平成15年度　宮崎大学2次試験前期日程(数学問題)
工・教育文化・農学部　平成15年2月25日

- 工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 必答，$\boxed{5}$ ～ $\boxed{7}$ から1題選択．数II・III・B(120分)
- 教育文化(中学[理系]，生活文化[生活環境コース])学部は，$\boxed{2}$, $\boxed{8}$ 必答，$\boxed{5}$ ～ $\boxed{7}$ から1題選択．数II・B (90分)
- 教育文化(初等教育コース，中学[文系]，障害児コース])学部・農(食料生産科学・生物環境科学・地域農業システム・獣医)学部は，$\boxed{2}$, $\boxed{9}$ 必答，$\boxed{10}$ ～ $\boxed{12}$ から1題選択．数II・A (90分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ x，y を実数とするとき，次の各問に答えよ．

(1) 等式 $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2(x+y) = 2 - \cos x \cos y \cos(x+y)$ が成り立つことを示せ．

(2) $x > 0$，$y > 0$，$x + y < \pi$ とする．$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2(x+y) > 2$ であるとき，不等式 $x + y > \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 座標平面上で，x 軸までの距離と直線 $y = \dfrac{3}{4}x$ までの距離の和が1以下である点全体からなる領域を D とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 領域 D を図示せよ．

(2) 点 $(x,\ y)$ が領域 D 上を動くとき，$x + y$ が最大となる点の座標を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 座標平面上で，t を媒介変数として表される曲線 $C : x = a\cos t,\ y = b\sin t$ $(a > 0,\ b > 0,\ 0 \leqq t \leqq 2\pi)$ について，次の各問に答えよ．

(1) x，y の満たす関係式を求めよ．

(2) $0 \leqq x \leqq a\cos\theta$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ において，曲線 C，y 軸および直線 $x = a\cos\theta$ によって囲まれる部分の面積 $S(\theta)$ を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2} - 0} \frac{S(\theta)}{\frac{\pi}{2} - \theta}$ を求めよ．ただし，$\theta \to \dfrac{\pi}{2} - 0$ は，θ が $\dfrac{\pi}{2}$ より小さい値をとりながら $\dfrac{\pi}{2}$ に限りなく近づくことを表す．

$\boxed{4}$ 関数 $f(x) = ae^{2x}$ (a は定数) について，曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(b,\ f(b))$ における接線が $y = x$ であるとき，次の各問に答えよ．ただし，e は自然対数の底で，$e = 2.718\cdots$ である．

(1) a と b の値を求めよ．

(2) $g(x) = f(x) - x$ とおくとき，$0 \leqq x \leqq 1$ における $g(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(3) $y = f(x)$ の逆関数を $y = f^{-1}(x)$ と表す．このとき，曲線 $y = f(x)$，$y = f^{-1}(x)$，x 軸および y 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ．

$\boxed{5}$ 四面体 OABC において，OA = OC であるとする．さらに，BC を 1 : 2 に内分する点を D，AD を 3 : 1 に内分する点を E とするとき，OE⊥AC であるとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \vec{e}$ とおくとき，次の各問に答えよ．

(1) $\vec{e}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c}$ であることを示せ．ただし，記号 $\vec{x}\cdot\vec{y}$ はベクトル $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の内積を表す．

(3) OA : OB = 2 : 1，OE⊥BC であるとき，∠AOC を求めよ．

$\boxed{6}$ 点 O を原点とする複素数平面上で，2 つの複素数 α，β を表す点をそれぞれ A，B とする．α，β が $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2 - \dfrac{\beta}{\alpha} + 1 = 0$ を満たすとき，次の各問に答えよ．

(1) △OAB は正三角形であることを示せ．

(2) 複素数 $1 + i$ を表す点を C とする．正三角形 OAB の 1 辺の長さが 1 であり，△OAB が直線 OC に関して対称であるとき，複素数 α，β を求めよ．ただし，α の実部は β の実部より大きく，ともに正とする．

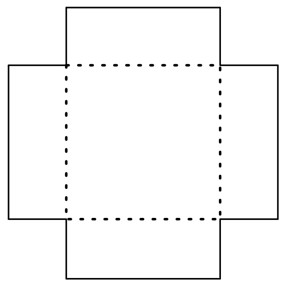
$\boxed{7}$ 2 個のさいころを同時に 1 回投げる．出る目の和を 5 で割った余りを X，出る目の積を 5 で割った余りを Y とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $Y \geqq 1$ である確率を求めよ．

