ であるから

$$\frac{(k-1)a}{(k-1)b} < \frac{(k-1)a + (a+c)}{(k-1)b + (b+d)} < \frac{a+c}{b+d}$$

したがって $\frac{a}{b} < \frac{ka+c}{kb+d} < \frac{a+c}{b+d} \dots \textcircled{3}$

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ から $\frac{a}{b} < \frac{2ac}{ad+bc} < \frac{a+c}{b+d}$

別解 $\textcircled{1}$ より

$$\frac{2ac}{ad+bc} > \frac{2ac}{bc+bc} = \frac{2ac}{2bc} = \frac{a}{b}$$

また $(a+c)(ad+bc) - 2ac(b+d) = (c-a)(bc-ad)$

$c > a$ のとき, $\textcircled{1}$ および上式から

$$(a+c)(ad+bc) - 2ac(b+d) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2ac}{ad+bc} < \frac{a+c}{b+d}$$

よって $\frac{a}{b} < \frac{2ac}{ad+bc} < \frac{a+c}{b+d}$

$$\begin{aligned} (2) \quad n^4 + 4 &= (n^4 + 4n^2 + 4) - 4n^2 \\ &= (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 \\ &= (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2) \end{aligned}$$

$n \geq 2$ のとき $n^2 + 2n + 2 \geq 10, \quad n^2 - 2n + 2 = n(n-2) + 2 \geq 2$

よって, $n^4 + 4$ は合成数である. ■

12 (1) $n = 1$ のとき $b_1 = 2^2 - 2 = 2$
 $n \geq 2$ のとき $b_n = 2^{n+1} - 2 - (2^n - 2) = 2^n$
 $n = 1$ のときも上式は成り立つので $b_n = 2^n$

(2) $a_n = 2 + 21(n - 1) = 21n - 19$
 $c_n = b_n - a_n = 2^n - 21n + 19 \quad \dots \textcircled{1}$
 $c_{n+1} - c_n = 2^{n+1} - 21(n + 1) + 19 - \{2^n - 21n + 19\}$
 $= 2^n - 21 \quad \dots \textcircled{2}$

よって、 $n \geq 5$ のとき $c_{n+1} - c_n = 2^n - 21 \geq 2^5 - 21 > 0$

(3) ①, ② から

$$c_1 = 2 - 21 + 19 = 0, \quad c_7 = 2^7 - 147 + 19 = 0$$

$$c_1 > c_2 > c_3 > c_4 > c_5 < c_6 < c_7 < \dots$$

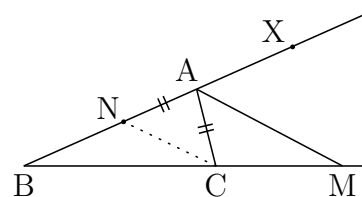
したがって、 $c_n = 0$ となる n は $n = 1, 7$ ■

13 (1) $AB : AC = BM : MC \dots \textcircled{1}$

(A) $AC = AN$ と $\textcircled{1}$ から

$$BA : AN = BM : MC$$

よって $MA \parallel CN$



(B) (A) の結果から

$$\angle XAM = \angle ANC \text{ (同位角)}, \quad \angle CAM = \angle ACN \text{ (錯角)} \dots \textcircled{1}$$

$\triangle ANC$ は二等辺三角形であるから

$$\angle ANC = \angle ACN \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } \angle XAM = \angle CAM$$

よって, AM が $\angle A$ の外角を二等分する.

(2) BQ, CR はそれぞれ $\angle B, \angle C$ の二等分線であるから

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AQ}{QC}, \quad \frac{BC}{AC} = \frac{BR}{RA}$$

上の2式の辺々を掛けると $\frac{AB}{AC} = \frac{AQ}{QC} \cdot \frac{BR}{RA} \dots \textcircled{3}$

$\triangle ABC$ と直線 QR について, メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{BP}{PC} = \frac{BR}{RA} \cdot \frac{AQ}{QC} \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より } \frac{AB}{AC} = \frac{BP}{PC}$$

よって, AP は $\angle A$ の外角を二等分線する. ■