平成 28 年度　九州工業大学２次試験後期日程 (数学問題)
工学部　平成 28 年 3 月 12 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

1 関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x$，$g_n(x)=\sqrt{x}+a_n\ (n=1,2,3,\cdots)$ がある．直線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g_n(x)$ が $x=(n+1)^2$ で交わるとき，次に答えよ．ただし，座標平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という．

(1) a_n を求めよ．

(2) m を自然数，k を $0\leqq k\leqq m$ をみたす整数とする．$k<f(x)$，$x\leqq 2m$ を同時にみたす整数 x の個数を m，k を用いて表せ．

(3) 自然数 m に対して，座標平面上で $y<f(x)$，$y\geqq 0$，$x\leqq 2m$ を同時に満たす格子点の個数 b_m を m を用いて表せ．

(4) 自然数 m に対して，座標平面上で $y\leqq g_1(x)$，$y\geqq 0$，$x\leqq m^2$ を同時にみたす格子点の個数 c_m を m を用いて表せ．

(5) 自然数 m に対して，座標平面上で $y\geqq f(x)$，$y\leqq g_{2m-1}(x)$，$x\geqq 0$ を同時にみたす格子点の個数を d_m とするとき，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{d_m}{m^4}$ を求めよ．

2 複素数平面上の点 z が単位円の周上を動くとき，次に答えよ．ただし，i は虚数単位を表し，$|w|$，$\overline{w}$ はそれぞれ複素数 w の絶対値と共役複素数を表す．

(1) $w_1=\dfrac{1}{z^2}-z^2-(5-i)$ とする．$|w_1|$ の最小値と最大値を求めよ．

(2) $w_2=\dfrac{1}{z^4}+\dfrac{1}{z^2}+z^2+z^4-(5-i)$ とする．点 w_2 が描く図形を複素数平面上に図示せよ．

(3) $w_3=\dfrac{1}{\overline{z}^4}+\dfrac{1}{\overline{z}^2}+\overline{z}^2+\overline{z}^4-(5-i)$ とする．条件 $|w_3|\leqq\sqrt{26}$ をみたす点 z 全体を複素数平面上に図示せよ．

3 $r>1$ とし，a は $0<a<r$ をみたすとする．原点を O とする座標平面上に点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ と点 $\mathrm{P}(x,\ \sqrt{r^2-x^2})\ (-r<x<r)$ がある．次に答えよ．

(1) $\cos\angle\mathrm{OPA}$ を a，r，x を用いて表せ．

(2) $(\cos\angle\mathrm{OPA})^2$ を x の関数と考え，その関数を $f(x)$ とおく．$f(x)$ の最小値を a，r を用いて表せ．また，$f(x)$ が最小になるときの x を x_0 とする．x_0 を a を用いて表せ．

(3) (2) で求めた x_0 に対して，点 $(x_0,\ \sqrt{r^2-x_0^2})$ を P_0 とする．$a=r-1$ のとき，$\dfrac{\pi}{6}<\angle\mathrm{OP_0A}<\dfrac{\pi}{3}$ が成り立つような r の値の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\log x\ (1 \leqq x \leqq e^4)$ について，次に答えよ．ただし，対数は自然対数を表し，$e=2.71\cdots$ は自然対数の底を表す.

(1) 関数 $f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べて，そのグラフをかけ.

