平成 26 年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
工学部　平成 26 年 2 月 25 日

- 数 I・II・III・A・B・C (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 空間において１点 O を固定し，O に関する位置ベクトルが $\vec{p}$ である点 P を P($\vec{p}$) で表す．4 点 O，A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) を頂点とする四面体 OABC において，線分 OA，OB，BC を $s:1-s$ $(0<s<1)$ に内分する点をそれぞれ D，E，F とする．また，3 点 A，B，C の定める平面を α とし，$\vec{h}=\vec{a}-\dfrac{9}{16}\vec{b}+\dfrac{9}{16}\vec{c}$ を位置ベクトルとする平面 α 上の点を H($\vec{h}$) とする．$\mathrm{OA}=\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{OB}=3\sqrt{2}$，$\mathrm{OC}=\mathrm{BC}=4$，$\mathrm{AC}=5$ として，次に答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および s を用いて表せ．また，内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ．

(2) 線分 OH の長さを求めよ．

(3) 3 点 D，E，F の定める平面が点 H を通るときの s の値を求めよ．

(4) s を (3) で求めた値とするとき，四面体 OAFC の体積 V を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 座標平面において，行列 $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ が表す移動 (1 次変換) を f とし，直線 $x+2y=1$ を ℓ とする．次に答えよ．

(1) 点 P$(p_1,\ p_2)$ が f によって移る点を Q$(q_1,\ q_2)$ とする．P が ℓ 上の点のとき，Q は ℓ 上にあることを示せ．

(2) ℓ 上の点 R は f によって R 自身に移る．

(a) R の座標を求めよ．

(b) R と異なる ℓ 上の点 P が f によって点 Q に移るとき，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{RP}}|}$ を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_1=1,\quad b_1=0,\quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

により定める．$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．さらに $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $s(t)$ はつねに $s'(t) > 0$ をみたし，$s(0) = 0$ とする．座標平面上を運動する点 P の座標 $(x,\ y)$ は，時刻 t の関数として

$$x = s(t), \quad y = \frac{1}{2}\{s(t)\}^2$$

で与えられ，点 P の速度 $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ は

$$|\vec{v}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \{s(t)\}^2}}$$

をみたすとする．また，$\alpha = s\left(-\dfrac{4}{3}\right)$，$\beta = s\left(\dfrac{4}{3}\right)$ とおく．次に答えよ．

(1) $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$ が成り立つように関数 $f(x)$ を定めよ．

(2) $\dfrac{4}{3} = \displaystyle\int_{-\frac{4}{3}}^{0} \frac{1}{f(x)} \frac{dx}{dt}\, dt$，$\dfrac{4}{3} = \displaystyle\int_{0}^{\frac{4}{3}} \frac{1}{f(x)} \frac{dx}{dt}\, dt$ を用いて，α，β の値を求めよ．

(3) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = g(x)$ が成り立つように関数 $g(x)$ を定めよ．また，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ のとき $g(x)$ が最大となる x の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $f(x) = -\tan x = \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$，$g(x) = \sin 2x \ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ について，次の問いに答えよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \tan x\, dx$，$\displaystyle\int \tan^2 x\, dx$ を求めよ．

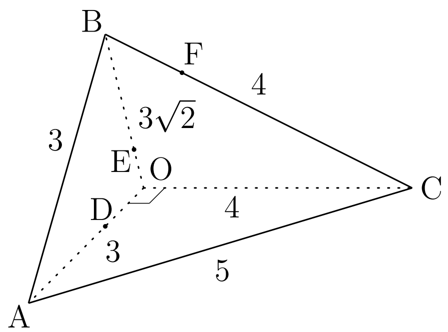
(2) $b > 0$ とする．曲線 $y = g(x)$ および 3 直線 $y = -b$，$x = 0$，$x = \dfrac{\pi}{4}$ で囲まれた部分を直線 $y = -b$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V_1 を b を用いて表せ．

(3) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき，不等式 $f(x) + g(x) \geqq 0$ を示せ．

(4) 2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ および直線 $x = \dfrac{\pi}{4}$ で囲まれた部分を直線 $y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V_2 を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 条件から



$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = s\vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OE}} = s\vec{b},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = (1-s)\vec{b} + s\vec{c}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \boldsymbol{s\vec{b} - s\vec{a}},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{DF}} = \overrightarrow{\mathrm{OF}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}}$$
$$= \boldsymbol{(1-s)\vec{b} + s\vec{c} - s\vec{a}}$$

$\beta = \angle\mathrm{BOC}$ とし，$\triangle\mathrm{OBC}$ に余弦定理を適用すると

$$\cos\beta = \frac{\mathrm{OB}^2 + \mathrm{OC}^2 - \mathrm{BC}^2}{2\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}} = \frac{(3\sqrt{2})^2 + 4^2 - 4^2}{2\cdot 3\sqrt{2}\cdot 4} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

