

## 平成 28 年度 九州工業大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

## 数 I・II・III・A・B (120 分)

工学部 平成 28 年 2 月 25 日

## 問題 1 2 3 4

1 四面体 OABC の面はすべて合同であり,  $OA = 5$ ,  $OB = 8$ ,  $AB = 7$  である.  
 $\vec{a} = \vec{OA}$ ,  $\vec{b} = \vec{OB}$ ,  $\vec{c} = \vec{OC}$  として, 次に答えよ.

- (1) 内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{c}$  および  $\vec{c} \cdot \vec{a}$  を求めよ.
- (2) 3 点 O, A, B の定める平面を  $\alpha$  とし,  $\alpha$  上の点 H を直線 CH と  $\alpha$  が垂直になるように選ぶ.  $\vec{OH}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を用いて表せ.
- (3) (2) の点 H に対して, 線分 CH の長さを求めよ.
- (4) 四面体 OABC の体積  $V_1$  を求めよ. また, 辺 OC の中点を D とし, さらに辺 OB 上に点 E を  $AE + ED$  が最小となるようにとる. このとき, 四面体 OAED の体積  $V_2$  を求めよ.

2  $s > 0$ ,  $t > 0$  とする. 正の数からなる 2 つの数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  は初項と第 2 項が  $a_1 = b_1 = s$ ,  $a_2 = b_2 = t$  であり, すべての自然数  $n$  に対して

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}, \quad b_{n+2} = \sqrt{b_{n+1}b_n}$$

をみたすとする. 次に答えよ.

- (1)  $a_3$ ,  $b_3$ ,  $a_4$ ,  $b_4$  を  $s$ ,  $t$  を用いて表せ.
- (2) 自然数  $n$  に対して,  $c_n = a_{n+1} - a_n$  とおく. 数列  $\{c_n\}$  は等比数列であることを示し, 一般項を求めよ. さらに, 数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ.
- (3) 自然数  $n$  に対して,  $d_n = \log b_n$  とおく. 数列  $\{d_n\}$  の一般項を求めよ. さらに, 数列  $\{b_n\}$  の一般項を  $s$  の累乗と  $t$  の累乗を用いて表せ. ただし, 対数は自然対数とする.
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  と  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  を求めよ.
- (5)  $t = s$  は  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  であるための必要十分条件であることを示せ.

**3**  $a < 0$ ,  $b$  を実数とする. 楕円  $C: x^2 + 4y^2 = 4$  と直線  $l: y = ax + b$  が異なる 2 個の共有点  $P(x_1, y_1)$ ,  $Q(x_2, y_2)$  ( $x_1 < x_2$ ) を持つとし,  $l$  に平行な直線  $m$  が第 1 象限の点  $A$  において  $C$  と接しているとする. 次に答えよ.

- (1)  $b$  の値の範囲を  $a$  を用いて表せ.
- (2) 直線  $m$  の方程式を  $a$  を用いて表せ.
- (3)  $x_2 - x_1$  を  $a$ ,  $b$  を用いて表せ.
- (4) 三角形  $APQ$  の面積  $S$  を  $a$ ,  $b$  を用いて表せ.
- (5)  $b$  が (1) で求めた範囲を動くとき, (4) で求めた  $S$  の最大値を求めよ.

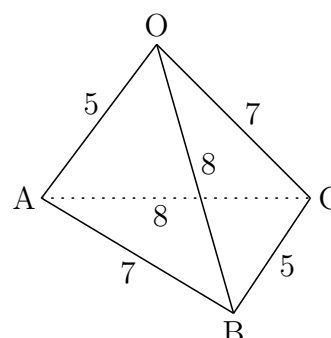
**4** 点  $A(1, 0)$  および点  $P(\sqrt{3}\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta)$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ ) がある.  $x$  軸に関して点  $P$  と対称な点を  $Q$  とし, 2 点  $P$ ,  $A$  を通る直線を  $l$ , 2 点  $O$ ,  $Q$  を通る直線を  $m$  とする. 次に答えよ. ただし,  $O$  は原点を表す.

