平成16年度　宮崎大学２次試験前期日程(数学問題)
工・教育文化・農学部　平成16年2月25日

- 工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 必答，$\boxed{6}$ 〜 $\boxed{8}$ から1題選択．数II・III・B(120分)
- 教育文化(中学[理系]，生活文化[生活環境コース])学部は，$\boxed{1}$，$\boxed{5}$ 必答，$\boxed{6}$ 〜 $\boxed{8}$ から1題選択．数II・B (90分)
- 教育文化(初等教育コース，中学[文系]，障害児コース])学部・農(食料生産科学・生物環境科学・地域農業システム・獣医)学部は，$\boxed{9}$，$\boxed{10}$ 必答，$\boxed{11}$ 〜 $\boxed{13}$ から1題選択．数II・A (90分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 関数 $f(x) = 4^x - 2^{x+2} + 3$ について，次の各問に答えよ．

(1) $f(x) > 0$ を満たす x の値の範囲を求めよ．

(2) $f(1.59)$ の値の正負を判定せよ．ただし，$0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$，$0.477 < \log_{10} 3 < 0.478$ である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 定積分と極限に関する次の各問に答えよ．

(1) 次の定積分の値を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$　(b) $\displaystyle\int_0^\pi x\sin x\,dx$　(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$　(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

(2) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+1})$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 座標平面上の3つの円 C_1，C_2，C_3 は，それぞれ中心が $(0,\ 0)$，$(0,\ 3)$，$(4,\ 0)$，半径が r_1，r_2，r_3 であり，どの2つの円も互いに外側で接しているとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) r_1，r_2，r_3 の値を求めよ．

(2) 円 C が C_1，C_2，C_3 のそれぞれと互いに外接しているとき，円 C の半径 r と中心の座標 $(a,\ b)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 2つの曲線 $C_1 : y = \sin 2x\ \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$，$C_2 : y = \tan x\ \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ について，次の各問に答えよ．

(1) $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ における $\sin 2x = \tan x$ の解をすべて求めよ．

(2) C_1 と C_2 の概形を同一座標平面上にかけ．

(3) C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 中心 $\mathrm{A}(0, a)$，半径1の円上の点 $\mathrm{P}(\cos\theta, a+\sin\theta)$ について，θ が $180^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$ の範囲を動くときの点Pの軌跡を C とする．C が不等式 $y \geqq x^2$ の表す領域にあるとき，次の各問に答えよ．

(1) $a \geqq \dfrac{5}{4}$ であることを示せ．

(2) $a = \dfrac{5}{4}$ のとき，C と放物線 $y = x^2$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 四面体OABCにおいて，$\mathrm{OA} = 2$，$\mathrm{OB} = 1$，$\mathrm{OC} \perp \mathrm{OA}$，$\mathrm{OC} \perp \mathrm{OB}$ であるとする．点Dを，直線AB上に，$\mathrm{OD} \perp \mathrm{AB}$ となるようにとる．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{d}$，$\vec{a} \cdot \vec{b} = t$ とおくとき，次の各問に答えよ．ただし，$\vec{a} \cdot \vec{b}$ はベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積を表す．

(1) $\vec{d}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ．

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 120°，$\vec{d} - \vec{c}$ と $\vec{d}$ のなす角が 60° であるとき，$|\vec{c}|^2$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 係数 a，b が実数である2次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ は異なる2つの虚数解 α，β を持ち，$\alpha = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3} + i)\beta$ が成立しているとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $b > 0$ を示し，α^2 の偏角を求めよ．

(2) n を α^{2n} が実数となる最小の自然数とする．$b = 2$ のとき，α^{2n} の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ 5個のさいころがある．このうち，k 個は1の目の出る確率が $\dfrac{1}{3}$ で，残りの $(5-k)$ 個は1の目の出る確率が $\dfrac{1}{2}$ である．この5個のさいころを同時に投げたとき，1の目の出たさいころの数を X とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $k = 0$ のとき，$X = 2$ となる確率を求めよ．

(2) $k = 2$ のとき，$X = 2$ となる確率を求めよ．

(3) $k = 5$ のとき，X の期待値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ 関数 $f(x) = 4^x - 2^{x+2} + 3$ について，次の各問に答えよ．