(2) 曲線 $y=f(x)$ の点 $(e^{\frac{3}{2}},\ f(e^{\frac{3}{2}}))$ における接線 l の方程式を $y=px+q$ とする．p，q を求めよ．さらに，次の不等式を示せ.

$$\frac{1}{x}\log x \geqq px+q \quad (x \geqq e^{\frac{3}{2}})$$

(3) (2) で定めた接線 l と x 軸の交点を $(a,\ 0)$ とする．曲線 $y=f(x)$ と接線 l および直線 $x=a$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ と曲線 $y=\sqrt{x}+a_n$ の交点の x 座標が $x=(n+1)^2$ であるから $(n=1,2,3,\cdots)$

$$\frac{1}{2}(n+1)^2=\sqrt{(n+1)^2}+a_n \quad ゆえに \quad \boldsymbol{a_n=\frac{1}{2}(n^2-1)}$$

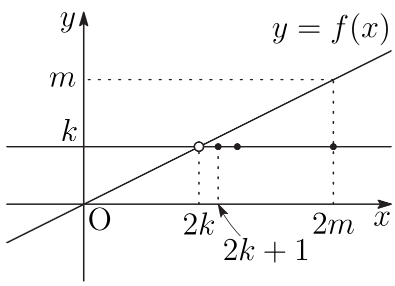
(2) $k<f(x)$，$x \leqq 2m$ より

$$k<\frac{1}{2}x,\ x \leqq 2m \quad ゆえに \quad 2k<x \leqq 2m$$

これをみたす整数 x は　$2k+1,\ 2k+2, \cdots, 2m$

よって，整数 x の個数は　$2m-(2k+1)+1=\boldsymbol{2m-2k}$ (個)

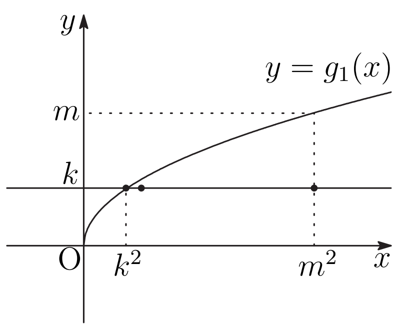
(3) (2) は，直線 $y=k$ 上にある格子点の個数であることから



$$\begin{aligned} b_m &= \sum_{k=0}^{m}(2m-2k)=2\sum_{k=0}^{m}(m-k) \\ &= 2\sum_{j=1}^{m} j=\boldsymbol{m(m+1)} \end{aligned}$$

(4) (1) の結果から　$a_1=0$，$g_1(x)=\sqrt{x}$

直線 $y=k$ $(0 \leqq k \leqq m)$ 上で



$$k \leqq g_1(x), \quad x \leqq m^2$$

を同時にみたす格子点の個数は

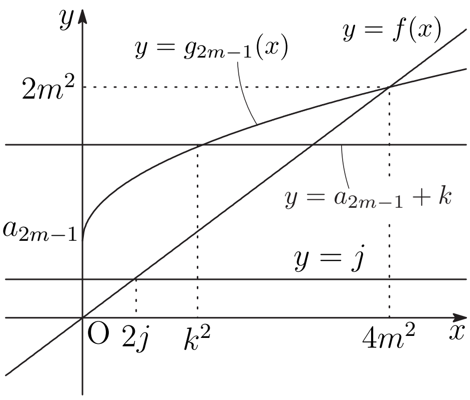
$$m^2-k^2+1$$

よって

$$\begin{aligned} c_m &= \sum_{k=0}^{m}(m^2-k^2+1)=\sum_{k=0}^{m}(m^2+1)-\sum_{k=1}^{m}k^2 \\ &= (m+1)(m^2+1)-\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) \\ &= \frac{1}{6}(m+1)\{6(m^2+1)-m(2m+1)\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}(m+1)(4m^2-m+6)} \end{aligned}$$

(5) (1) の結果から

$$a_{2m-1} = \frac{1}{2}\{(2m-1)^2 - 1\}$$
$$= 2m^2 - 2m$$



$y = f(x)$，$y \leqq g_{2m-1}(x)$，$x \leqq m^2$ を同時に満たす領域における格子点を 2 直線

$$y = j\ (0 \leqq j \leqq 2m^2),$$
$$y = a_{2m-1} + k\ (1 \leqq k \leqq 2m)$$

上の格子点の個数に着目すると

$$d_m = \sum_{j=0}^{2m^2}(2j+1) - \sum_{k=1}^{2m} k^2$$
$$= 1 + \sum_{j=1}^{2m^2}(2j+1) - \frac{1}{6}\cdot 2m(2m+1)(2\cdot 2m+1)$$
$$= 1 + 2m^2(2m^2+1) + 2m^2 - \frac{1}{3}m(2m+1)(4m+1)$$
$$= (2m^2+1)^2 - \frac{1}{3}m(2m+1)(4m+1)$$