(2) $X = 2$ または $Y = 2$ である確率を求めよ．

(3) $X = 2$ である条件のもとで $Y = 2$ である確率を求めよ．

8 1 辺の長さが 24cm の正方形の厚紙の 4 すみから合同な正方形を切りとり，その残りの部分 (右図) を点線に沿って折り曲げてふたのない箱 A を作る．同様に 1 辺の長さが 36cm の正方形の厚紙からふたのない箱 B を作る．ここで，箱 A，B の底面が合同な正方形となるように作るものとする．このとき，2 つの箱 A，B の容積の和の最大値を求めよ．ただし，紙の厚みの影響は考えないものとする．



9 次の各問に答えよ．

(1) 2 つの角 α，β について，等式

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2(\alpha+\beta) + 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) = 2$$

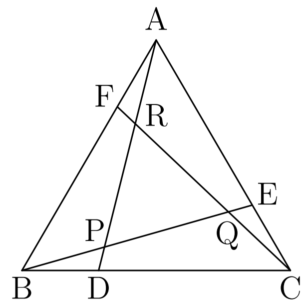
が成り立つことを示せ．

10 実数 a，b，c について $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく．$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$ がいずれも整数であるとき，次の問に答えよ．

(1) $2a$，$2b$ はともに整数であることを示せ．

(2) すべての整数 n について，$f(n)$ は整数であることを示せ．

11 右図の正三角形 ABC において，辺 BC，CA，AB を $m:n$ $(0 < m < n)$ に内分する点をそれぞれ D，E，F とする．また，線分 AD と BE の交点を P，線分 BE と CF の交点を Q，線分 CF と AD の交点を R とする．このとき，次の各問に答えよ．



(1) $\triangle$PQR は正三角形であることを示せ．

(2) AR : AP $= m : n$ であることを示せ．

12 $a_1 = \dfrac{q}{p}$ $(p > q > 0)$，$a_{n+1} = \dfrac{1}{2 - a_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ で定義された数列 $\{a_n\}$ について，次の各問に答えよ．

(1) a_2，a_3，a_4 を求めよ．

(2) 一般項 a_n を推定し，n，p，q を用いて表せ．さらに，その推定が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1)

$$
\begin{aligned}
&\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2(x+y)\\
&= \frac{1}{2}(1-\cos 2x) + \frac{1}{2}(1-\cos 2y) + 1 - \cos^2(x+y)\\
&= 2 - \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 2y) - \cos^2(x+y)\\
&= 2 - \cos(x+y)\cos(x-y) - \cos^2(x+y)\\
&= 2 - \{\cos(x-y) + \cos(x+y)\}\cos(x+y)\\
&= 2 - 2\cos x\cos y\cos(x+y)
\end{aligned}
$$

(2) $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2(x+y) > 2$ のとき，(1) の結果から

$2 - 2\cos x\cos y\cos(x+y) > 2$　ゆえに　$\cos x\cos y\cos(x+y) < 0$　$\cdots(*)$

$x>0$，$y>0$，$x+y<\pi$ のとき，$x+y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ と仮定すると

$$0 < x < \frac{\pi}{2},\quad 0 < y < \frac{\pi}{2},\quad 0 < x+y \leqq \frac{\pi}{2}$$

したがって　$\cos x > 0$，$\cos y > 0$，$\cos(x+y) \geqq 0$

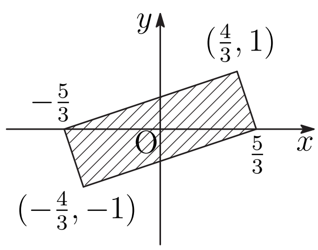
これは，$(*)$ に矛盾する．よって，$x+y > \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 領域 D 内の点 $(x,\ y)$ について，条件から，次式が成り立つ．

$$|y| + \frac{|3x-4y|}{5} \leqq 1$$

ここで，$y=s$，$3x-4y=5t$ とおくと

$$(x,\ y) = s\left(\frac{4}{3},\ 1\right) + t\left(\frac{5}{3},\ 0\right),\quad |s|+|t| \leqq 1$$