(1) $f(x) > 0$ をみたす x の値の範囲を求めよ．

(2) $f(1.6)$ の値の正負を判定せよ．ただし，$0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$，$0.47 < \log_{10} 3 < 0.48$ である．

$\boxed{\mathbf{10}}$ a を $0 < a < 1$ の範囲の定数とする．直線 $l : y = 1 - a^2$ と曲線 $C : y = 1 - x^2$ $(x \geqq 0)$ について，次の各問に答えよ．

(1) 曲線 C，y 軸，直線 l で囲まれる部分の面積を S_1 とし，曲線 C，直線 l，直線 $x = 1$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする．S_1，S_2 を a を用いて表せ．

(2) $S = S_1 + S_2$ とおくとき，$0 < a < 1$ の範囲おける S の最小値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{11}}$ 次の各問に答えよ．

(1) 正の実数 a，b，c，d が $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ を満たすとき，次の (A)，(B) に答えよ．

(A) 不等式 $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$ が成り立つことを示せ．

(B) $a < c$ のとき，不等式 $\dfrac{a}{b} < \dfrac{2ac}{ad+bc} < \dfrac{a+c}{b+d}$ が成り立つことを示せ．

(2) n を 2 以上の自然数とするとき，$n^4 + 4$ は素数にならないことを示せ．

$\boxed{\mathbf{12}}$ 数列 $\{a_n\}$ は，初項 $a_1 = 2$，公差 21 の等差数列で，数列 $\{b_n\}$ は初項 b_1 から第 n 項 b_n までの和が $2^{n+1} - 2$ である数列とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) b_n を n を用いて表せ．

(2) $c_n = b_n - a_n$ とおく．$n \geqq 5$ のとき，$c_{n+1} > c_n$ となることを示せ．

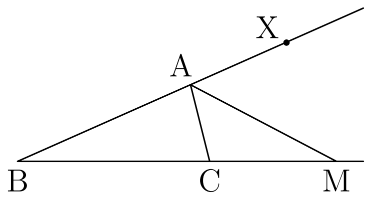
(3) $a_n = b_n$ となる n の値をすべて求めよ．

$\boxed{\textbf{13}}$ $\mathrm{AB} > \mathrm{AC}$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ について，次の各問に答えよ．なお，下の 2 つの図において，点 X は辺 BA の延長上の点とする．

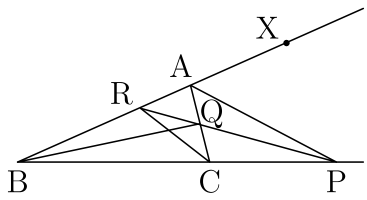
(1) 右図のように，点 M を辺 BC の延長上に $\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BM} : \mathrm{MC}$ を満たすようにとる．このとき，次の (A)，(B) に答えよ．

(A) 点 N を辺 AB 上に $\mathrm{AC} = \mathrm{AN}$ を満たすようにとるとき，$\mathrm{MA} /\!/ \mathrm{CN}$ であることを示せ．

(B) AM が $\angle\mathrm{A}$ の外角を 2 等分することを示せ．



(2) 右図において，点 Q は $\angle\mathrm{B}$ の二等分線と辺 AC の交点，点 R は $\angle\mathrm{C}$ の二等分線と辺 AB との交点とする．また，直線 RQ と辺 BC の延長との交点を P とする．このとき，AP が $\angle\mathrm{A}$ の外角を 2 等分することを示せ．



正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x) = 4^x - 2^{x+2} + 3 = (2^x)^2 - 4{\cdot}2^x + 3 = (2^x - 1)(2^x - 3)$

$f(x) > 0$ より　$2^x < 1$，$3 < 2^x$　よって　$\boldsymbol{x < 0}$**，**$\boldsymbol{\log_2 3 < x}$

(2) $0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$，$0.477 < \log_{10} 3 < 0.478$ より

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} < \frac{0.478}{0.301} = 1.58\cdots < 1.59$$

(1) の結果から　$\boldsymbol{f(1.59) > 0}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) (a) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx = \Big[\,(x-1)e^x\,\Big]_0^1 = \mathbf{1}$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = \Big[\,\sin x - x\cos x\,\Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{\pi}$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \Big[\,\frac{1}{2}\log(1+x^2)\,\Big]_0^1 = \mathbf{\frac{1}{2}\log 2}$