- (1)  $\sqrt{3}\cos\theta > 1$  を示せ.
- (2) 直線  $l$  の方程式と直線  $m$  の方程式を  $\theta$  を用いて表せ.
- (3) 直線  $l$  と直線  $m$  の交点  $R$  の座標を  $\theta$  を用いて表せ.
- (4) 三角形  $PAQ$  の面積を  $S$  とする.  $\theta$  が変化するとき,  $S$  の最大値とそのときの  $\theta$  の値を求めよ.
- (5)  $\theta$  が (4) で求めた値をとるとき, 2 直線  $l$ ,  $m$  および曲線  $x^2 + y^2 = 3$  ( $x \geq \sqrt{3}\cos\theta$ ) で囲まれた図形を  $y$  軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積  $V$  を求めよ.

## 解答例

1 (1) 余弦定理により

$$\begin{aligned}\cos \angle AOB &= \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} \\ \cos \angle BOC &= \frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2OB \cdot OC} \\ \cos \angle COA &= \frac{OC^2 + OA^2 - CA^2}{2OC \cdot OA}\end{aligned}$$



したがって

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= OA \cdot OB \cos \angle AOB = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2) \\ &= \frac{1}{2}(5^2 + 8^2 - 7^2) = \mathbf{20} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} &= OB \cdot OC \cos \angle BOC = \frac{1}{2}(OB^2 + OC^2 - BC^2) \\ &= \frac{1}{2}(8^2 + 7^2 - 5^2) = \mathbf{44} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} &= OC \cdot OA \cos \angle COA = \frac{1}{2}(OC^2 + OA^2 - CA^2) \\ &= \frac{1}{2}(7^2 + 5^2 - 8^2) = \mathbf{5}\end{aligned}$$

(2)  $x, y$  を実数とし,  $\vec{OH} = x\vec{a} + y\vec{b}$  とおくと

$$\vec{CH} = \vec{OH} - \vec{OC} = x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}$$

このとき,  $\vec{a} \perp \vec{CH}$ ,  $\vec{b} \perp \vec{CH}$  であるから,  $\vec{a} \cdot \vec{CH} = 0$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{CH} = 0$  より

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}) &= 0 & \vec{b} \cdot (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}) &= 0 \\ x|\vec{a}|^2 + y\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{a} &= 0 & x\vec{a} \cdot \vec{b} + y|\vec{b}|^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} &= 0\end{aligned}$$

上の2式に  $|\vec{a}| = 5$ ,  $|\vec{b}| = 8$ , および(1)の結果を代入すると

$$\begin{aligned}25x + 20y - 5 &= 0 & 20x + 64y - 44 &= 0 \\ 5x + 4y &= 1 & 5x + 16y &= 11\end{aligned}$$

これを解いて  $x = -\frac{7}{15}$ ,  $y = \frac{5}{6}$  よって  $\vec{OH} = -\frac{7}{15}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}$

(3) (1),(2)の結果から,  $\vec{a} \cdot \vec{CH} = 0$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{CH} = 0$ に注意して

$$\begin{aligned} CH^2 &= |\vec{CH}|^2 = \vec{CH} \cdot \vec{CH} = \left(-\frac{7}{15}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b} - \vec{c}\right) \cdot \vec{CH} \\ &= -\vec{c} \cdot \vec{CH} = -\vec{c} \cdot \left(-\frac{7}{15}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b} - \vec{c}\right) \\ &= \frac{7}{15}\vec{c} \cdot \vec{a} - \frac{5}{6}\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = \frac{7}{15} \cdot 5 - \frac{5}{6} \cdot 44 + 7^2 = \frac{44}{3} \end{aligned}$$

よって  $CH = \sqrt{\frac{44}{3}} = \frac{2\sqrt{33}}{3}$

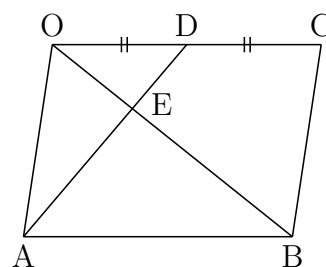
(4)  $\triangle OAB$ の面積を  $S$  とすると

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5^2 \cdot 8^2 - 20^2} = 10\sqrt{3}$$

