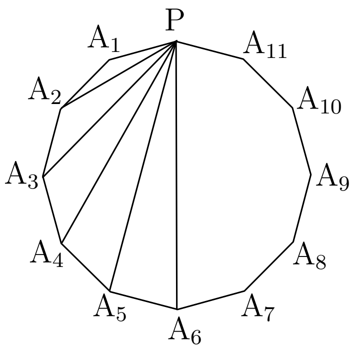
平成13年度　宮崎大学２次試験前期日程(数学問題)
工・教育文化・農学部　平成13年2月25日

- 工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 必答，$\boxed{6}$ 〜 $\boxed{8}$ から1題選択．数II・III・B(120分)
- 教育文化(中学[理系]，生活文化[生活環境コース])学部は，$\boxed{2}$, $\boxed{5}$ 必答，$\boxed{6}$ 〜 $\boxed{8}$ から1題選択．数II・B (90分)
- 教育文化(初等教育コース，中学[文系]，障害児コース])学部・農(食料生産科学・地域農業システム・獣医)学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{5}$ 必答，$\boxed{9}$ 〜 $\boxed{11}$ から1題選択．数II・A (90分)

$\boxed{\textbf{1}}$ 次の各問に答えよ．

(1) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$ と $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ の大小関係を調べよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

(2) 右の図の半径1の円に内接している正12角形である．図における線分 $\mathrm{PA_1}$，$\mathrm{PA_2}$，$\mathrm{PA_3}$，$\mathrm{PA_4}$，$\mathrm{PA_5}$ の長さを求めよ．



$\boxed{\textbf{2}}$ 平面上の3点 $\mathrm{A}(0,\ 2)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(4,\ 0)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ について，次の各問に答えよ．

(1) 外接円の中心と半径を求めよ．

(2) 内接円の中心と半径を求めよ．

三角形の3頂点を通る円をその三角形の**外接円**という． また，三角形の3辺すべてに接する円をその三角形の**内接円**という．

$\boxed{\textbf{3}}$ 関数 $f(x) = \dfrac{3}{2}e^{-x} + 2e^{x} - 3$ について，次の各問に答えよ．

(1) $f(x)$ の $-1 \leqq x \leqq 0$ における最小値を求めよ．

(2) 曲線 $C : y = f(x)$ の $x = 0$ における接線と $x = a$ における接線が直交している．このとき，次の(A)，(B)に答えよ．

(A) a の値を求めよ．

(B) x 軸，y 軸，直線 $x = a$ および曲線 C によって囲まれる部分の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $x \geqq 0$ で定義された関数

$$f_n(x) = x^2 - \frac{n}{n+1}x^{2+\frac{2}{n}} \quad (n \text{ は自然数})$$

について，次の各問に答えよ．

(1) 方程式 $f_n(x) = 0$ の正の解を求めよ．

(2) (1) で求めた正の解を x_n とするとき，$S_n = \displaystyle\int_0^{x_n} f_n(x)\,dx$ を n を用いて表せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nx_nS_n$ を求めよ．
ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (自然対数の底) である．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 放物線 $C : y = x^2$ とその上の点 $(a,\ a^2)$ $(0 < a \leqq 1)$ における接線を l とするとき，次の各問に答えよ．

(1) 接線 l の方程式を求めよ．

(2) 直線 $x = 0$，$x = 1$，放物線 C と接線 l で囲まれる部分で，$y \geqq 0$ を満たす部分の面積 $S(a)$ を求めよ．

(3) $S(a)$ の最小値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 相異なる 3 点 O，A，B に対し，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ が

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \quad \vec{a}\cdot\vec{b} \neq 0, \quad \vec{a}\cdot\vec{b} \neq 1, \quad \vec{a}\cdot\vec{b} \neq -1$$

を満たしているものとする．$t = \vec{a}\cdot\vec{b}$ とおくとき，次の各問に答えよ．ただし，記号 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ はベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を，また，$|\vec{a}|$ はベクトル $\vec{a}$ の大きさを表す．