(d) $x = \tan\theta$ とおくと　$\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

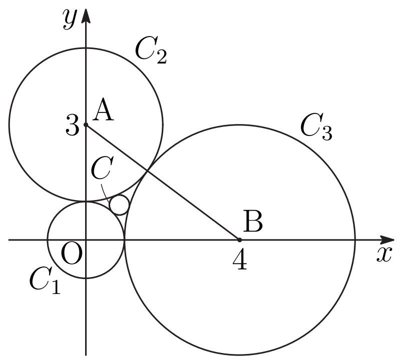
x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \ \to\ \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

(2)
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+1}\right) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2+x+1)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \\
&= \mathbf{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

3 (1) 2 点 A(0, 3)，B(4, 0) 間の距離は 5

右の図から



$$r_1 + r_2 = 3$$
$$r_2 + r_3 = 5$$
$$r_3 + r_1 = 4$$

よって　$\boldsymbol{r_1 = 1,\ r_2 = 2,\ r_3 = 3}$

(2) C の中心を P$(a,\ b)$，半径 r について

$$\mathrm{OP} = 1 + r,\ \ \mathrm{AP} = 2 + r,\ \ \mathrm{BP} = 3 + r$$

である．したがって

$$a^2 + b^2 = (1 + r)^2 \qquad \cdots ①$$
$$a^2 + (b - 3)^2 = (2 + r)^2 \qquad \cdots ②$$
$$(a - 4)^2 + b^2 = (3 + r)^2 \qquad \cdots ③$$

② − ① および ③ − ① より

$$\begin{cases} -6b + 9 = 2r + 3 \\ -8a + 16 = 4r + 8 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{2 - r}{2},\ b = \frac{3 - r}{3} \qquad \cdots ④$$

④ を ① に代入すると

$$\left(\frac{2 - r}{2}\right)^2 + \left(\frac{3 - r}{3}\right)^2 = (1 + r)^2$$
$$23r^2 + 132r - 36 = 0$$
$$(r + 6)(23r - 6) = 0$$

$r > 0$ であるから　　$\boldsymbol{r = \dfrac{6}{23}}$

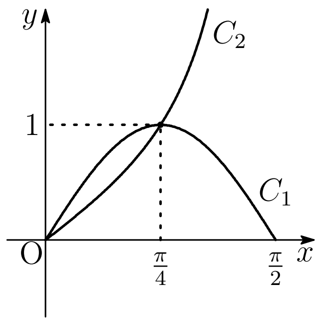
これを ④ に代入すると　$\boldsymbol{(a,\ b) = \left(\dfrac{20}{23},\ \dfrac{21}{23}\right)}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\sin 2x = \tan x$ より

$$2\sin x\cos x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\sin x(2\cos^2 x - 1) = 0$$

$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ より　$\sin x = 0,\ \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって　　$\boldsymbol{x = 0,\ \dfrac{\pi}{4}}$



(2) C_1 と C_2 の概形は右の図のようになる.

(3) 求める面積を S とすると

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2x - \tan x)\,dx$$
$$= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + \log\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\mathrm{P}(\cos\theta,\ a+\sin\theta)$ が $y \geqq x^2$ の表す領域にあるとき

$$a+\sin\theta \geqq \cos^2\theta \quad \text{ゆえに} \quad \sin^2\theta+\sin\theta+a-1 \geqq 0$$

したがって $\quad \left(\sin\theta+\dfrac{1}{2}\right)^2+a-\dfrac{5}{4} \geqq 0 \quad \cdots(*)$

$180^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$ であるから

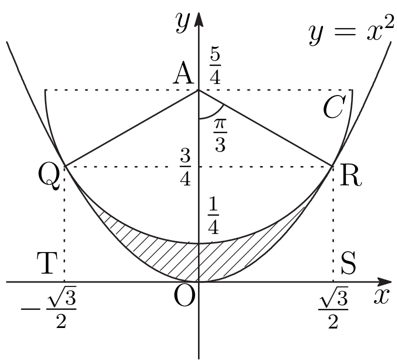
$$-1 \leqq \sin\theta \leqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq \left(\sin\theta+\frac{1}{2}\right)^2 \leqq \frac{1}{4}$$