よって  $V_1 = \frac{1}{3}S \times CH = \frac{1}{3} \cdot 10\sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{33}}{3} = \frac{20\sqrt{11}}{3}$

右の図の展開図において,  $OA = BC = 5$ ,  
 $AB = OC = 7$ であるから, 四角形  $OABC$   
 は平行四辺形である.  $D$  は  $OC$  の中点,  
 $\triangle EDO \sim \triangle EAB$ より

$$OE = \frac{1}{3}OB$$



ゆえに  $\triangle OAE = \frac{1}{3}S$

また,  $D$  から  $\alpha$  までの距離は  $\frac{1}{2}CH$  よって  $V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}V_1 = \frac{10\sqrt{11}}{9}$

補足 (1)の余弦定理により  $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$

したがって  $S = \frac{1}{2}OA \cdot OB \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$  ■

2 (1) 与えられた漸化式から

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{s + t}{2}, & a_4 &= \frac{a_2 + a_3}{2} = \frac{t + \frac{s+t}{2}}{2} = \frac{s + 3t}{4} \\ b_3 &= \sqrt{b_1 b_2} = \sqrt{st}, & b_4 &= \sqrt{b_2 b_3} = \sqrt{t\sqrt{st}} = \sqrt[4]{st^3} \end{aligned}$$

(2) 与えられた漸化式から

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) \quad \text{ゆえに} \quad c_{n+1} = -\frac{1}{2}c_n$$

$\{c_n\}$  は初項が  $c_1 = a_2 - a_1 = t - s$ , 公比が  $-\frac{1}{2}$  の等比数列であるから

$$c_n = c_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = (t - s) \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k = s + (t - s) \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= s + (t - s) \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right\} s + \frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\} t \end{aligned}$$

上式は,  $n = 1$  のときも成り立つので

$$a_n = \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right\} s + \frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\} t$$

(3)  $b_{n+2} = \sqrt{b_{n+1} b_n}$  の両辺の自然対数をとると

$$\log b_{n+2} = \frac{\log b_{n+1} + \log b_n}{2} \quad \text{ゆえに} \quad d_n = \frac{d_{n+1} + d_n}{2}$$

$d_1 = \log b_1 = \log s$ ,  $d_2 = \log b_2 = \log t$  より, (2) の結果を利用して

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right\} \log s + \frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\} \log t \\ &= \log s^{\frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right\}} t^{\frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\}} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad b_n = s^{\frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right\}} t^{\frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\}}$$

(4) (2),(3) の結果から  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{s + 2t}{3}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sqrt[3]{st^2}$

(5)  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ,  $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  とすると,  $s > 0$ ,  $t > 0$  より,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$

$$(4) \text{ の結果から } \alpha^3 - \beta^3 = \frac{1}{27}(s-t)^2(s+8t)$$

よって,  $t = s$  は  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  であるための必要十分条件である.

別解  $s > 0$ ,  $t > 0$  であるから, 3数  $s$ ,  $t$ ,  $t$  の相加平均・相乗平均の関係により

$$\frac{s+t+t}{3} \geq \sqrt[3]{stt} \quad \text{すなわち} \quad \frac{s+2t}{3} \geq \sqrt[3]{st^2}$$

上式において, 等号が成立するのは,  $s = t$  のときに限る.

$$\text{したがって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \implies s = t$$

また, (4) の結果から, この逆は自明.

よって,  $t = s$  は  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  であるための必要十分条件である.