D は 4 点 $\left(\frac{4}{3},\ 1\right)$，$\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$，$\left(-\frac{4}{3}, -1\right)$，$\left(-\frac{5}{3},\ 0\right)$ を頂点する平行四辺形の周およびその内部であり，右の図の斜線部分．

(2)

$$x+y = \left(\frac{4}{3}s + \frac{5}{3}t\right) + s = \frac{7}{3}s + \frac{5}{3}t$$

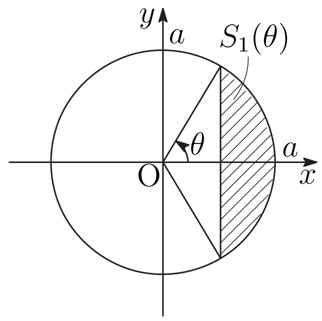
上式から，$x+y$ が最大となるとき，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$ であるから $(s+t \leqq 1)$

$$s=1,\ t=0 \quad \text{すなわち} \quad (x,\ y) = \left(\frac{4}{3},\ 1\right) \text{ のとき最大値 } \boldsymbol{\frac{7}{3}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $x = a\cos t$，$y = b\sin t$ より　　$\cos t = \dfrac{x}{a}$，$\sin t = \dfrac{y}{b}$

これを $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ に代入して　　$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$

(2) $a > 0$，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．$a\cos\theta \leqq x \leqq a$ において，円 $x^2 + y^2 = a^2$，直線 $x = a\cos\theta$ によって囲まれる部分の面積を $S_1(\theta)$ とすると



$$S_1(\theta) = \frac{1}{2}a^2{\cdot}2\theta - \frac{1}{2}a^2\sin 2\theta$$
$$= a^2\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$

$0 \leqq x \leqq a\cos\theta$ において，円 $x^2 + y^2 = a^2$，y 軸および $x = a\cos\theta$ によって，囲まれる部分の面積を $S_2(\theta)$ とすると

$$S_2(\theta) = \frac{1}{2}\pi a^2 - S_1(\theta) = a^2\left\{\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right\}$$

C は円 $x^2 + y^2 = a^2$ を x 軸をもとに y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍だけ拡大したものであるから

$$S(\theta) = S_2(\theta) \times \frac{b}{a} = \boldsymbol{ab\left\{\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right\}}$$

(3) (2) の結果から　　$\dfrac{S(\theta)}{\frac{\pi}{2} - \theta} = ab\left\{1 + \dfrac{\sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}\right\}$

よって　　$\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2} - 0} \frac{S(\theta)}{\frac{\pi}{2} - \theta} = \boldsymbol{2ab}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\qquad f(x) = ae^{2x},\ f'(x) = 2ae^{2x}$

曲線 $y = f(x)$ の点 $(b,\ f(b))$ における接線の方程式が $y = x$ であるから

$$f(b) = b, \quad f'(b) = 1 \quad \text{ゆえに} \quad ae^{2b} = b, \quad 2ae^{2b} = 1$$

これを解いて $\qquad \boldsymbol{a = \dfrac{1}{2e},\ b = \dfrac{1}{2}}$

(2) (1) の結果から $\qquad g(x) = f(x) - x = \dfrac{1}{2}e^{2x-1} - x$

これを微分すると $\quad g'(x) = e^{2x-1} - 1$

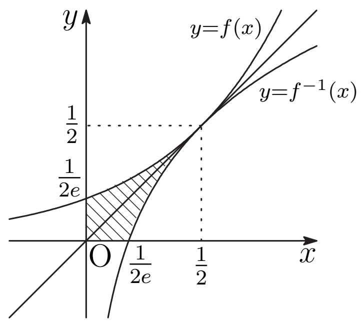
したがって，$g(x)$ の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{e}{2} - 1$

ここで $\quad g(1) - g(0) = \dfrac{e}{2} - 1 - \dfrac{1}{2e} = \dfrac{1}{2}\left(e - \dfrac{5}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{e}\right) > 0$

よって $\quad x = 1$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{e}{2} - 1}$，$x = \dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\mathbf{0}$

