平成 27 年度　九州工業大学２次試験後期日程 (数学問題)
工学部　平成 27 年 3 月 12 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = 3a_n + n^2 - 2n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ をみたすとき，次に答えよ．

(1) a_1，a_2 を求めよ．

(2) すべての自然数 n に対して $a_{n+1} - \{p(n+1) + q\} = r\{a_n - (pn + q)\}$ が成り立つ定数 p，q，r を求めよ．

(3) a_n および S_n を n を用いて表せ．

(4) 自然数 n に対して，$T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k a_k$ とする．T_n を n を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $t > 0$ とする．O を原点とする座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}\left(-\dfrac{1}{t},\ t\right)$，$\mathrm{B}\left(t,\ \dfrac{2}{t}\right)$ があり，線分 AB の中点を M とする．次に答えよ．

(1) $a > 0$，$b > 0$，$c > 0$ のとき，不等式 $ac + \dfrac{b}{c} \geqq 2\sqrt{ab}$ を示せ．また，等号が成り立つのはどのようなときか．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (p,\ q)$ とする．点 $\mathrm{C}(x,\ y)$ を次が成り立つようにとる．

$$\overrightarrow{\mathrm{MC}} = (-qr,\ pr),\quad |\overrightarrow{\mathrm{MC}}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$$

ただし，$r > 0$ とする．p，q および x，y を t を用いて表せ．

(3) (2) の点 C に対して，三角形 ABC の面積を S とする．t が変化するとき，S の最小値とそのときの t^2 の値を求めよ．

(4) t が変化するとき，(2) の点 C の軌跡を求め，図示せよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{4}$ とする．$f(t) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 2x - 2\sin t \cos x|\,dx$ とおくとき，次に答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，x の方程式 $\sin 2x - 2\sin t \cos x = 0$ を解け．

(2) $f(t)$ を求めよ．

(3) t が変化するとき，$f(t)$ の最大値と最小値，およびそれらを与える t の値を求めよ．

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\,dt$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $t > 0$ とする．曲線 $C : y = e^{-2x}$ の点 $(t,\ e^{-2t})$ における接線を l とし，l と x 軸の交点を $\mathrm{P}(p,\ 0)$，l と y 軸の交点を $\mathrm{Q}(0,\ q)$ とする．次に答えよ．ただし，O は原点とし，e は自然対数の底とする．

(1) p，q を t を用いて表せ．

(2) 三角形 OPQ の面積を S とする．t が変化するとき，S の最大値とそのときの t の値を求めよ．

(3) 三角形 OPQ を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_1 とする．また，$a > p$ とし，曲線 C と x 軸および 2 直線 l，$x = a$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_2 とする．

(i) $\displaystyle\lim_{a\to\infty} \frac{V_1}{V_2}$ を求めよ．

(ii) (2) で求めた t の値に対して，$\dfrac{V_1}{V_2} = 24$ をみたす a の値を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $$S_n = 3a_n + n^2 - 2n \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots ①$$

① に $n=1$ を代入すると，$S_1 = a_1$ より

$$a_1 = 3a_1 + 1^2 - 2{\cdot}1 \quad ゆえに \quad \boldsymbol{a_1 = \frac{1}{2}}$$

① に $n=2$ を代入すると，$S_2 = a_1 + a_2 = \dfrac{1}{2} + a_2$ より

$$\frac{1}{2} + a_2 = 3a_2 + 2^2 - 2{\cdot}2 \quad ゆえに \quad \boldsymbol{a_2 = \frac{1}{4}}$$

(2) ① から $$S_{n+1} = 3a_{n+1} + (n+1)^2 - 2(n+1) \quad \cdots ②$$

② から ① の辺々を引くと，$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ より

$$a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n) + 2n - 1 \quad ゆえに \quad a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n - n + \frac{1}{2} \quad \cdots ③$$

$a_{n+1} - \{p(n+1) + q\} = r\{a_n - (pn + q)\}$ より

$$a_{n+1} = ra_n + p(1-r)n + p + q(1-r) \quad \cdots ④$$

③，④ より $\quad r = \dfrac{3}{2}, \quad p(1-r) = -1, \quad q(1-r) = \dfrac{1}{2}$

これを解いて $\quad \boldsymbol{p = 2,\ q = 3,\ r = \dfrac{3}{2}}$

(3) (2) の結果から $\quad a_{n+1} - \{2(n+1) + 3\} = \dfrac{3}{2}\{a_n - (2n+3)\}$

数列 $\{a_n - (2n+3)\}$ は，初項が $a_1 - (2{\cdot}1 + 3) = -\dfrac{9}{2}$，公比が $\dfrac{3}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n - (2n+3) = -\frac{9}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad よって \quad \boldsymbol{a_n = 2n + 3 - \frac{9}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}$$

