平成 28 年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
工学部　平成 28 年 2 月 25 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 四面体 OABC の面はすべて合同であり，OA $= 5$，OB $= 8$，AB $= 7$ である．$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ として，次に答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ および $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ．

(2) 3 点 O，A，B の定める平面を α とし，α 上の点 H を直線 CH と α が垂直になるように選ぶ．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) (2) の点 H に対して，線分 CH の長さを求めよ．

(4) 四面体 OABC の体積 V_1 を求めよ．また，辺 OC の中点を D とし，さらに辺 OB 上に点 E を AE + ED が最小となるようにとる．このとき，四面体 OAED の体積 V_2 を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $s > 0$，$t > 0$ とする．正の数からなる 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は初項と第 2 項が $a_1 = b_1 = s$，$a_2 = b_2 = t$ であり，すべての自然数 n に対して

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}, \quad b_{n+2} = \sqrt{b_{n+1}b_n}$$

をみたすとする．次に答えよ．

(1) a_3，b_3，a_4，b_4 を s，t を用いて表せ．

(2) 自然数 n に対して，$c_n = a_{n+1} - a_n$ とおく．数列 $\{c_n\}$ は等比数列であることを示し，一般項を求めよ．さらに，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 自然数 n に対して，$d_n = \log b_n$ とおく．数列 $\{d_n\}$ の一般項を求めよ．さらに，数列 $\{b_n\}$ の一般項を s の累乗と t の累乗を用いて表せ．ただし，対数は自然対数とする．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

(5) $t = s$ は $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ であるための必要十分条件であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $a < 0$，b を実数とする．楕円 $C : x^2 + 4y^2 = 4$ と直線 $l : y = ax + b$ が異なる 2 個の共有点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1 < x_2)$ を持つとし，l に平行な直線 m が第 1 象限の点 A において C と接しているとする．次に答えよ．

(1) b の値の範囲を a を用いて表せ．

(2) 直線 m の方程式を a を用いて表せ．

(3) $x_2 - x_1$ を a，b を用いて表せ．

(4) 三角形 APQ の面積 S を a，b を用いて表せ．

(5) b が (1) で求めた範囲を動くとき，(4) で求めた S の最大値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ および点 $\mathrm{P}(\sqrt{3}\cos\theta,\ \sqrt{3}\sin\theta)$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}\right)$ がある．x 軸に関して点 P と対称な点を Q とし，2 点 P，A を通る直線を l，2 点 O，Q を通る直線を m とする．次に答えよ．ただし，O は原点を表す．

(1) $\sqrt{3}\cos\theta > 1$ を示せ．

(2) 直線 l の方程式と直線 m の方程式を θ を用いて表せ．

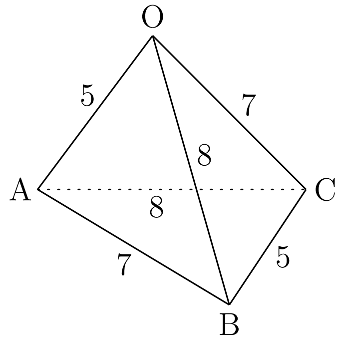
(3) 直線 l と直線 m の交点 R の座標を θ を用いて表せ．

(4) 三角形 PAQ の面積を S とする．θ が変化するとき，S の最大値とそのときの θ の値を求めよ．

(5) θ が (4) で求めた値をとるとき，2 直線 l，m および曲線 $x^2 + y^2 = 3$ $(x \geqq \sqrt{3}\cos\theta)$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 余弦定理により



$$\cos\angle\mathrm{AOB} = \frac{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}$$
$$\cos\angle\mathrm{BOC} = \frac{\mathrm{OB}^2+\mathrm{OC}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}}$$
$$\cos\angle\mathrm{COA} = \frac{\mathrm{OC}^2+\mathrm{OA}^2-\mathrm{CA}^2}{2\mathrm{OC}\cdot\mathrm{OA}}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} = \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\angle\mathrm{AOB} &= \frac{1}{2}(\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2)\\
&= \frac{1}{2}(5^2+8^2-7^2) = \mathbf{20}\\
\vec{b}\cdot\vec{c} = \mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}\cos\angle\mathrm{BOC} &= \frac{1}{2}(\mathrm{OB}^2+\mathrm{OC}^2-\mathrm{BC}^2)\\
&= \frac{1}{2}(8^2+7^2-5^2) = \mathbf{44}\\
\vec{c}\cdot\vec{a} = \mathrm{OC}\cdot\mathrm{OA}\cos\angle\mathrm{COA} &= \frac{1}{2}(\mathrm{OC}^2+\mathrm{OA}^2-\mathrm{CA}^2)\\
&= \frac{1}{2}(7^2+5^2-8^2) = \mathbf{5}
\end{aligned}$$