補足  $s > 0$ ,  $t > 0$  に対して,  $p > 0$ ,  $q > 0$ ,  $p + q = 1$  とすると

$$ps + qt \geq s^p t^q$$

が成り立つ (等号が成立するのは  $s = t$ ) ので,  $p = \frac{1}{3}$ ,  $q = \frac{2}{3}$  とおくと

$$\frac{1}{3}s + \frac{2}{3}t \geq s^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}} \quad \text{すなわち} \quad \frac{s+2t}{3} \geq \sqrt[3]{st^2}$$

一般に,  $a_k > 0$ ,  $p_k > 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ),  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$  のとき

$$p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n \geq a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n}$$

が成り立つ (等号が成り立つのは,  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  のとき)<sup>1</sup>.

とくに,  $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$  とすると, 次式が成り立つ.

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

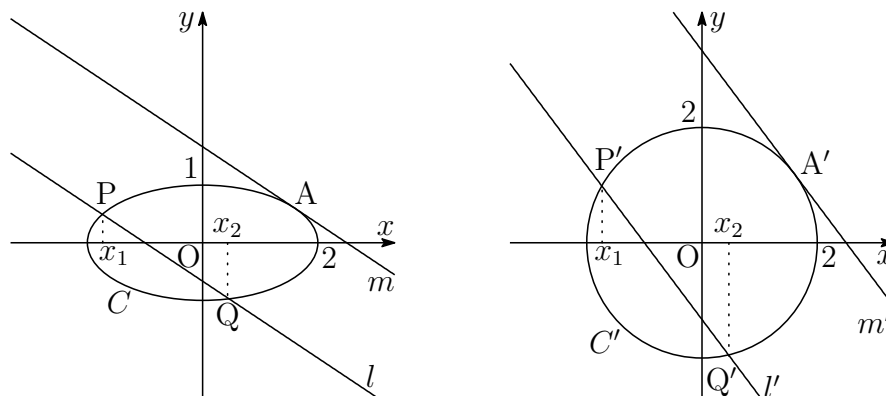
■

<sup>1</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai\\_ri\\_2002.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2002.pdf) [3] を参照

- 3 (1)  $C, l$  を  $x$  軸をもとに  $y$  軸方向に 2 倍に拡大した図形をそれぞれ

$$C' : x^2 + y^2 = 4, \quad l' : 2ax - y + 2b = 0$$

とする。また、これらの曲線上に 2 点  $P'(x_1, 2y_1), Q'(x_2, 2y_2)$  をとる。



$l'$  と  $C'$  が異なる 2 個の共有点を持つばよいので

$$\frac{|2b|}{\sqrt{(2a)^2 + (-1)^2}} < 2 \quad \text{よって} \quad -\sqrt{4a^2 + 1} < b < \sqrt{4a^2 + 1}$$

- (2)  $l'$  に平行な直線  $m'$  が第 1 象限の点  $A'$  において  $C'$  と接しているとする。  
このとき、(1) と同様にして

$$\frac{|2b|}{\sqrt{(2a)^2 + (-1)^2}} = 2 \quad \text{ゆえに} \quad |b| = \sqrt{4a^2 + 1}$$

$b$  の符号に注意して  $b = \sqrt{4a^2 + 1} \dots \textcircled{1}$  よって  $y = ax + \sqrt{4a^2 + 1}$

- (3)  $C'$  と  $l'$  の方程式から  $y$  を消去すると  $x^2 + (2ax + 2b)^2 = 4$

$$\text{すなわち} \quad (4a^2 + 1)x^2 + 8abx + 4b^2 - 4 = 0 \quad \dots (*)$$

方程式 (\*) の解と係数の関係により

$$x_1 + x_2 = -\frac{8ab}{4a^2 + 1}, \quad x_1x_2 = \frac{4b^2 - 4}{4a^2 + 1} \quad \dots (**)$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad (x_2 - x_1)^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \\ &= \left(-\frac{8ab}{4a^2 + 1}\right)^2 - 4 \times \frac{4b^2 - 4}{4a^2 + 1} \\ &= \frac{16(4a^2 - b^2 + 1)}{(4a^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

$$x_1 < x_2 \text{ および (1) の結果に注意して} \quad x_2 - x_1 = \frac{4\sqrt{4a^2 - b^2 + 1}}{4a^2 + 1}$$