これを ① に代入して

$$\begin{aligned} S_n &= 3\left\{2n + 3 - \frac{9}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right\} + n^2 - 2n \\ &= \boldsymbol{n^2 + 4n + 9 - 9\left(\frac{3}{2}\right)^n} \end{aligned}$$

(4) (3) の結果から

$$T_n = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k a_k = \sum_{k=1}^{n}\{(-1)^{2k-1}a_{2k-1} + (-1)^{2k}a_{2k}\}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(a_{2k} - a_{2k-1})$$

ここで $\quad a_{2k} = 2\cdot 2k + 3 - \frac{9}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2k-1} = 4k + 3 - 3\left(\frac{3}{2}\right)^{2k}$

$$a_{2k-1} = 2(2k-1) + 3 - \frac{9}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2k-2} = 4k + 1 - 2\left(\frac{3}{2}\right)^{2k}$$

ゆえに $\quad a_{2k} - a_{2k-1} = 2 - \left(\frac{3}{2}\right)^{2k} = 2 - \frac{9}{4}\left(\frac{9}{4}\right)^{k-1}$

よって $\quad T_n = \sum_{k=1}^{n}\left\{2 - \frac{9}{4}\left(\frac{9}{4}\right)^{k-1}\right\} = 2n - \frac{9}{4} \times \frac{\left(\frac{9}{4}\right)^n - 1}{\frac{9}{4} - 1}$

$$= \boldsymbol{2n - \frac{9}{5}\left\{\left(\frac{9}{4}\right)^n - 1\right\}}$$

2 (1) $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ より

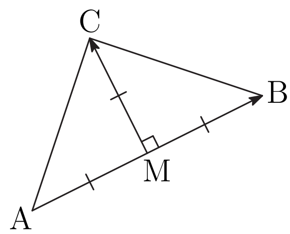
$$ac + \frac{b}{c} - 2\sqrt{ab} = \left(\sqrt{ac} - \sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad ac + \frac{b}{c} \geqq \sqrt{2ab}$$

また，等号が成り立つのは $\quad \sqrt{ac} = \sqrt{\frac{b}{c}} \quad$ すなわち $\quad ac = \frac{b}{c}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (p,\ q)$，$\overrightarrow{\mathrm{MC}} = r(-q,\ p)$ より，

$\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を 90° だけ回転し r 倍したもの．

また，$|\overrightarrow{\mathrm{MC}}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ であるから $\quad \boldsymbol{r = \frac{1}{2}}$



$\mathrm{A}\left(-\frac{1}{t},\ t\right)$，$\mathrm{B}\left(t,\ \frac{2}{t}\right)$ から

$$p = t - \left(-\frac{1}{t}\right) = \boldsymbol{t + \frac{1}{t}}, \quad q = \boldsymbol{\frac{2}{t} - t}$$

M は，AB の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} = \frac{1}{2}(p,\ q) + \frac{1}{2}(-q,\ p)$$
$$= \frac{1}{2}(p - q,\ p + q) = \left(t - \frac{1}{2t},\ \frac{3}{2t}\right)$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$$= \left(-\frac{1}{t},\ t\right) + \left(t - \frac{1}{2t},\ \frac{3}{2t}\right) = \left(t - \frac{3}{2t},\ t + \frac{3}{2t}\right)$$

$\mathrm{C}(x,\ y)$ より　$\boldsymbol{x = t - \dfrac{3}{2t},\quad y = t + \dfrac{3}{2t}}$

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{MC}}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cdot\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = \frac{1}{4}(p^2 + q^2)$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\left(t + \frac{1}{t}\right)^2 + \left(\frac{2}{t} - t\right)^2\right\} = \frac{1}{4}\left(2t^2 + \frac{5}{t^2}\right) - \frac{1}{2}$$

(1) の結果を利用すると

$$S \geqq \frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{2t^2\cdot\frac{5}{t^2}} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{10} - 1}{2}$$

上式において，等号が成立するとき

$$2t^2 = \frac{5}{t^2}\quad \text{ゆえに}\quad t^2 = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

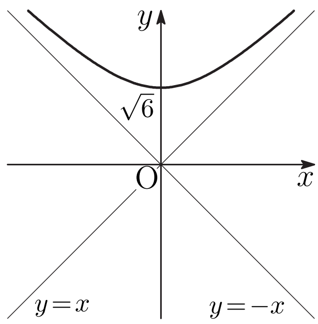
よって，S は，$\boldsymbol{t^2 = \sqrt{\dfrac{5}{2}}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{10} - 1}{2}}$ をとる．

(4) (2) の結果から　$x + y = 2t,\ x - y = -\dfrac{3}{t}$

上の 2 式から t を消去すると

$$(x + y)(x - y) = -6\quad \text{ゆえに}\quad x^2 - y^2 = -6$$

$t > 0$ より，$y > 0$ であるから，求める C の軌跡は次のようになる．



$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき，$\sin 2x - 2\sin t\cos x = 0$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ より