(1) 直線 OB に関して，点 A と対称な点を C とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ と t を用いて表せ．

(2) 直線 OC に関して，点 A と対称な点を D とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と $\vec{b}$ が平行となるような t の値をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 整式 $F(x) = x^3 - x^2 + (k^2-1)x + k^2 + 1$ について，次の各問に答えよ．ただし，$k > 0$ とする．

(1) $F(x)$ は $x+1$ で割り切れることを示せ．また，$F(x) = 0$ の 2 つの虚数解を求めよ．

(2) 複素数平面において，$F(x) = 0$ の 2 つの虚数解を表す点を P，Q とし，実数解を表す点を R とする．このとき，次の (A)，(B) に答えよ．

(A) 3 点 P，Q，R を通る円の方程式を複素数 z を用いて表せ．

(B) $\angle\mathrm{PRQ} = 45^\circ$ であるとき，k の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ A 君と B 君はジャンケンをくり返し行うものとする．1 回当りに「石」,「はさみ」,「紙」を A 君は 1 : 2 : 3 の割合で，B 君は 2 : 1 : 2 の割合で，過去の勝敗とは独立に出す．なお，ジャンケンの勝敗は以下のルールによるものとする．

1) 「石」は「はさみ」に勝つ．

2) 「はさみ」は「紙」に勝つ．

3) 「紙」は「石」に勝つ．

4) 「石」と「石」,「はさみ」と「はさみ」,「紙」と「紙」のときは引き分けとする．

このとき，次の各問に答えよ．

(1) 1 回のジャンケンで A 君が勝つ確率を求めよ．

(2) 6 回ジャンケンを行ったとき，A 君の勝ちが 2 回，B 君の勝ちが 2 回，引き分けが 2 回である確率を求めよ．

(3) 900 回ジャンケンを行うとき，A 君が勝つ回数の期待値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ 次の各問に答えよ．

(1) $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$b = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とするとき，

$$a^3 + b^3,\ a^6 + b^6$$

の値を求めよ．

(2) $x > 0$，$y > 0$，$x + y = 1$ のとき，不等式

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geqq 9$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのはどのような場合か答えよ．

$\boxed{\mathbf{10}}$ 連続する自然数について，以下のような関係がある．

$$1+2=3 \qquad \cdots ①$$
$$4+5+6=7+8 \qquad \cdots ②$$
$$9+10+11+12=13+14+15 \qquad \cdots ③$$
$$\vdots$$

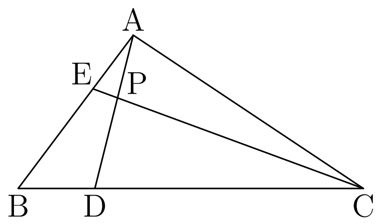
n 番目の式を ⓝ とし，その左辺の和を $S(n)$ で表す．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 4 番目の式 ④ と $S(4)$ を求めよ．

(2) n 番目の式 ⓝ を予想し，その等式が成り立つことを示せ．

$\boxed{\mathbf{11}}$ 右の図の三角形 ABC において，

$$\mathrm{AE}:\mathrm{EB}=1:a$$
$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=1:b$$



とする．ただし，$a>0$，$b>0$ である．このとき，次の各問に答えよ．

(1) AP : PD を a，b を用いて表せ．

(2) $\triangle\mathrm{APE}:\triangle\mathrm{ABC}$ を a，b を用いて表せ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1)

$$\begin{aligned}
&\log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4}{3}} - \log_{10}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{4}{3}(\log_{10}3 - \log_{10}2) - \frac{3}{2}(2\log_{10}2 - \log_{10}3) \\
&= \frac{1}{6}(17\log_{10}3 - 26\log_{10}2) = \frac{1}{6}(8.1107 - 7.826) > 0
\end{aligned}$$

したがって　$\log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4}{3}} > \log_{10}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$

底 10 は 1 より大きいから　$\boldsymbol{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4}{3}} > \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}$