よって　　$\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos\beta = 3\sqrt{2} \times 4 \times \dfrac{3\sqrt{2}}{8} = \mathbf{9}$

(2) $\alpha = \angle\mathrm{AOB}$ とし，$\triangle\mathrm{AOB}$ に余弦定理を適用すると

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}} = \frac{3^2 + (3\sqrt{2})^2 - 3^2}{2\cdot 3\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　　$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = 3 \times 3\sqrt{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 9$

$\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OC}^2 = \mathrm{AC}^2$ であるから　$\angle\mathrm{AOC} = 90^\circ$　ゆえに　$\vec{c}\cdot\vec{a} = 0$

$t = \dfrac{9}{16}$ とおくと，$\vec{h} = \vec{a} - t\vec{b} + t\vec{c}$ であるから

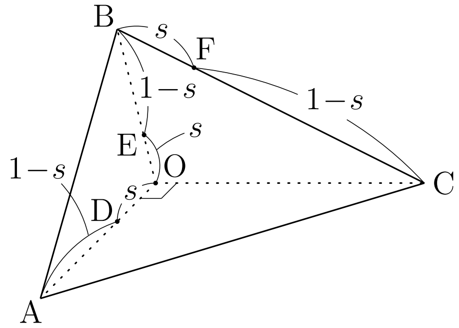
$$\begin{aligned}
|\vec{h}|^2 &= |\vec{a}|^2 + t^2|\vec{b}|^2 + t^2|\vec{c}|^2 - 2t\vec{a}\cdot\vec{b} - 2t^2\vec{b}\cdot\vec{c} + 2t\vec{c}\cdot\vec{a} \\
&= 3^2 + t^2\cdot(3\sqrt{2})^2 + t^2\cdot 4^2 - 2t\cdot 9 - 2t^2\cdot 9 + 2t\cdot 0 \\
&= 16t^2 - 18t + 9 = t(16t-9) - 9t + 9 \\
&= 9(1-t) = 9\left(1 - \frac{9}{16}\right) = \frac{9\cdot 7}{16}
\end{aligned}$$

よって　　$\mathrm{OH} = |\vec{h}| = \boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{7}}{4}}$

(3) $\vec{h}=\vec{a}+t(\vec{c}-\vec{b})$ より　　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

条件より　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{s}\overrightarrow{\mathrm{BF}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{1}{s}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{s}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$$



したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\frac{1}{s}\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\frac{t}{s}\overrightarrow{\mathrm{BF}}\\&=\frac{1}{s}\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\frac{t}{s}(\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\&=\frac{1}{s}\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\frac{t}{s}\left(\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\frac{1}{s}\overrightarrow{\mathrm{OE}}\right)\\&=\frac{1}{s}\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\frac{t}{s^2}\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\frac{t}{s}\overrightarrow{\mathrm{OF}}\end{aligned}$$

点 H が平面 DEF 上にあるから

$$\frac{1}{s}-\frac{t}{s^2}+\frac{t}{s}=1\quad\text{整理すると}\quad s^2-st-s+t=0$$

ゆえに　$(s-1)(s-t)=0$　$s\neq 1$ であるから　$s=t=\boldsymbol{\dfrac{9}{16}}$

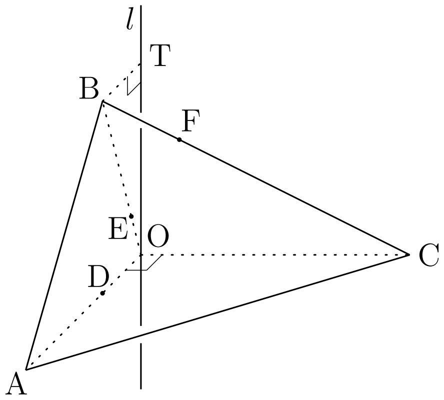
(4) (1)，(2) で得られた結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{h}&=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{a}-t\vec{b}+t\vec{c})\\&=-|\vec{a}|^2-t|\vec{b}|^2+(t+1)\vec{a}\cdot\vec{b}+t\vec{b}\cdot\vec{c}-t\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=-3^2-t\cdot(3\sqrt{2})^2+(t+1)\cdot 9+t\cdot 9-t\cdot 0=0\\\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{h}&=(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{a}-t\vec{b}+t\vec{c})\\&=-|\vec{a}|^2+t|\vec{c}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-t\vec{b}\cdot\vec{c}+(1-t)\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=-3^2+t\cdot 4^2+t\cdot 9-t\cdot 9+(1-t)\cdot 0\\&=16t-9=0\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\vec{h}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\vec{h}$ であるから，OH は O から平面 α に引いた垂線である．したがって，四面体 OABC の体積を V_0 とすると

$$V_0=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\times\mathrm{OH}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\times\frac{3\sqrt{7}}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{2}$$