(3) 求める面積を S とすると，図の斜線部分であるから

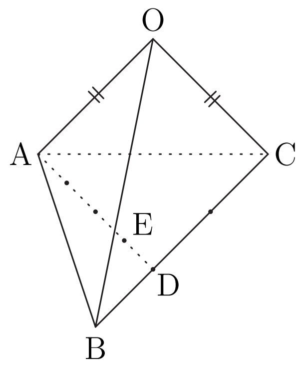


$$\begin{aligned}
\frac{S}{2} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \{f(x) - x\}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\,dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}e^{2x-1} - x\right) dx \\
&= \left[\ \frac{1}{4}e^{2x-1} - \frac{x^2}{2}\ \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4e}
\end{aligned}$$

よって $\qquad S = \boldsymbol{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2e}}$

$\boxed{5}$ (1)

$$\vec{e} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OD}})$$
$$= \frac{1}{4}\left\{\vec{a} + 3 \times \frac{2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}\right\}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}(\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c})}$$



(2) OE$\perp$AC より，$\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ であるから

$$4\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c})\cdot(\vec{c} - \vec{a})$$
$$= |\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 + 2(\vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b}) = 0$$

$\mathrm{OA} = \mathrm{OC}$ より，$|\vec{a}| = |\vec{c}|$ を上式に代入すると

$$2(\vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b}) = 0 \quad \text{よって} \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c}$$

(3) OE$\perp$BC より，$\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ であるから

$$4\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c})\cdot(\vec{c} - \vec{b})$$
$$= (\vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b}) + \vec{a}\cdot\vec{c} - 2|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = 0 \qquad \cdots(*)$$

$\mathrm{OA} = \mathrm{OC}$，$\mathrm{OA} : \mathrm{OB} = 2 : 1$ より，$|\vec{a}| : |\vec{b}| : |\vec{c}| = 2 : 1 : 2$ であるから

$$|\vec{b}|^2 = \frac{1}{4}|\vec{a}||\vec{c}|, \quad |\vec{c}|^2 = |\vec{a}||\vec{c}|$$

上式および (1) の結果を $(*)$ に代入すると

$$\vec{a}\cdot\vec{c} - \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{c}| + |\vec{a}||\vec{c}| = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|} = -\frac{1}{2}$$

$\vec{a}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta = -\frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{2}{3}\pi$$

よって　$\boldsymbol{\angle\mathrm{AOC} = \frac{2}{3}\pi}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2 - \dfrac{\beta}{\alpha} + 1 = 0$ より

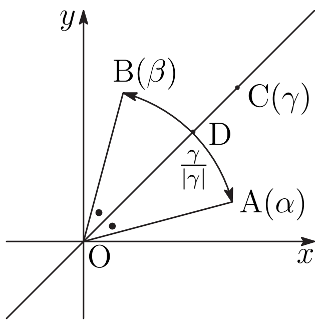
$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}$$

したがって　$\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| = 1$　ゆえに　$|\beta| = |\alpha|$，$\arg\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right) = \pm\dfrac{\pi}{3}$

よって，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB}$，$\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{3}$ より，$\triangle\mathrm{OAB}$ は正三角形である．

(2) 点 D を $\dfrac{\gamma}{|\gamma|}$ とすると

$$\frac{\gamma}{|\gamma|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$



右の図から 2 点 A，B は，点 D をそれぞれ原点 O を中心に $-\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転させたものであるから

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i} \\
\beta &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i}
\end{aligned}$$

解説 α，β は

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cos\frac{1}{12}\pi + i\sin\frac{1}{12}\pi = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i \\
\beta &= \cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) 求める確率は

$$\begin{aligned} P(Y \geqq 1) &= 1 - P(Y=0) \\ &= 1 - \frac{11}{6^2} = \mathbf{\frac{25}{36}} \end{aligned}$$

X(和を 5 で割った余り)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	0	1	2
2	3	4	0	1	2	3
3	4	0	1	2	3	4
4	0	1	2	3	4	0
5	1	2	3	4	0	1
6	2	3	4	0	1	2

Y(積を 5 で割った余り)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	0	1
2	2	4	1	3	0	2
3	3	1	4	2	0	3
4	4	3	2	1	0	4
5	0	0	0	0	0	0
6	1	2	3	4	0	1