上式から，$(*)$ を常にみたす a の値の範囲は

$$a-\frac{5}{4} \geqq 0 \quad \text{よって} \quad a \geqq \frac{5}{4}$$

(2) $a=\dfrac{5}{4}$ のとき，C の方程式は

$$x^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=1 \quad \left(y \leqq \frac{5}{4}\right)$$



これと $y=x^2$ から x^2 を消去すると

$$\left(y-\frac{3}{4}\right)^2=0$$

ゆえに，C と放物線 $y=x^2$ は，次の 2 点で，右の図のように接する．

$$\mathrm{Q}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{4}\right),\quad \mathrm{R}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{4}\right)$$

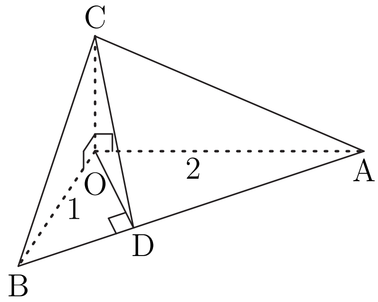
$\angle\mathrm{QAR}=\dfrac{2}{3}\pi$ より，C と直線 QR で囲まれ部分の面積を S_1 とすると

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{2}{3}\pi-\triangle\mathrm{AQR}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

四角形 QRST の面積が $\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$ であるから，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{4}\sqrt{3}-S_1-2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2\,dx \\ &= \frac{3}{4}\sqrt{3}-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-2\left[\ \frac{x^3}{3}\ \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{4}\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) D は直線 AB 上にあるから



$$\vec{d} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$, $\mathrm{OD} \perp \mathrm{AB}$ より

$$\{(1-s)\vec{a} + s\vec{b}\}\cdot(\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

$$(s-1)|\vec{a}|^2 + (1-2s)\vec{a}\cdot\vec{b} + s|\vec{b}|^2 = 0$$

$|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = t$ であるから

$$4(s-1) + (1-2s)t + s = 0 \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{t-4}{2t-5}$$

よって $\quad \boldsymbol{\vec{d} = \frac{t-1}{2t-5}\vec{a} + \frac{t-4}{2t-5}\vec{b}}$

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 120° であるから

$$t = \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ = 2\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

これを (1) の結果に代入すると $\quad \vec{d} = \frac{2}{7}\vec{a} + \frac{5}{7}\vec{b}$

したがって $\quad |\vec{d}| = \frac{1}{7}\sqrt{4|\vec{a}|^2 + 20\vec{a}\cdot\vec{b} + 25|\vec{b}|^2}$

$$= \frac{1}{7}\sqrt{16 - 20 + 25} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

$\vec{d} - \vec{c}$ と $\vec{d}$ のなす角が 60° であるから $\quad \angle\mathrm{ODC} = 60^\circ$

直角三角形 ODC から $\quad |\vec{c}| = \sqrt{3}|\vec{d}|$

ゆえに $\quad |\vec{c}| = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{3}{\sqrt{7}} \quad$ よって $\quad \boldsymbol{|\vec{c}|^2 = \frac{9}{7}}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) 実係数の2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解 α，β は互いに共役であるから

$$\beta=\overline{\alpha}$$

上式と解と係数の関係により　$b=\alpha\beta=\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2 \quad \cdots(*)$

$\alpha \neq 0$ であるから，$|\alpha|>0$ より　$b>0$

(1) の結果と $\alpha=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+i)\beta$ により

$$\alpha^2=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)\alpha\beta=b\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) \quad \cdots(**)$$

よって　$\boldsymbol{\arg(\alpha^2)=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi}$　**($\boldsymbol{k}$ は整数)**

(2) $b=2$ のとき，$(**)$ より

$$\alpha^2=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

ゆえに $\alpha^{2n}=(\alpha^2)^n$ が実数となる最小の自然数 n は

$$n\cdot\frac{\pi}{6}=\pi \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{n=6}$$

このとき　$\alpha^{2n}=(\alpha^2)^6=2^6\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^6=2^6\cdot(-1)=\boldsymbol{-64}$

$\boxed{8}$ (1) 5個のさいころはすべて，1の目が出る確率が $\dfrac{1}{2}$ であるから，丁度2個が1の目である確率は

$$ {}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{5}{16}} $$

(2) 1の目が出る確率が $\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{2}$ であるさいころをそれぞれA，Bとすると，Aは2個，Bは3個あるので，$X=2$ となるのは，次の場合である．