(2) x，y を実数とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = x\vec{a}+y\vec{b}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{c}$$

このとき，$\vec{a}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$，$\vec{b}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ であるから，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=0$，$\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=0$ より

$$\vec{a}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{c})=0 \qquad \vec{b}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{c})=0$$
$$x|\vec{a}|^2+y\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0 \qquad x\vec{a}\cdot\vec{b}+y|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

上の 2 式に $|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=8$，および (1) の結果を代入すると

$$25x+20y-5=0 \qquad 20x+64y-44=0$$
$$5x+4y=1 \qquad 5x+16y=11$$

これを解いて　$x=-\dfrac{7}{15}$，$y=\dfrac{5}{6}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}} = -\dfrac{7}{15}\vec{a}+\dfrac{5}{6}\vec{b}}$

(3) (1),(2) の結果から，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=0$，$\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=0$ に注意して

$$\begin{aligned}\mathrm{CH}^2=|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}&=\left(-\frac{7}{15}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}\\&=-\vec{c}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=-\vec{c}\cdot\left(-\frac{7}{15}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}-\vec{c}\right)\\&=\frac{7}{15}\vec{c}\cdot\vec{a}-\frac{5}{6}\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=\frac{7}{15}\cdot5-\frac{5}{6}\cdot44+7^2=\frac{44}{3}\end{aligned}$$

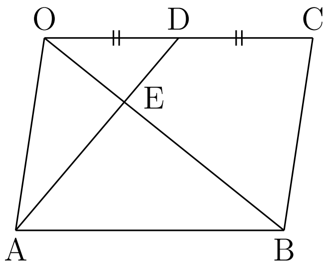
よって　　$\mathrm{CH}=\sqrt{\dfrac{44}{3}}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{33}}{3}}$

(4) $\triangle$OAB の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5^2\cdot8^2-(20)^2}=10\sqrt{3}$$

よって　　$V_1=\dfrac{1}{3}S\times\mathrm{CH}=\dfrac{1}{3}\cdot10\sqrt{3}\times\dfrac{2\sqrt{33}}{3}=\boldsymbol{\dfrac{20\sqrt{11}}{3}}$

右の図の展開図において，OA $=$ BC $=5$，AB $=$ OC $=7$ であるから，四角形 OABC は平行四辺形である．D は OC の中点，$\triangle\mathrm{EDO}\backsim\triangle\mathrm{EAB}$ より



$$\mathrm{OE}=\frac{1}{3}\mathrm{OB}$$

ゆえに　　$\triangle\mathrm{OAE}=\dfrac{1}{3}S$

また，D から α までの距離は　$\dfrac{1}{2}\mathrm{CH}$　　よって　$V_2=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}V_1=\boldsymbol{\dfrac{10\sqrt{11}}{9}}$

補足 (1) の余弦定理により　　$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$

したがって　$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot8\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 与えられた漸化式から

$$a_3=\frac{a_1+a_2}{2}=\boldsymbol{\frac{s+t}{2}},\qquad a_4=\frac{a_2+a_3}{2}=\frac{t+\frac{s+t}{2}}{2}=\boldsymbol{\frac{s+3t}{4}}$$
$$b_3=\sqrt{b_1b_2}=\boldsymbol{\sqrt{st}},\qquad b_4=\sqrt{b_2b_3}=\sqrt{t\sqrt{st}}=\boldsymbol{\sqrt[4]{st^3}}$$

(2) 与えられた漸化式から

$$a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)\quad \text{ゆえに}\quad c_{n+1}=-\frac{1}{2}c_n$$

$\{c_n\}$ は初項が $c_1=a_2-a_1=t-s$，公比が $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$c_n=c_1\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\boldsymbol{(t-s)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k=s+(t-s)\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\\&=s+(t-s)\times\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\\&=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}s+\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}t\end{aligned}$$

上式は，$n=1$ のときも成り立つので

$$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}s+\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}t}$$