- (4) (2) の結果から,  $m'$  の方程式は  $y = 2ax + 2\sqrt{4a^2 + 1} \cdots \textcircled{2}$   
 $A'$  の座標を  $(x_0, y_0)$  とすると,  $x_0$  は (\*) の重解である.  
 このとき, ① に注意して

$$x_0 = -\frac{8ab}{2(4a^2 + 1)} = -\frac{8a\sqrt{4a^2 + 1}}{2(4a^2 + 1)} = -\frac{4a}{\sqrt{4a^2 + 1}}$$

これを ② に代入することにより

$$y_0 = 2a \left( -\frac{4a}{\sqrt{4a^2 + 1}} \right) + 2\sqrt{4a^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{4a^2 + 1}}$$

よって,  $A' \left( -\frac{4a}{\sqrt{4a^2 + 1}}, \frac{2}{\sqrt{4a^2 + 1}} \right)$  から直線  $l' : 2ax - y + 2b = 0$  までの距離を  $d$  とすると, (1) の結果に注意して

$$\begin{aligned} d &= \frac{\left| 2a \left( -\frac{4a}{\sqrt{4a^2 + 1}} \right) - \frac{2}{\sqrt{4a^2 + 1}} + 2b \right|}{\sqrt{(2a)^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{2|\sqrt{4a^2 + 1} - b|}{\sqrt{4a^2 + 1}} = 2 \left( 1 - \frac{b}{\sqrt{4a^2 + 1}} \right) \end{aligned}$$

(3) の結果から

$$\begin{aligned} P'Q' &= \sqrt{1 + (2a)^2} |x_2 - x_1| = \sqrt{4a^2 + 1} \times \frac{4\sqrt{4a^2 - b^2 + 1}}{4a^2 + 1} \\ &= \frac{4\sqrt{4a^2 - b^2 + 1}}{\sqrt{4a^2 + 1}} = 4\sqrt{1 - \frac{b^2}{4a^2 + 1}} \end{aligned}$$

したがって

$$\Delta A'P'Q' = \frac{1}{2} P'Q' \cdot d = 4 \left( 1 - \frac{b}{\sqrt{4a^2 + 1}} \right) \sqrt{1 - \frac{b^2}{4a^2 + 1}}$$

$S = \frac{1}{2} \Delta A'P'Q'$  であるから

$$S = 2 \left( 1 - \frac{b}{\sqrt{4a^2 + 1}} \right) \sqrt{1 - \frac{b^2}{4a^2 + 1}}$$

(5) (1)の結果から,  $t = \frac{b}{\sqrt{4a^2+1}}$  とすると  $-1 < t < 1$

$$f(t) = S^2 \text{ とおくと } f(t) = 4(1-t)^2(1+t^2) = -4(t-1)^3(t+1)$$

$$\text{これを微分すると } f'(t) = -8(t-1)^2(2t+1)$$

したがって,  $f(t)$  の増減表は

$t$	$(-1)$	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$+$	$0$	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	極大 $\frac{27}{4}$	$\searrow$	

$$\text{よって, 求める } S \text{ の最大値は } \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

別解 (5) で求めた  $f(t) = 4(1-t)^3(1+t)$  について,  $-1 < t < 1$  であるから,  
 $1-t > 0$ ,  $1+t > 0$  より

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{4} \left( \frac{1-t}{3} \right) + \frac{1}{4}(1+t) \geq \left( \frac{1-t}{3} \right)^{\frac{3}{4}} (1+t)^{\frac{1}{4}}$$

この両辺を4乗すると

$$\frac{1}{16} \geq \frac{(1-t)^3(1+t)}{27} \quad \text{ゆえに} \quad f(t) \leq \frac{27}{4}$$

上式において, 等号が成立するとき

$$\frac{1-t}{3} = 1+t \quad \text{すなわち} \quad t = -\frac{1}{2}$$

したがって,  $f(t)$  は  $t = -\frac{1}{2}$  のとき, 最大値  $\frac{27}{4}$  をとる.

$$\text{よって, 求める } S \text{ の最大値は } \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