(2) $\theta = 15^\circ$, 線分 PA_6 の中点を O とすると　$\angle\mathrm{POA}_k = 2k\theta$　$(k = 1, 2, 3, 4, 5)$

$\triangle\mathrm{OPA}_k$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}
\mathrm{PA}_k{}^2 &= \mathrm{OP}^2 + \mathrm{OA}_k{}^2 - 2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OA}_k\cos 2k\theta \\
&= 1^2 + 1^2 - 2\cdot1\cdot1\cos 2k\theta = 4\sin^2 k\theta
\end{aligned}$$

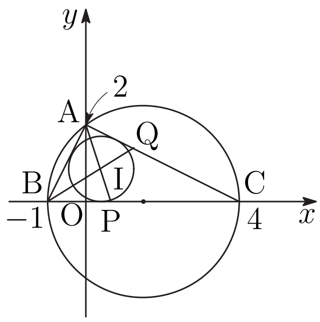
したがって　$\mathrm{PA}_k = 2\sin k\theta$

よって　$\mathrm{PA}_1 = 2\sin 15^\circ = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$,　$\mathrm{PA}_2 = 2\sin 30^\circ = \mathbf{1}$,

$\mathrm{PA}_3 = 2\sin 45^\circ = \boldsymbol{\sqrt{2}}$,　$\mathrm{PA}_4 = 2\sin 60^\circ = \boldsymbol{\sqrt{3}}$,

$\mathrm{PA}_5 = 2\sin 75^\circ = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\mathrm{AB}=\sqrt{5}$，$\mathrm{AC}=2\sqrt{5}$，$\mathrm{BC}=5$ であるから



$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\mathrm{BC}^2$$

したがって，△ABC は $\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$ の直角三角形であり，BC はこの三角形の外接円の直径である．よって，外接円の中心と半径は

$$\text{中心}\ \boldsymbol{\left(\frac{3}{2},\ 0\right)},\ \text{半径}\ \boldsymbol{\frac{5}{2}}$$

(2) ∠CAB，∠ABC の二等分線と BC，CA との交点をそれぞれ P，Q とすると

$$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=1:2,\quad \mathrm{CQ}:\mathrm{QA}=\mathrm{BC}:\mathrm{BA}=\sqrt{5}:1$$

したがって　P の座標は $\left(\dfrac{2\cdot(-1)+1\cdot 4}{1+2},\ 0\right)$　すなわち $\left(\dfrac{2}{3},\ 0\right)$

Q の座標は $\left(\dfrac{\sqrt{5}\cdot 0+1\cdot 4}{\sqrt{5}+1},\ \dfrac{\sqrt{5}\cdot 2+1\cdot 0}{\sqrt{5}+1}\right)$　すなわち $\left(\sqrt{5}-1,\ \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$

これから，2 直線 AP，BQ の方程式は，それぞれ

$$y=-3x+2,\quad y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}(x+1)$$

△ABC の内接円の中心を I とすると，I はこの 2 直線の交点であるから

$$\mathrm{I}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \frac{3\sqrt{5}-5}{2}\right)$$

また，内接円の半径は，I の y 座標に等しい．よって

$$\text{中心}\ \boldsymbol{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \frac{3\sqrt{5}-5}{2}\right)},\ \text{半径}\ \boldsymbol{\frac{3\sqrt{5}-5}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=\dfrac{3}{2}e^{-x}+2e^{x}-3$ を微分すると

$$f'(x)=-\frac{3}{2}e^{-x}+2e^{x}=\frac{4(e^{x})^{2}-3}{2e^{x}}$$

$f'(x)=0$ とすると　$e^{x}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　すなわち　$x=\log\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$e^{-1}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}<1$ であるから　　$-1<\log\dfrac{\sqrt{3}}{2}<0$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	-1	$\cdots$	$\log\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	極小	↗	

よって，求める最小値は

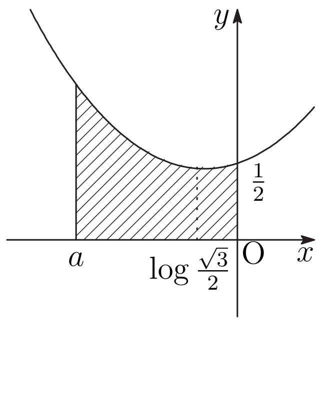
$$f\left(\log\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-3=\mathbf{2\sqrt{3}-3}$$