(3) $b_{n+2}=\sqrt{b_{n+1}b_n}$ の両辺の自然対数をとると

$$\log b_{n+2}=\frac{\log b_{n+1}+\log b_n}{2}\quad \text{ゆえに}\quad d_n=\frac{d_{n+1}+d_n}{2}$$

$d_1=\log b_1=\log s$，$d_2=\log b_2=\log t$ より，(2) の結果を利用して

$$\begin{aligned}d_n&=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}\log s+\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\log t\\&=\log s^{\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}}t^{\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}\end{aligned}$$

よって $\quad \boldsymbol{b_n=s^{\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}}t^{\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}}$

(4) (2),(3) の結果から $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\boldsymbol{\frac{s+2t}{3}},\quad \lim_{n\to\infty}b_n=\boldsymbol{\sqrt[3]{st^2}}$

(5) $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$，$\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$ とすると，$s > 0$，$t > 0$ より，$\alpha > 0$，$\beta > 0$

(4) の結果から　$\alpha^3 - \beta^3 = \dfrac{1}{27}(s-t)^2(s+8t)$

よって，$t = s$ は $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ であるための必要十分条件である．

別解 $s > 0$，$t > 0$ であるから，3 数 s，t，t の相加平均・相乗平均の関係により

$$\frac{s+t+t}{3} \geqq \sqrt[3]{stt} \quad \text{すなわち} \quad \frac{s+2t}{3} \geqq \sqrt[3]{st^2}$$

上式において，等号が成立するのは，$s = t$ のときに限る．
したがって　$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \implies s = t$
また，(4) の結果から，この逆は自明．

よって，$t = s$ は $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ であるための必要十分条件である．

補足 $s > 0$，$t > 0$ に対して，$p > 0$，$q > 0$，$p + q = 1$ とすると

$$ps + qt \geqq s^p t^q$$

が成り立つ (等号が成立するのは $s = t$) ので，$p = \dfrac{1}{3}$，$q = \dfrac{2}{3}$ とおくと

$$\frac{1}{3}s + \frac{2}{3}t \geqq s^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}} \quad \text{すなわち} \quad \frac{s+2t}{3} \geqq \sqrt[3]{st^2}$$

一般に，$a_k > 0$, $p_k > 0$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$，$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ のとき

$$\boldsymbol{p_1a_1 + p_2a_2 + \cdots + p_na_n \geqq {a_1}^{p_1}{a_2}^{p_2}\cdots{a_n}^{p_n}}$$

が成り立つ (等号が成り立つのは，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のとき) [1]．
とくに，$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \dfrac{1}{n}$ とすると，次式が成り立つ．

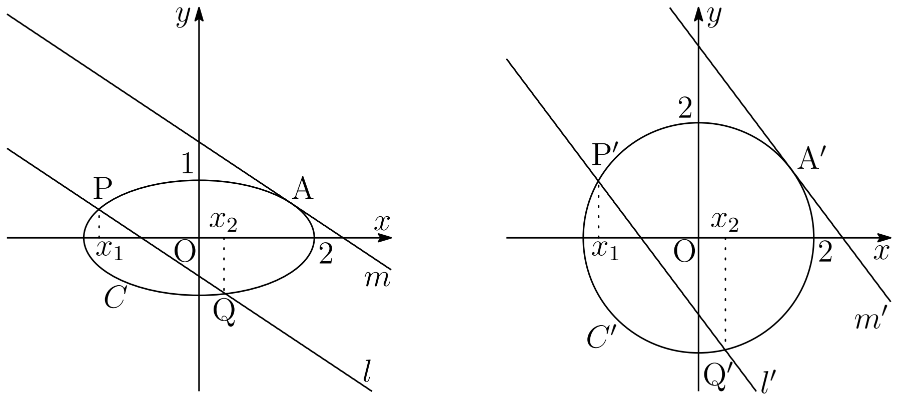
$$\boldsymbol{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2002.pdf $\boxed{3}$ を参照

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) C，l を x 軸をもとに y 軸方向に 2 倍に拡大した図形をそれぞれ

$$C' : x^2 + y^2 = 4, \quad l' : 2ax - y + 2b = 0$$

とする．また，これらの曲線上に 2 点 $\mathrm{P}'(x_1,\ 2y_1)$，$\mathrm{Q}'(x_2,\ 2y_2)$ をとる．



l' と C' が異なる 2 個の共有点を持てばよいので

$$\frac{|2b|}{\sqrt{(2a)^2 + (-1)^2}} < 2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{-\sqrt{4a^2+1} < b < \sqrt{4a^2+1}}$$