補足  $1-t$ ,  $1-t$ ,  $1-t$ ,  $3(1+t)$  の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{3}{2} = \frac{3(1-t) + 3(1+t)}{4} \geq \sqrt[4]{(1-t)^3 \cdot 3(1+t)}$$

この両辺を4乗すると

$$\frac{81}{16} \geq 3(1-t)^3(1+t) \quad \text{ゆえに} \quad f(t) \leq \frac{27}{4}$$

上式において, 等号が成立するとき  $1-t = 3(1+t)$  すなわち  $t = -\frac{1}{2}$

参考  $S$  が最大となるとき,  $\triangle A'P'Q'$  は正三角形である.

一般に, 円に内接する三角形の面積が最大となる三角形は正三角形である. 実際, 辺  $BC$  に対し, 直線  $BC$  から最も遠くなるように  $A$  を取ると面積は最大になる. このとき,  $\triangle ABC$  は  $AB = AC$  の鋭角二等辺三角形である. 円の半径を  $R$  とし,  $B = C = \theta$  とすると,  $A = \pi - 2\theta$ . このとき正弦定理により

$$AB = AC = 2R \sin \theta \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } \triangle ABC &= \frac{1}{2}(2R \sin \theta)^2 \sin(\pi - 2\theta) \\ &= 2R^2 \sin^2 \theta \sin 2\theta = 4R^2 \sin^3 \theta \cos \theta \end{aligned}$$

$\sin \theta > 0$ ,  $\cos \theta > 0$  であるから

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{4} \left( \frac{\sin^2 \theta}{3} \right) + \frac{1}{4} \cos^2 \theta \geq \left( \frac{\sin^2 \theta}{3} \right)^{\frac{3}{4}} (\cos^2 \theta)^{\frac{1}{4}}$$

$$\text{両辺を平方して } \frac{1}{16} \geq \frac{\sin^3 \theta \cos \theta}{3\sqrt{3}} \quad \text{ゆえに } \sin^3 \theta \cos \theta \leq \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

上式において, 等号が成立するのは

$$\frac{\sin^2 \theta}{3} = \cos^2 \theta \quad \text{ゆえに } \tan^2 \theta = 3 \quad \text{すなわち } \theta = \frac{\pi}{3}$$

このとき  $A = B = C = \frac{\pi}{3}$  となる. したがって, 円に内接する三角形は面積が最大となるとき正三角形である. このことに注意すると, 二等辺三角形  $A'P'Q'$  は面積が最大するとき正三角形であるから,  $R = 2$  より

$$P'Q' = 2\sqrt{3}$$

$$(4) \text{ で求めた } P'Q' = 4\sqrt{1 - \frac{b^2}{4a^2 + 1}} \text{ と上式により}$$

$$\frac{b^2}{4a^2 + 1} = \frac{1}{4}$$

$A'$  は第 1 象限の点であるから,  $b > 0$  のとき, 二等辺三角形  $A'P'Q'$  は鈍角三角形である. ゆえに  $b < 0$  より

$$\frac{b}{\sqrt{4a^2 + 1}} = -\frac{1}{2}$$



- 4 (1)  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$  より,  $\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos \theta < 1$  であるから

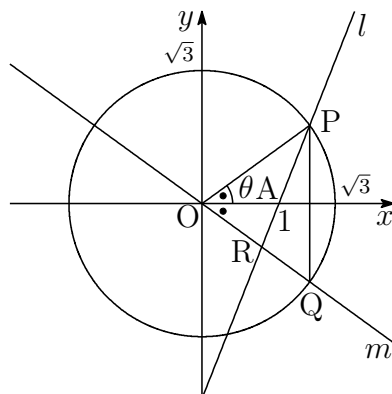
$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} < \sqrt{3} \cos \theta < \sqrt{3} \quad \text{よって} \quad \sqrt{3} \cos \theta > \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} > 1$$