(i) Aは2個とも1の目，Bは3個とも1以外の目である確率は

$$ \left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{72} $$

(ii) A，Bがそれぞ1個ずつ1の目である確率は

$$ {}_2\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)\times{}_3\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{12}{72} $$

(iii) Aは2個とも1以外の目，Bは2個が1の目である確率は

$$ \left(1-\frac{1}{3}\right)^2\times{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{12}{72} $$

(i)〜(iii) から，求める確率は

$$ \frac{1}{72}+\frac{12}{72}+\frac{12}{72}=\boldsymbol{\frac{25}{72}} $$

(3) 5個のさいころはすべて，1の目が出る確率が $\dfrac{1}{3}$ より，求める期待値は

$$ \sum_{k=0}^{5}k\,{}_5\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(1-\frac{1}{3}\right)^{5-k}=5\times\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{5}{3}} $$

解説 $p+q=1$ とすると，一般に，次式が成り立つ．

$$ \begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}k\,{}_n\mathrm{C}_k\,p^kq^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n}k\,{}_n\mathrm{C}_k\,p^kq^{n-k} \\ &= np\sum_{k=1}^{n}{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\,p^{k-1}q^{n-k} \\ &= np\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_k\,p^kq^{n-1-k}=np \end{aligned} $$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $f(x) = 4^x - 2^{x+2} + 3 = (2^x)^2 - 4{\cdot}2^x + 3 = (2^x - 1)(2^x - 3)$

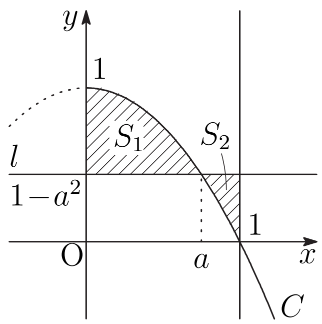
$f(x) > 0$ より　$2^x < 1$，$3 < 2^x$　よって　$\boldsymbol{x < 0}$，$\boldsymbol{\log_2 3 < x}$

(2) $0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$，$0.47 < \log_{10} 3 < 0.48$ より

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} < \frac{0.48}{0.3} = 1.6$$

(1) の結果から　$\boldsymbol{f(1.6) > 0}$

$\boxed{\mathbf{10}}$ (1) C と l の交点は　$(a,\ 1 - a^2)$



$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_0^a \{(1 - x^2) - (1 - a^2)\}\,dx \\
&= \int_0^a (a^2 - x^2)\,dx \\
&= \left[\ a^2 x - \frac{1}{3}x^3\ \right]_0^a = \boldsymbol{\frac{2}{3}a^3} \\
S_2 &= \int_a^1 \{(1 - a^2) - (1 - x^2)\}\,dx \\
&= \int_a^1 (x^2 - a^2)\,dx \\
&= \left[\ \frac{1}{3}x^3 - a^2 x\ \right]_a^1 = \boldsymbol{\frac{2}{3}a^3 - a^2 + \frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}
S = S_1 + S_2 &= \frac{2}{3}a^3 + \left(\frac{2}{3}a^3 - a^2 + \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{4}{3}a^3 - a^2 + \frac{1}{3} \\
S' &= 4a^2 - 2a \\
&= 2a(2a - 1)
\end{aligned}$$

したがって，S の増減表は，次のようになる．

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，$a = \dfrac{1}{2}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{11}}$ (1) a，b，c，d は正の実数，$\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ より　$ad < bc$　$\cdots$①

(A) ① より

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{b(a+c)}{b(b+d)} = \frac{ab+bc}{b(b+d)} > \frac{ab+ad}{b(b+d)} = \frac{a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{a}{b}$$
$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{d(a+c)}{d(b+d)} = \frac{ad+cd}{d(b+d)} < \frac{bc+cd}{d(b+d)} = \frac{c(b+d)}{d(b+d)} = \frac{c}{d}$$

よって　$\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$

(B) $c > a$ より，$c = ka$ とおくと $(k > 1)$

$$\frac{2ac}{ad+bc} = \frac{ac+ac}{ad+bc} = \frac{a \cdot ka + ac}{ad + b \cdot ka} = \frac{ka+c}{kb+d} \quad \cdots ②$$