(2) $X=2$，$Y=2$ となる事象をそれぞれ A，B とすると，上の表から

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{8}{36} + \frac{6}{36} - \frac{2}{36} = \frac{12}{36} = \mathbf{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

(3) $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{2}{36} \div \dfrac{8}{36} = \mathbf{\dfrac{1}{4}}$

$\boxed{\mathbf{8}}$ 箱 A，B の底面が合同な正方形であるから，その一辺を $2x$ cm とすると，箱 A，B の高さはそれぞれ $12-x$ cm，$18-x$ cm であるから

$$2x > 0,\quad 12-x>0,\quad 18-x>0 \quad \text{すなわち} \quad 0<x<12$$

2 つの箱の容積の和を V とすると

$$\begin{aligned} V &= (2x)^2(12-x) + (2x)^2(18-x) \\ &= 8x^2(15-x), \\ V' &= 24x(10-x) \end{aligned}$$

したがって，V の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	10	$\cdots$	(12)
V'		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	4000	$\searrow$	

よって，$x=10$ のとき，最大値 **4000 (cm³)**

$\boxed{9}$ (1)
$$\begin{aligned}&\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2(\alpha+\beta)\\&=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)+\frac{1}{2}(1-\cos 2\beta)+1-\cos^2(\alpha+\beta)\\&=2-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)\\&=2-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)\\&=2-\{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\}\cos(\alpha+\beta)\\&=2-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

よって　$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2(\alpha+\beta)+2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=2$

(2)
$$a=\log_{\frac{1}{4}}5=-\frac{1}{2}\log_2 5,\quad b=2\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{5}=-\log_2 5$$

$2^{ac}=5$ より　$ac=\log_2 5$　これと上の第 1 式から　$c=-2$

ゆえに　$a=\log_2\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$b=\log_2\dfrac{1}{5}$，$c=\log_2\dfrac{1}{4}$，　$\dfrac{1}{5}<\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

底 2 は 1 より大きいから　　$\boldsymbol{b<c<a}$

$\boxed{10}$ (1) $f(0)=c$，$f(1)=a+b+c$，$f(2)=4a+2b+c$ であるから

$$2a=f(0)-2f(1)+f(2),\quad 2b=-3f(0)+4f(1)-f(2)$$

$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$ はいずれも整数であるから，$2a$，$2b$ はともに整数である．

(2) (i) n が偶数のとき，$n=2m$ とおくと (m は整数)

$$f(n)=f(2m)=a(2m)^2+b(2m)+c=2a{\cdot}m^2+2b{\cdot}m+c$$

(1) の結果から，$2a$，$2b$，c は整数であるから，$f(n)$ は整数．

(ii) n が奇数のとき，$n=2m+1$ とおくと (m は整数)

$$\begin{aligned}f(n)=f(2m+1)&=a(2m+1)^2+b(2m+1)+c\\&=2a(2m^2+2m)+2b{\cdot}m+a+b+c\\&=2a(2m^2+2m)+2b{\cdot}m+f(0)\end{aligned}$$

同様に，$2a$，$2b$，$f(0)$ は整数であるから，$f(n)$ は整数．

別解 $f(n+1)-2f(n)+f(n-1)=2a$ より，$2a$，$f(0)$，$f(1)$ が整数であるから，すべての整数 n について，$f(n)$ は整数となる．

$\boxed{\mathbf{11}}$ (1) $\triangle$ADC と直線 PE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{m}{m+n}\cdot\frac{m}{n}=1$$

$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=n(m+n):m^2\cdots$ ① であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{n(m+n)}{m^2+mn+n^2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{n(m+n)}{m^2+mn+n^2}\cdot\frac{n\overrightarrow{\mathrm{AB}}+m\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{m+n}$$
$$=\frac{n}{m^2+mn+n^2}(n\overrightarrow{\mathrm{AB}}+m\overrightarrow{\mathrm{AC}})$$

A，B，C，P，Q，R の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ とすると

$$\vec{p}-\vec{a}=\frac{n}{m^2+mn+n^2}\{n(\vec{b}-\vec{a})+m(\vec{c}-\vec{a})\}$$
$$\vec{p}=\frac{m^2\vec{a}+n^2\vec{b}+mn\vec{c}}{m^2+mn+n^2}$$