ゆえに $\quad \dfrac{d_m}{m^4} = \left(2 + \dfrac{1}{m^2}\right)^2 - \dfrac{1}{3m}\left(2 + \dfrac{1}{m}\right)\left(4 + \dfrac{1}{m}\right)$

よって $\quad \boldsymbol{\lim_{m\to\infty} \dfrac{d_m}{m^4}} = 4$

2 (1) 点 z は複素数平面上の単位円の周上を動くので $z = \cos\theta + i\sin\theta$ とおくと

$$\frac{1}{z} = \overline{z} = \cos\theta - i\sin\theta$$

ゆえに $\quad \dfrac{1}{z^2} - z^2 = (\cos\theta - i\sin\theta)^2 - (\cos\theta + i\sin\theta)^2$

$$= (\cos 2\theta - 2i\sin 2\theta) - (\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$
$$= -2i\sin 2\theta$$

したがって $\quad w_1 = \dfrac{1}{z^2} - z^2 - (5 - i) = -5 + (1 - 2\sin 2\theta)i$

$$|w_1|^2 = 25 + (1 - 2\sin 2\theta)^2$$

$-1 \leqq \sin 2\theta \leqq 1$ より，$-1 \leqq 1 - \sin 2\theta \leqq 3$ であるから

$$25 \leqq |w_1|^2 \leqq 34$$

よって　　$|w_1|$ の最大値は $\boldsymbol{\sqrt{34}}$，最小値は $\mathbf{5}$

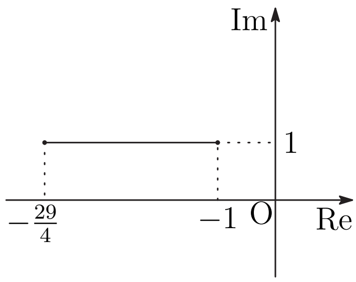
(2) $t = z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ とおくと

$$t = z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 = (2\cos\theta)^2 - 2$$

$$z^4 + \frac{1}{z^4} = \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^2 - 2 = t^2 - 2$$

$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるから　$-2 \leqq t \leqq 2$　$\cdots$ ①

$$\begin{aligned} w_2 &= z^4 + \frac{1}{z^4} + z^2 + \frac{1}{z^2} - (5 - i) \\ &= (t^2 - 2) + t - (5 - i) \\ &= t^2 + t - 7 + i \quad \cdots ② \\ &= \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{29}{4} + i \end{aligned}$$



① より，右の図のように，w_2 は 2 点 $-\dfrac{29}{4} + i$ と $-1 + i$ を結ぶ線分 (両端を含む) を描く．

(3) $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$ であるから　$w_3 = w_2$

(2) の図および ② から，$|w_3| \leqq \sqrt{26}$ となるのは，$|-5 + i| = \sqrt{26}$ より

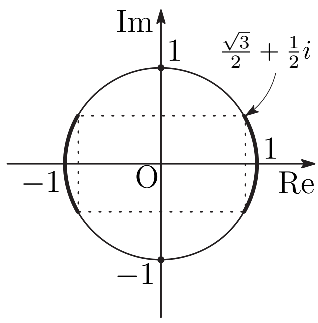
$$-5 \leqq t^2 - t - 7 \leqq -1 \quad これを解いて \quad t = -2,\ 1 \leqq t \leqq 2$$