(2) l' に平行な直線 m' が第 1 象限の点 A' において C' と接しているとする．
このとき，(1) と同様にして

$$\frac{|2b|}{\sqrt{(2a)^2 + (-1)^2}} = 2 \qquad \text{ゆえに} \quad |b| = \sqrt{4a^2+1}$$

b の符号に注意して　$b = \sqrt{4a^2+1}$　$\cdots$①　よって　$\boldsymbol{y = ax + \sqrt{4a^2+1}}$

(3) C' と l' の方程式から y を消去すると　$x^2 + (2ax + 2b)^2 = 4$

すなわち　$(4a^2+1)x^2 + 8abx + 4b^2 - 4 = 0 \quad \cdots (*)$

方程式 $(*)$ の解と係数の関係により

$$x_1 + x_2 = -\frac{8ab}{4a^2+1}, \quad x_1 x_2 = \frac{4b^2-4}{4a^2+1} \quad \cdots (**)$$

したがって
$$\begin{aligned}(x_2 - x_1)^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \\ &= \left(-\frac{8ab}{4a^2+1}\right)^2 - 4 \times \frac{4b^2-4}{4a^2+1} \\ &= \frac{16(4a^2 - b^2 + 1)}{(4a^2+1)^2}\end{aligned}$$

$x_1 < x_2$ および (1) の結果に注意して　$\boldsymbol{x_2 - x_1 = \dfrac{4\sqrt{4a^2-b^2+1}}{4a^2+1}}$

(4) (2) の結果から，m' の方程式は　$y = 2ax + 2\sqrt{4a^2+1}$　$\cdots$ ②
A' の座標を $(x_0,\ y_0)$ とすると，x_0 は $(*)$ の重解である．
このとき，① に注意して

$$x_0 = -\frac{8ab}{2(4a^2+1)} = -\frac{8a\sqrt{4a^2+1}}{2(4a^2+1)} = -\frac{4a}{\sqrt{4a^2+1}}$$

これを ② に代入することにより

$$y_0 = 2a\left(-\frac{4a}{\sqrt{4a^2+1}}\right) + 2\sqrt{4a^2+1} = \frac{2}{\sqrt{4a^2+1}}$$

よって，$\mathrm{A}'\left(-\frac{4a}{\sqrt{4a^2+1}},\ \frac{2}{\sqrt{4a^2+1}}\right)$ から直線 $l' : 2ax - y + 2b = 0$ までの距離を d とすると，(1) の結果に注意して

$$\begin{aligned} d &= \frac{\left|2a\left(-\frac{4a}{\sqrt{4a^2+1}}\right) - \frac{2}{\sqrt{4a^2+1}} + 2b\right|}{\sqrt{(2a)^2+(-1)^2}} \\ &= \frac{2|\sqrt{4a^2+1} - b|}{\sqrt{4a^2+1}} = 2\left(1 - \frac{b}{\sqrt{4a^2+1}}\right) \end{aligned}$$

(3) の結果から

$$\begin{aligned} \mathrm{P}'\mathrm{Q}' &= \sqrt{1+(2a)^2}\,|x_2 - x_1| = \sqrt{4a^2+1} \times \frac{4\sqrt{4a^2-b^2+1}}{4a^2+1} \\ &= \frac{4\sqrt{4a^2-b^2+1}}{\sqrt{4a^2+1}} = 4\sqrt{1 - \frac{b^2}{4a^2+1}} \end{aligned}$$

したがって

$$\triangle \mathrm{A}'\mathrm{P}'\mathrm{Q}' = \frac{1}{2}\mathrm{P}'\mathrm{Q}'\cdot d = 4\left(1 - \frac{b}{\sqrt{4a^2+1}}\right)\sqrt{1 - \frac{b^2}{4a^2+1}}$$

$S = \frac{1}{2}\triangle \mathrm{A}'\mathrm{P}'\mathrm{Q}'$ であるから

$$\boldsymbol{S = 2\left(1 - \frac{b}{\sqrt{4a^2+1}}\right)\sqrt{1 - \frac{b^2}{4a^2+1}}}$$