A，B，C と P，Q，R の対称性により

$$\vec{q}=\frac{m^2\vec{b}+n^2\vec{c}+mn\vec{a}}{m^2+mn+n^2}, \qquad \vec{r}=\frac{m^2\vec{c}+n^2\vec{a}+mn\vec{b}}{m^2+mn+n^2}$$

ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\frac{m^2\overrightarrow{\mathrm{CA}}+n^2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+mn\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{m^2+mn+n^2}$$
$$=\frac{-m^2\overrightarrow{\mathrm{AC}}+n^2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+mn(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})}{m^2+mn+n^2}$$
$$=\frac{n-m}{m^2+mn+n^2}(n\overrightarrow{\mathrm{AB}}+m\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\frac{n^2-m^2}{m^2+mn+n^2}\overrightarrow{\mathrm{AD}} \quad \cdots ②$$

同様にして

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{n-m}{m^2+mn+n^2}(n\overrightarrow{\mathrm{BC}}+m\overrightarrow{\mathrm{BA}})=\frac{n^2-m^2}{m^2+mn+n^2}\overrightarrow{\mathrm{BE}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\frac{n-m}{m^2+mn+n^2}(n\overrightarrow{\mathrm{CA}}+m\overrightarrow{\mathrm{CB}})=\frac{n^2-m^2}{m^2+mn+n^2}\overrightarrow{\mathrm{CF}}$$

このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CF}}|$ であるから

$|\overrightarrow{\mathrm{RP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|$　よって　$\triangle$PQR は正三角形

(2) ① より
$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}}=\frac{n(m+n)}{m^2+mn+n^2}$$

② より
$$\frac{\mathrm{RP}}{\mathrm{AD}}=\frac{n^2-m^2}{m^2+mn+n^2}$$

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AD}}=\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}}-\frac{\mathrm{RP}}{\mathrm{AD}}=\frac{m(m+n)}{m^2+mn+n^2}$$

よって　$\mathrm{AR}:\mathrm{AP}=m:n$

$\boxed{\mathbf{12}}$ (1) 漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2-a_n}$ より

$$a_2=\frac{1}{2-a_1}=\frac{1}{2-\dfrac{q}{p}}=\boldsymbol{\frac{p}{2p-q}},$$

$$a_3=\frac{1}{2-a_2}=\frac{1}{2-\dfrac{p}{2p-q}}=\boldsymbol{\frac{2p-q}{3p-2q}},$$

$$a_4=\frac{1}{2-a_3}=\frac{1}{2-\dfrac{2p-q}{3p-2q}}=\boldsymbol{\frac{3p-2q}{4p-3q}}$$

(2) (1) の結果から

$$a_n=\frac{(n-1)p-(n-2)q}{np-(n-1)q} \quad \cdots(*)$$

と推定される．

［1］ $n=1$ のとき，$a_1=\dfrac{q}{p}$ となり，$(*)$ は成り立つ．

［2］ $n=k$ のとき

$$a_k=\frac{(k-1)p-(k-2)q}{kp-(k-1)q}$$

が成り立つと仮定すると

$$a_{k+1}=\frac{1}{2-a_k}=\frac{1}{2-\dfrac{(k-1)p-(k-2)q}{kp-(k-1)q}}=\frac{kp-(k-1)q}{(k+1)p-kq}$$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

［1］，［2］ より，すべての自然数 n について $(*)$ は成り立つ．

補足 与えられた漸化式の特性方程式 $x=\dfrac{1}{2-x}$ を解くと $x=1$

$$a_{n+1}-1=\frac{1}{2-a_n}-1=\frac{a_n-1}{2-a_n} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n-1}-1$$

したがって，$\left\{\dfrac{1}{a_n-1}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{a_1-1}$，公差 -1 の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n-1}=\frac{1}{a_1-1}-(n-1)=\frac{1}{\frac{q}{p}-1}-n+1=\frac{np-(n-1)q}{q-p}$$

ゆえに $a_n-1=\dfrac{q-p}{np-(n-1)q}$ よって $a_n=\dfrac{(n-1)p-(n-2)q}{np-(n-1)q}$