(2) (A) C の $x=0$ における接線と $x=a$ における接線が直交するから，
$f'(0)f'(a)=-1$ より

$$\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}e^{-a}+2e^{a}\right)=-1\quad\text{すなわち}\quad(2e^{a}-1)(2e^{a}+3)=0$$

$2e^{a}+3\neq0$ であるから　$e^{a}=\dfrac{1}{2}$　よって　$\boldsymbol{a=-\log 2}$

(B) 求める面積を S とすると



$$\begin{aligned}S&=\int_a^0\left(\frac{3}{2}e^{-x}+2e^{x}-3\right)dx\\&=\Big[-\frac{3}{2}e^{-x}+2e^{x}-3x\Big]_a^0\\&=\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{2}e^{-a}+2e^{a}-3a\right)\\&=\frac{1}{2}-\left\{-\frac{3}{2}\cdot2+2\cdot\frac{1}{2}-3(-\log 2)\right\}\\&=\mathbf{\frac{5}{2}-3\log 2}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f_n(x)=x^2-\dfrac{n}{n+1}x^{2+\frac{2}{n}}$, $f_n(x)=0$ より $\quad x^2\left(1-\dfrac{n}{n+1}x^{\frac{2}{n}}\right)=0$

$x>0$ のとき $\ x^{\frac{2}{n}}=\dfrac{n+1}{n}$ すなわち $\boldsymbol{x=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}$

(2) $x_n=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$

$$\begin{aligned}
S_n&=\int_0^{x_n}f_n(x)\,dx=\int_0^{x_n}\left(x^2-\frac{n}{n+1}x^{2+\frac{2}{n}}\right)dx\\
&=\left[\ \frac{1}{3}x^3-\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n}{3n+2}x^{3+\frac{2}{n}}\ \right]_0^{x_n}\\
&=\frac{1}{3}{x_n}^3\left\{1-\frac{3n^2}{(n+1)(3n+2)}{x_n}^{\frac{2}{n}}\right\}\\
&=\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{3}{2}n}\left\{1-\frac{3n^2}{(n+1)(3n+2)}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)\right\}\\
&=\boldsymbol{\frac{2}{3(3n+2)}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{3}{2}n}}
\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}
nx_{x_n}S_n&=n\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{2}{3(3n+2)}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{3}{2}n}\\
&=\frac{2n}{3(3n+2)}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}\\
&=\frac{2}{3\left(3+\dfrac{2}{n}\right)}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^2
\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)=3$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ であるから

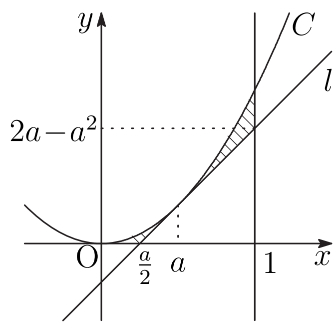
$$\lim_{n\to\infty}nx_nS_n=\boldsymbol{\frac{2}{9}e^2}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$

l は点 $(a,\ a^2)$ を通り，傾き $2a$ の直線であるから

$$y-a^2=2a(x-a)\quad すなわち\quad \boldsymbol{y=2ax-a^2}$$

(2) l，x 軸，直線 $x=1$ で囲まれた図形の面積を T とすると



$$T=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{2}\right)(2a-a^2)$$
$$=\frac{a^3}{4}-a^2+a$$

よって　$S(a)=\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx-T$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1-\left(\frac{a^3}{4}-a^2+a\right)$$
$$=\boldsymbol{-\frac{1}{4}a^3+a^2-a+\frac{1}{3}}$$