$2\cos x(\sin x - \sin t) = 0$　これを解いて　$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{2},\ t}$

(2) $g(x) = \sin 2x - 2\sin t\cos x = 2\cos x(\sin x - \sin t)$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$0 \leqq x \leqq t$ のとき $g(x) \leqq 0$,　$t \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $g(x) \geqq 0$　$\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$

$g(x)$ の原始関数の 1 つを $G(x) = -\dfrac{1}{2}\cos 2x - 2\sin t\sin x$ とおくと

$$\begin{aligned}
f(t) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |g(x)|\,dx = -\int_0^t g(x)\,dx + \int_t^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,dx \\
&= -\Big[\ G(x)\ \Big]_0^t + \Big[\ G(x)\ \Big]_t^{\frac{\pi}{2}} = -2G(t) + G(0) + G\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&= -2\left(-\frac{1}{2}\cos 2t - 2\sin^2 t\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - 2\sin t\right) \\
&= \cos 2t + 4\sin^2 t - 2\sin t \\
&= \boldsymbol{2\sin^2 t - 2\sin t + 1}
\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　　$f(t) = 2\left(\sin t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}$

$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{4}$ より　$0 \leqq \sin t \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

よって　$\sin t = \dfrac{1}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{t = \dfrac{\pi}{6}}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

$\sin t = 0$　すなわち　$\boldsymbol{t = 0}$ のとき　最大値 $\mathbf{1}$

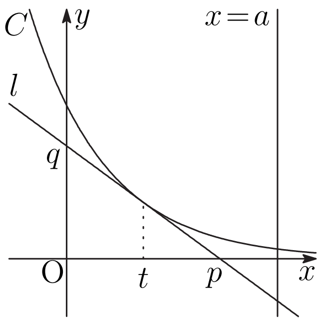
(4) (2) の結果から　$f(t) = -\cos 2t - 2\sin t + 2$

よって

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\,dt &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-\cos 2t - 2\sin t + 2)\,dt \\
&= \left[-\frac{\sin 2t}{2} + 2\cos t + 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{2} + \sqrt{2} - \frac{5}{2}}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $y=e^{-2x}$ を微分すると　$y'=-2e^{-2x}$

C 上の点 $(t,\ e^{-2t})$ における接線の方程式は



$$y-e^{-2t}=-2e^{-2t}(x-t)$$
$$y=-2e^{-2t}\left(x-t-\frac{1}{2}\right)$$

$y=0$ のとき　$p-t-\dfrac{1}{2}=0$

$x=0$ のとき　$q=-2e^{-2t}\left(-t-\dfrac{1}{2}\right)$

よって　　$\boldsymbol{p=t+\dfrac{1}{2},\ \ q=e^{-2t}(2t+1)}$

(2) (1) の結果から　$S=\dfrac{1}{2}pq=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2e^{-2t}$

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt}&=2\left(t+\frac{1}{2}\right)e^{-2t}-2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2e^{-2t}\\&=2\left(t+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-t\right)e^{-2t}\end{aligned}$$

したがって，S の増減表は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$\frac{dS}{dt}$		$+$	0	$-$
S		$\nearrow$	極大 e^{-1}	$\searrow$

よって，S は $\boldsymbol{t=\dfrac{1}{2}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{e^{-1}}$ をとる．

(3)　(i) (1) の結果から

$$\begin{aligned}V_1&=\frac{1}{3}\pi q^2p=\frac{\pi}{6}(2t+1)^3e^{-4t},\\V_2&=\pi\int_t^a(e^{-2x})^2\,dx-\frac{\pi}{3}(e^{-2t})^2(p-t)\\&=\pi\left[-\frac{1}{4}e^{-4x}\right]_t^a-\frac{\pi}{3}e^{-4t}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{12}e^{-4t}-\frac{\pi}{4}e^{-4a}\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{a\to\infty}e^{-4a}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}V_2=\frac{\pi}{12}e^{-4t}$

よって　　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{V_1}{V_2}=\boldsymbol{2(2t+1)^3}$

(ii) $t=\dfrac{1}{2}$ のとき　　$V_1=\dfrac{4\pi}{3e^2}$,　$V_2=\dfrac{\pi}{12e^2}-\dfrac{\pi}{4e^{4a}}$

$V_1=24V_2$ より　　$\dfrac{4\pi}{3e^2}=24\left(\dfrac{\pi}{12e^2}-\dfrac{\pi}{4e^{4a}}\right)$

整理すると　　$e^{4a}=9e^2$　よって　$\boldsymbol{a=\dfrac{1+\log 3}{2}}$