$t = (2\cos\theta)^2 - 2$ であるから

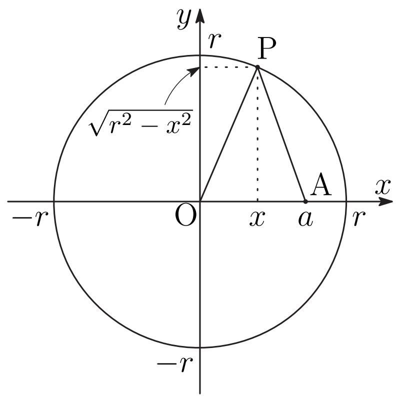
$$\cos\theta = 0,\ 3 \leqq (2\cos\theta)^2 \leqq 4$$

すなわち　　$-1 \leqq \cos\theta \leqq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\theta = 0$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \cos\theta \leqq 1$

よって，点 z は次の図の複素数平面上を描く．



$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) A$(a,\ 0)$，P$(x,\ \sqrt{r^2-x^2})$ より



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PO}} &= (-x, -\sqrt{r^2-x^2})\\ \overrightarrow{\mathrm{PA}} &= (a-x, -\sqrt{r^2-x^2})\\ |\overrightarrow{\mathrm{PO}}|^2 &= x^2+(r^2-x^2)=r^2\\ |\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2 &= (a-x)^2+(r^2-x^2)\\ &= r^2+a^2-2ax\\ \overrightarrow{\mathrm{PO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}} &= -x(a-x)+r^2-x^2\\ &= r^2-ax\end{aligned}$$

したがって　$\cos\angle\mathrm{OPA}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PO}}||\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}=\boldsymbol{\dfrac{r^2-ax}{r\sqrt{r^2+a^2-2ax}}}$

(2) (1) の結果から　$f(x)=(\cos\angle\mathrm{OPA})^2=\dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{(r^2-ax)^2}{r^2+a^2-2ax}$

これを x で微分すると

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{r^2}\cdot\frac{-2a(r^2-ax)(r^2+a^2-2ax)-(r^2-ax)^2(-2a)}{(r^2+a^2-2ax)^2}\\ &= \frac{2a(r^2-ax)\{-(r^2+a^2-2ax)+(r^2-ax)\}}{r^2(r^2+a^2-2ax)^2}=\frac{2a^2(r^2-ax)(x-a)}{r^2(r^2+a^2-2ax)^2}\end{aligned}$$

$0<a<r$，$-r<x<r$ より，$-r^2<ax<r^2$ であるから　$r^2-ax>0$

したがって，$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

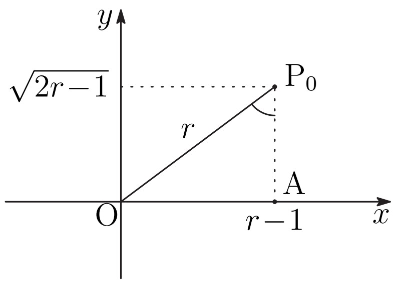
x	(0)	$\cdots$	a	$\cdots$	(r)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

ゆえに　$\boldsymbol{x_0=a}$　このとき，最小値は　$f(a)=\boldsymbol{\dfrac{r^2-a^2}{r^2}}$

(3) (2) の結果から　P$_0(a,\ \sqrt{r^2-a^2})$

$a=r-1$ のとき $(r>1)$

A$(r-1,\ 0)$，P$_0(r-1,\ \sqrt{2r-1})$



右の図から　$\sin\angle\mathrm{OP_0A}=\dfrac{r-1}{r}$

$\dfrac{\pi}{6}<\angle\mathrm{OP_0A}<\dfrac{\pi}{3}$ のとき

$\dfrac{1}{2}<\dfrac{r-1}{r}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　これを解いて　$\boldsymbol{2<r<2(2+\sqrt{3})}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=\dfrac{1}{x}\log x\ (1 \leqq x \leqq e^4)$ より