(3) (2) の結果から

$$S'(a)=-\frac{3}{4}a^2+2a-1=-\frac{1}{4}(3a-2)(a-2)$$

$S(a)$ の増減表は，次のようになる．

a	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	$\frac{1}{27}$	↗	

よって　$a=\dfrac{2}{3}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{27}}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\vec{b}$ に垂直なベクトルの 1 つを $\overrightarrow{m}$ とすると

$$\overrightarrow{m}=|\vec{b}|^2\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}=\vec{a}-t\vec{b} \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a}=t\vec{b}+\overrightarrow{m}$$

よって
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=t\vec{b}-\overrightarrow{m}\\&=t\vec{b}-(\vec{a}-t\vec{b})=\boldsymbol{-\vec{a}+2t\vec{b}}\end{aligned}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に垂直なベクトルの 1 つを $\vec{n}$ とすると

$$\vec{n}=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2\overrightarrow{\mathrm{OA}}-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad \cdots①$$

ここで
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2&=|-\vec{a}+2t\vec{b}\,|^2=|\vec{a}|^2-4t\vec{a}\cdot\vec{b}+4t^2|\vec{b}|^2\\&=1^2-4t\cdot t+4t^2\cdot1^2=1\\\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=\vec{a}\cdot(-\vec{a}+2t\vec{b})\\&=-|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}=2t^2-1\end{aligned}$$

ゆえに
$$\begin{aligned}\vec{n}&=\vec{a}-(2t^2-1)(-\vec{a}+2t\vec{b})\\&=2t^2\vec{a}-2t(2t^2-1)\vec{b}\end{aligned}$$

① より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2t^2-1)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\vec{n}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}}&=(2t^2-1)\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\vec{n}\\&=(2t^2-1)(-\vec{a}+2t\vec{b})-\{2t^2\vec{a}-2t(2t^2-1)\vec{b}\}\\&=(1-4t^2)\vec{a}+4t(2t^2-1)\vec{b}\end{aligned}$$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}/\!/\vec{b}$ であるから

$$1-4t^2=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{t=\pm\frac{1}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $F(x)=x^3-x^2+(k^2-1)x+k^2+1$ について，$F(-1)=0$ であるから，$F(x)$ は $x+1$ で割り切れる．したがって

$$F(x)=(x+1)(x^2-2x+k^2+1)$$

$F(x)=0$ の 2 つの虚数解は，$x+1\neq 0$ であるから

$$x^2-2x+k^2+1=0 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)^2+k^2=0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{x=1\pm ki}$

(2) (A) R は $F(x)=0$ の実数解を表す点であるから　R(-1)

P，Q は $F(x)=0$ の虚数解を表す点であるから，$\alpha=1+ki$，$\beta=1-ki$ とおき，P(α)，Q(β) とする．求める円の中心を C(γ) とすると，C は PQ の垂直二等分線上にあるから，γ は実数である．RC $=$ PC より

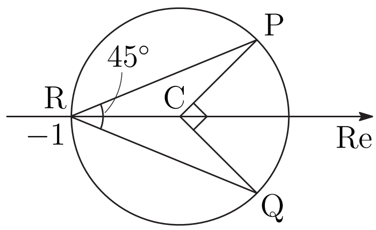
$$|\gamma-(-1)|^2=|\gamma-\alpha|^2 \quad \text{ゆえに} \quad |\gamma+1|^2=|(\gamma-1)-ki\,|^2$$

したがって　$(\gamma+1)^2=(\gamma-1)^2+k^2$　　これを解いて　$\gamma=\dfrac{k^2}{4}$

半径は　　RC $=|\gamma-(-1)|=\dfrac{k^2}{4}+1$

よって，求める円の方程式は　　$\boldsymbol{\left|z-\dfrac{k^2}{4}\right|=\dfrac{k^2}{4}+1}$

(B) $\angle$PRQ $=45^\circ$ のとき，$\angle$PCQ $=90^\circ$ である．CP は C を中心に CQ を 90° 回転させたものであるから



$$\alpha-\gamma=i(\beta-\gamma)$$

$$(1+ki)-\frac{k^2}{4}=i\left\{(1-ki)-\frac{k^2}{4}\right\}$$

$$1-\frac{k^2}{4}+ki=k+\left(1-\frac{k^2}{4}\right)i$$

したがって　$1-\dfrac{k^2}{4}=k$　　すなわち　$k^2+4k-4=0$

$k>0$ に注意してこれを解くと　　$\boldsymbol{k=2\sqrt{2}-2}$

$\boxed{8}$ (1) A 君が勝つ場合の組合せは，次の場合である．

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = (\text{石，さはみ}), (\text{はさみ，紙}), (\text{紙，石})$$