(A) の結果から，$\dfrac{(k-1)a}{(k-1)b} < \dfrac{a+c}{b+d}$ であるから

$$\frac{(k-1)a}{(k-1)b} < \frac{(k-1)a+(a+c)}{(k-1)b+(b+d)} < \frac{a+c}{b+d}$$

したがって　$\dfrac{a}{b} < \dfrac{ka+c}{kb+d} < \dfrac{a+c}{b+d}$　$\cdots$③

②，③ から　$\dfrac{a}{b} < \dfrac{2ac}{ad+bc} < \dfrac{a+c}{b+d}$

別解 ① より

$$\frac{2ac}{ad+bc} > \frac{2ac}{bc+bc} = \frac{2ac}{2bc} = \frac{a}{b}$$

また　$(a+c)(ad+bc) - 2ac(b+d) = (c-a)(bc-ad)$

$c > a$ のとき，① および上式から

$$(a+c)(ad+bc) - 2ac(b+d) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2ac}{ad+bc} < \frac{a+c}{b+d}$$

よって　$\dfrac{a}{b} < \dfrac{2ac}{ad+bc} < \dfrac{a+c}{b+d}$

(2)
$$\begin{aligned} n^4+4 &= (n^4+4n^2+4) - 4n^2 \\ &= (n^2+2)^2 - (2n)^2 \\ &= (n^2+2n+2)(n^2-2n+2) \end{aligned}$$

$n \geqq 2$ のとき　$n^2+2n+2 \geqq 10$，　$n^2-2n+2 \geqq 2$

よって，n^4+4 は合成数である．

$\boxed{\mathbf{12}}$ (1) $n=1$ のとき　$b_1=2^2-2=2$

$n \geqq 2$ のとき　$b_n=2^{n+1}-2-(2^n-2)=2^n$

$n=1$ のときも上式は成り立つので　$\boldsymbol{b_n=2^n}$

(2) $a_n=2+21(n-1)=21n-19$

$c_n=b_n-a_n=2^n-21n+19 \quad \cdots ①$

$$\begin{aligned} c_{n+1}-c_n &= 2^{n+1}-21(n+1)+19-\{2^n-21n+19\} \\ &= 2^n-21 \quad \cdots ② \end{aligned}$$

よって，$n \geqq 5$ のとき　$c_{n+1}-c_n=2^n-21 \geqq 2^5-21>0$

(3) ①，② から

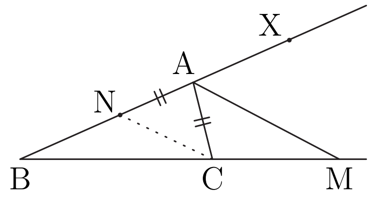
$$c_1=2-21+19=0, \quad c_7=2^7-147+19=0$$
$$c_1>c_2>c_3>c_4>c_5<c_6<c_7<\cdots$$

したがって，$c_n=0$ となる n は高々2 個.

よって　　$\boldsymbol{n=1,\ 7}$

$\boxed{\mathbf{13}}$ (1) AB : AC = BM : MC　$\cdots$①

(A) AC = AN と ① から



$$\mathrm{BA : AN = BM : MC}$$

よって　　MA//CN

(B) (A) の結果から

$$\angle\mathrm{XAM} = \angle\mathrm{ANC}\ \text{(同位角)},\quad \angle\mathrm{CAM} = \angle\mathrm{ACN}\ \text{(錯角)}\quad \cdots ①$$

△ANC は二等辺三角形であるから

$$\angle\mathrm{ANC} = \angle\mathrm{ACN}\quad \cdots ②$$

①，② から　　$\angle\mathrm{XAM} = \angle\mathrm{CAM}$

よって，AM が ∠A の外角を二等分する．

(2) BQ，CR はそれぞれ ∠B，∠C の二等分線であるから

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}},\quad \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RA}}$$

上の 2 式の辺々を掛けると　$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RA}}$　$\cdots$③

△ABC と直線 QR について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} = 1\quad \text{ゆえに}\quad \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} = \frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RA}}\cdot\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}\quad \cdots ④$$

③，④ より　　$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}$

よって，AP は ∠A の外角を二等分線する．