(5) (1) の結果から，$t=\dfrac{b}{\sqrt{4a^2+1}}$ とすると　$-1<t<1$

$f(t)=S^2$ とおくと　　$f(t)=4(1-t)^2(1-t^2)=-4(t-1)^3(t+1)$

これを微分すると　　$f'(t)=-8(t-1)^2(2t+1)$

したがって，$f(t)$ の増減表は

t	(-1)	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	極大 $\frac{27}{4}$	$\searrow$	

よって，求める S の最大値は　$\sqrt{\dfrac{27}{4}}=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$

別解 (5) で求めた $f(t)=4(1-t)^3(1+t)$ について，$-1<t<1$ であるから，$1-t>0$，$1+t>0$ より

$$\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\left(\frac{1-t}{3}\right)+\frac{1}{4}(1+t)\geqq\left(\frac{1-t}{3}\right)^{\frac{3}{4}}(1+t)^{\frac{1}{4}}$$

この両辺を 4 乗すると

$$\frac{1}{16}\geqq\frac{(1-t)^3(1+t)}{27}\quad \text{ゆえに}\quad f(t)\leqq\frac{27}{4}$$

上式において，等号が成立するとき

$$\frac{1-t}{3}=1+t\quad \text{すなわち}\quad t=-\frac{1}{2}$$

したがって，$f(t)$ は $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき，最大値 $\dfrac{27}{4}$ をとる．

よって，求める S の最大値は　$\sqrt{\dfrac{27}{4}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

補足 $1-t$，$1-t$，$1-t$，$3(1+t)$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{3}{2}=\frac{3(1-t)+3(1+t)}{4}\geqq\sqrt[4]{(1-t)^3\cdot 3(1+t)}$$

この両辺を 4 乗すると

$$\frac{81}{16}\geqq 3(1-t)^3(1+t)\quad \text{ゆえに}\quad f(t)\leqq\frac{27}{4}$$

上式において，等号が成立するとき　$1-t=3(1+t)$　すなわち　$t=-\dfrac{1}{2}$

参考 S が最大となるとき，$\triangle \mathrm{A'P'Q'}$ は正三角形である．

一般に，円に内接する三角形の面積が最大となる三角形は正三角形である．実際，辺 BC に対し，直線 BC から最も遠くなるように A を取ると面積は最大になる。このとき，$\triangle \mathrm{ABC}$ は $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ の鋭角二等辺三角形である．円の半径を R とし，$B = C = \theta$ とすると，$A = \pi - 2\theta$．このとき正弦定理により

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 2R\sin\theta \quad \cdots ③$$

したがって　$\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}(2R\sin\theta)^2\sin(\pi - 2\theta)$

$$= 2R^2\sin^2\theta\sin 2\theta = 4R^2\sin^3\theta\cos\theta$$

$\sin\theta > 0$，$\cos\theta > 0$ であるから

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{\sin^2\theta}{3}\right) + \frac{1}{4}\cos^2\theta \geqq \left(\frac{\sin^2\theta}{3}\right)^{\frac{3}{4}}(\cos^2\theta)^{\frac{1}{4}}$$

両辺を平方して　$\dfrac{1}{16} \geqq \dfrac{\sin^3\theta\cos\theta}{3\sqrt{3}}$　ゆえに　$\sin^3\theta\cos\theta \leqq \dfrac{3\sqrt{3}}{16}$

上式において，等号が成立するのは

$$\frac{\sin^2\theta}{3} = \cos^2\theta \quad \text{ゆえに} \quad \tan^2\theta = 3 \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

このとき $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ となる．したがって，円に内接する三角形は面積が最大となるとき正三角形である．このことに注意すると，二等辺三角形 $\mathrm{A'P'Q'}$ は面積が最大のとき正三角形であるから，$R = 2$ より

$$\mathrm{P'Q'} = 2\sqrt{3}$$

(4) で求めた $\mathrm{P'Q'} = 4\sqrt{1 - \dfrac{b^2}{4a^2+1}}$ と上式により

$$\frac{b^2}{4a^2+1} = \frac{1}{4}$$

$\mathrm{A'}$ は第 1 象限の点であるから，$b > 0$ のとき，二等辺三角形 $\mathrm{A'P'Q'}$ は鈍角三角形である．ゆえに $b < 0$ より

$$\frac{b}{\sqrt{4a^2+1}} = -\frac{1}{2}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ より，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\cos\theta<1$ であるから