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'\log x+\frac{1}{x}(\log x)'=\frac{1}{x^2}(1-\log x)$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{x^2}\right)'(1-\log x)+\frac{1}{x^2}(1-\log x)'=\frac{1}{x^3}(2\log x-3)$$

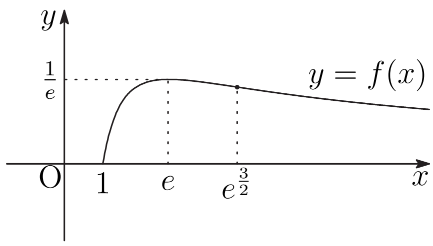
したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$	e^4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大 $\frac{1}{e}$	$\searrow$	変曲点 $\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	$\searrow$	$\frac{4}{e^4}$

よって　$\boldsymbol{x=e}$ のとき極大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{e}}$ をとる．

変曲点は　$\left(\boldsymbol{e^{\frac{3}{2}},\ \dfrac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}}\right)$

グラフの概形は，右の図のようになる．



(2) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(e^{\frac{3}{2}},\ f(e^{\frac{3}{2}}))$ における接線の方程式は

$$y-f(e^{\frac{3}{2}})=f'(e^{\frac{3}{2}})(x-e^{\frac{3}{2}})\quad \text{ゆえに}\quad y=f'(e^{\frac{3}{2}})(x-e^{\frac{3}{2}})+f(e^{\frac{3}{2}})$$

このとき，$px+q=f'(e^{\frac{3}{2}})(x-e^{\frac{3}{2}})+f(e^{\frac{3}{2}})\cdots$ ① であるから

$$p=f'(e^{\frac{3}{2}})=\boldsymbol{-\frac{1}{2}e^{-3}}$$

$$q=f(e^{\frac{3}{2}})-e^{\frac{3}{2}}f'(e^{\frac{3}{2}})=\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}-e^{\frac{3}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-3}\right)=\boldsymbol{2e^{-\frac{3}{2}}}$$

ここで　$f(x)-f(e^{\frac{3}{2}})=\displaystyle\int_{e^{\frac{3}{2}}}^{x}f'(t)\,dt=-\int_{e^{\frac{3}{2}}}^{x}(x-t)'f'(t)\,dt$

$$=-\Big[\,(x-t)f'(t)\,\Big]_{e^{\frac{3}{2}}}^{x}+\int_{e^{\frac{3}{2}}}^{x}(x-t)f''(t)\,dt$$

$$=(x-e^{\frac{3}{2}})f'(e^{\frac{3}{2}})+\int_{e^{\frac{3}{2}}}^{x}(x-t)f''(t)\,dt$$

上式および ① から　$f(x)-(px+q)=\displaystyle\int_{e^{\frac{3}{2}}}^{x}(x-t)f''(t)\,dt \geqq 0\quad (x \geqq e^{\frac{3}{2}})$

よって　$\dfrac{1}{x}\log x \geqq px+q\quad (x \geqq 0)$

(3) (2) で求めた p，q の値から，接線 l の方程式は

$$y = -\frac{1}{2}e^{-3}x + 2e^{-\frac{3}{2}}$$

l と y 軸との交点の x 座標 a は

$$-\frac{1}{2}e^{-3}a + 2e^{-\frac{3}{2}} = 0 \quad \text{すなわち} \quad a = 4e^{\frac{3}{2}}$$

よって

$$\begin{aligned} S &= \int_{e^{\frac{3}{2}}}^{4e^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{1}{x}\log x - \left(-\frac{1}{2}e^{-3}x + 2e^{-\frac{3}{2}} \right) \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}(\log x)^2 + \frac{1}{4}e^{-3}x^2 - 2e^{-\frac{3}{2}}x \right]_{e^{\frac{3}{2}}}^{4e^{\frac{3}{2}}} \\ &= \mathbf{2(\log 2)^2 + 3\log 2 - \frac{9}{4}} \end{aligned}$$