このとき，それぞれの場合の確率から，求める確率を p とすると

$$p = \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \mathbf{\frac{11}{30}}$$

(2) (1) と同様に，B 君が勝つ場合の組合せ

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = (\text{はさみ，石}), (\text{紙，はさみ}), (\text{石，紙})$$

について，それぞれの場合の確率から，求める確率を q とすると

$$q = \frac{2}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{9}{30}$$

引き分けになる確率を r とすると

$$r = 1 - (p + q) = 1 - \left(\frac{11}{30} + \frac{9}{30}\right) = \frac{1}{3}$$

よって，求める確率は

$$\frac{6!}{2!2!2!} p^2 q^2 r^2 = 90(pqr)^2 = 90\left(\frac{11}{300}\right)^2 = \mathbf{\frac{121}{1000}}$$

(3) (1) の結果から，求める期待値は

$$900p = 900 \times \frac{11}{30} = \mathbf{330}\ (\text{回})$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$b=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ より　　$a+b=1$，$ab=-1$

よって　　$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=1^3-3\cdot(-1)\cdot 1=\mathbf{4}$

$$a^6+b^6=(a^3+b^3)^2-2(ab)^3=4^2-2(-1)^3=\mathbf{18}$$

(2) $x+y=1$ に注意して

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=1+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{xy}$$
$$=1+\frac{x+y}{xy}+\frac{1}{xy}=1+\frac{2}{xy}\quad\cdots①$$

$x>0$，$y>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係により

$$1=x+y\geqq 2\sqrt{xy}\quad\text{ゆえに}\quad\frac{2}{xy}\geqq 8\quad\cdots②$$

①，② より　　$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\geqq 9$

また，等号が成立するのは，② より，次のときである．

$$x=y\quad\text{すなわち}\quad x=y=\frac{1}{2}$$

$\boxed{10}$ (1) ④ は　$\mathbf{16+17+18+19+20=21+22+23+24}$

よって　$\boldsymbol{S(4)=90}$

(2) ⓝ は

$$\boldsymbol{n^2+(n^2+1)+\cdots+(n^2+n)=(n^2+n+1)+\cdots+(n^2+2n)}$$

$$(\text{左辺})=\sum_{k=1}^{n+1}(n^2-1+k)$$
$$=(n^2-1)(n+1)+\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$
$$=\frac{1}{2}(n+1)\{2(n^2-1)+(n+2)\}=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$
$$(\text{右辺})=\sum_{k=1}^{n}(n^2+n+k)$$
$$=n^2(n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

よって，ⓝ は成り立つ．

$\boxed{\mathbf{11}}$ (1) △ABD および直線 EP について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EA}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{b}{b+1}\cdot\frac{a}{1}=1$$

よって　　$\mathbf{AP:PD}=\boldsymbol{(b+1):ab}$

(2) $$\frac{\triangle\mathrm{ABD}}{\triangle\mathrm{ABC}}=\frac{1}{b+1},\quad \frac{\triangle\mathrm{APE}}{\triangle\mathrm{ABD}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}}=\frac{1}{a+1}\cdot\frac{b+1}{(b+1)+ab}$$

上の 2 式の辺々を掛けると　$$\frac{\triangle\mathrm{APE}}{\triangle\mathrm{ABC}}=\frac{1}{(a+1)(ab+b+1)}$$

よって　　$\boldsymbol{\triangle\mathrm{APE}:\triangle\mathrm{ABC}=1:(a+1)(ab+b+1)}$