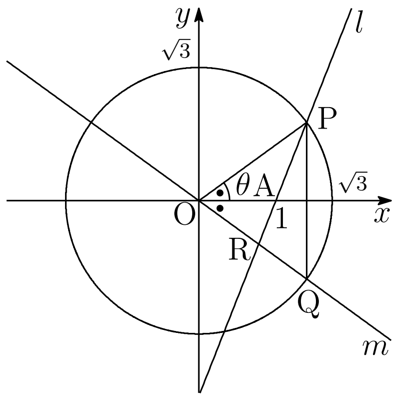
$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}<\sqrt{3}\cos\theta<\sqrt{3}\quad よって\quad \sqrt{3}\cos\theta>\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}>1$$

(2) 2点P，Aを通る直線 l の方程式は

$$\boldsymbol{y=\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta-1}(x-1)}$$

2点O，Qを通る直線 m の方程式は

$$\boldsymbol{y=-(\tan\theta)x}$$



(3) (2) で求めた2直線 l，m の方程式から y を消去すると

$$\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta-1}(x-1)=-(\tan\theta)x\quad ゆえに\quad \frac{\sqrt{3}(x-1)}{\sqrt{3}\cos\theta-1}=-\frac{x}{\cos\theta}$$

(1) の結果に注意して　$x=\dfrac{\sqrt{3}\cos\theta}{2\sqrt{3}\cos\theta-1}$

これを m の方程式に代入して　$y=-\dfrac{\sqrt{3}\sin\theta}{2\sqrt{3}\cos\theta-1}$

よって　$\boldsymbol{\mathrm{R}\left(\dfrac{\sqrt{3}\cos\theta}{2\sqrt{3}\cos\theta-1},\,-\dfrac{\sqrt{3}\sin\theta}{2\sqrt{3}\cos\theta-1}\right)}$

(4) $\mathrm{PQ}=2\sqrt{3}\sin\theta$ であり，Aと直線PQとの距離は　$\sqrt{3}\cos\theta-1$

したがって　$S=\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\sin\theta(\sqrt{3}\cos\theta-1)=\sqrt{3}(\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\sin\theta)$

$$\begin{aligned}\frac{dS}{d\theta}&=\sqrt{3}\{\sqrt{3}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-\cos\theta\}\\&=\sqrt{3}(2\sqrt{3}\cos^2\theta-\cos\theta-\sqrt{3})\\&=\sqrt{3}(\sqrt{3}\cos\theta+1)(2\cos\theta-\sqrt{3})\end{aligned}$$

S の増減表は

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$(\frac{\pi}{4})$
$\frac{dS}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	

よって　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{6}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{4}}$

(5) (4) の結果から，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

また，このとき，(2),(3) の結果から

$$\mathrm{R}\left(\frac{3}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right),\quad l: y=\sqrt{3}(x-1),\quad m: y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

2 つの領域 $x \geqq \dfrac{3}{2}$，$x^2+y^2 \leqq 3$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_1 とすると

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{2\pi}&=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{x^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}dy=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{(3-y^2)-\frac{9}{4}\right\}dy\\&=\Big[\,\frac{3}{4}y-\frac{1}{3}y^3\,\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

$\triangle$PQR で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_2 とすると

$$\begin{aligned}\frac{V_2}{2\pi}&=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}}x\left\{\sqrt{3}(x-1)-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)\right\}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}}(4x^2-3x)\,dx\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\,\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\,\Big]_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}}=\frac{15\sqrt{3}}{32}\end{aligned}$$

よって　　$V=V_1+V_2=2\pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{15\sqrt{3}}{32}\right)=\boldsymbol{\dfrac{23\sqrt{3}}{16}\pi}$

補足 以下の検算法がある (高校数学の範囲外のため答案には書かないこと).

$\angle$POQ を中心角とする扇形の半径を r，P の y 座標を a とすると，この扇形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_3 とすると [2]

$$V_3=\frac{4}{3}\pi r^2a=\frac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}\pi$$

$\triangle$OPR の面積を T，重心の x 座標を h とし，これを y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_4 とすると

$$T=\frac{3\sqrt{3}}{8},\quad h=\frac{3}{4},\quad V_4=2\pi Th=2\pi\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9\sqrt{3}}{16}\pi$$

よって　　$V=V_3-V_4=2\sqrt{3}\pi-\dfrac{9\sqrt{3}}{16}\pi=\dfrac{23\sqrt{3}}{16}\pi$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf の $\boxed{1}$ を参照.