- (2) 2点 P, A を通る直線  $l$  の方程式は

$$y = \frac{\sqrt{3} \sin \theta}{\sqrt{3} \cos \theta - 1} (x - 1)$$

- 2点 O, Q を通る直線  $m$  の方程式は

$$y = -(\tan \theta)x$$



- (3) (2) で求めた 2 直線  $l$ ,  $m$  の方程式から  $y$  を消去すると

$$\frac{\sqrt{3} \sin \theta}{\sqrt{3} \cos \theta - 1} (x - 1) = -(\tan \theta)x \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\sqrt{3}(x - 1)}{\sqrt{3} \cos \theta - 1} = -\frac{x}{\cos \theta}$$

- (1) の結果に注意して  $x = \frac{\sqrt{3} \cos \theta}{2\sqrt{3} \cos \theta - 1}$

$$\text{これを } m \text{ の方程式に代入して} \quad y = -\frac{\sqrt{3} \sin \theta}{2\sqrt{3} \cos \theta - 1}$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{R} \left( \frac{\sqrt{3} \cos \theta}{2\sqrt{3} \cos \theta - 1}, -\frac{\sqrt{3} \sin \theta}{2\sqrt{3} \cos \theta - 1} \right)$$

- (4)  $PQ = 2\sqrt{3} \sin \theta$  であり, A と直線 PQ との距離は  $\sqrt{3} \cos \theta - 1$

$$\text{したがって} \quad S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \sin \theta (\sqrt{3} \cos \theta - 1) = \sqrt{3} (\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta - \sin \theta)$$

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\theta} &= \sqrt{3} \{ \sqrt{3} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - \cos \theta \} \\ &= \sqrt{3} (2\sqrt{3} \cos^2 \theta - \cos \theta - \sqrt{3}) \\ &= \sqrt{3} (\sqrt{3} \cos \theta + 1) (2 \cos \theta - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$S$  の増減表は

$\theta$	(0)	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$(\frac{\pi}{4})$
$\frac{dS}{d\theta}$		+	0	-	
$S$		↗	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘	

よって  $\theta = \frac{\pi}{6}$  のとき, 最大値  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(5) (4)の結果から,  $\theta = \frac{\pi}{6}$  のとき,  $P\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,  $Q\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

また, このとき, (2),(3)の結果から

$$R\left(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right), \quad l: y = \sqrt{3}(x-1), \quad m: y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

2つの領域  $x \geq \frac{3}{2}$ ,  $x^2 + y^2 \leq 3$  で囲まれた部分を  $y$  軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を  $V_1$  とすると

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{2\pi} &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ x^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right\} dy = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ (3-y^2) - \frac{9}{4} \right\} dy \\ &= \left[ \frac{3}{4}y - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

$\triangle PQR$  で囲まれた部分を  $y$  軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を  $V_2$  とすると

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{2\pi} &= \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}} x \left\{ \sqrt{3}(x-1) - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x\right) \right\} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}} (4x^2 - 3x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}} = \frac{15\sqrt{3}}{32} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad V = V_1 + V_2 = 2\pi \left( \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{15\sqrt{3}}{32} \right) = \frac{23\sqrt{3}}{16}\pi$$

補足 以下の検算法がある (高校数学の範囲外のため答案には書かないこと).

$\angle POQ$  を中心角とする扇形の半径を  $r$ ,  $P$  の  $y$  座標を  $a$  とすると, この扇形を  $y$  軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を  $V_3$  とすると<sup>2</sup>

$$V_3 = \frac{4}{3}\pi r^2 a = \frac{4}{3}\pi (\sqrt{3})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\pi$$

$\triangle OPR$  の面積を  $T$ , 重心の  $x$  座標を  $h$  とし, これを  $y$  軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を  $V_4$  とすると

$$T = \frac{3\sqrt{3}}{8}, \quad h = \frac{3}{4}, \quad V_4 = 2\pi Th = 2\pi \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{16}\pi$$

$$\text{よって} \quad V = V_3 - V_4 = 2\sqrt{3}\pi - \frac{9\sqrt{3}}{16}\pi = \frac{23\sqrt{3}}{16}\pi \quad \blacksquare$$

<sup>2</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai\\_ri\\_2012.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf) の 1 を参照.