よって　　$V=(1-s)V_0=\left(1-\dfrac{9}{16}\right)\times\dfrac{3\sqrt{7}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{21\sqrt{7}}{32}}$



別解 Oを通り，平面OACに垂直な直線をlとし，lと直線OBのなす角をγとすると

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

これに(1)，(2)の結果を代入すると

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{8}\right)^2+\cos^2\gamma=1$$

ゆえに　$|\cos\gamma|=\dfrac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}$

Bから直線lに垂線BTを引くと

$$\mathrm{OT}=\mathrm{OB}|\cos\gamma|=3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{7}}{4}$$

四面体OABCの体積をV_0とすると

$$V_0=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAC}\times\mathrm{OT}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot3\cdot4\times\frac{3\sqrt{7}}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{2}$$

よって　$V=(1-s)V_0=\left(1-\dfrac{9}{16}\right)\times\dfrac{3\sqrt{7}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{21\sqrt{7}}{32}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 行列 A の固有方程式は　$\lambda^2 - (\mathrm{tr}A)\lambda + \det A = 0$

すなわち　$\lambda^2 - \dfrac{7}{6}\lambda + \dfrac{1}{6} = 0$　これを解いて　$\lambda = 1,\ \dfrac{1}{6}$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} - \lambda \end{pmatrix}$$

固有値 $\lambda = 1,\ \dfrac{1}{6}$ に対する固有ベクトルの 1 つを，それぞれ次に定める．

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{v}$ は ℓ の方向ベクトルである．$k\vec{u} = \begin{pmatrix} 4k \\ 3k \end{pmatrix}$ が ℓ 上にあるとき

$$4k + 2{\cdot}3k = 1 \quad \text{これを解いて} \quad k = \frac{1}{10}$$

ℓ 上の任意の点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$ とすると，$\vec{p}$ は実数 t を用いて

$$\vec{p} = \frac{1}{10}\vec{u} + t\vec{v}$$

$\vec{p}$ の f による像 $\vec{q}$ は

$$\vec{q} = A\vec{p} = A\left(\frac{1}{10}\vec{u} + t\vec{v}\right) = \frac{1}{10}\vec{u} + \frac{t}{6}\vec{v}$$

よって，P が ℓ 上の点のとき，f による P の像 Q も ℓ 上にある．

(2) (a) ℓ 上の f による不動点の位置ベクトルを $\dfrac{1}{10}\vec{u} + t_0\vec{v}$ とすると，(1) の結果により，その像から

$$\frac{1}{10}\vec{u} + t_0\vec{u} = \frac{1}{10}\vec{u} + \frac{t_0}{6}\vec{u} \quad \text{ゆえに} \quad t_0 = 0$$

求める不動点 R の位置ベクトルは　$\dfrac{1}{10}\vec{u} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

よって，求める R の座標は　$\left(\boldsymbol{\dfrac{2}{5}},\ \boldsymbol{\dfrac{3}{10}}\right)$

(b) 以上の結果から $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} + t\vec{v}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} + \dfrac{t}{6}\vec{v}$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{RP}} = t\vec{v}$, $\overrightarrow{\mathrm{RQ}} = \dfrac{t}{6}\vec{v}$

P が R と異なるとき，$t \neq 0$ であるから $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{RP}}|} = \boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(3) $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

ゆえに $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{10}\vec{u} + \dfrac{3}{10}\vec{v}$

したがって

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= A^{n-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = A^{n-1}\left(\frac{1}{10}\vec{u} + \frac{3}{10}\vec{v}\right) \\
&= \frac{1}{10}A^{n-1}\vec{u} + \frac{3}{10}A^{n-1}\vec{v} \\
&= \frac{1}{10}\vec{u} + \frac{3}{10\cdot 6^{n-1}}\vec{v} \\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{3}{10\cdot 6^{n-1}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{a_n = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{10\cdot 6^{n-2}}}$, $\boldsymbol{b_n = \dfrac{3}{10} - \dfrac{3}{10\cdot 6^{n-1}}}$

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{5}}, \quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{3}{10}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $x=s(t)$，$y=\dfrac{1}{2}\{s(t)\}^2$ をそれぞれ t で微分すると

$$\frac{dx}{dt}=s'(t),\quad \frac{dy}{dt}=s(t)s'(t)$$

ゆえに，点 P の速度 $\vec{v}$ は

$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=s'(t)(1,\ s(t))$$

$s'(t)>0$ に注意して　　$|\vec{v}|=s'(t)\sqrt{1+\{s(t)\}^2}$

与えられた $|\vec{v}|$ の条件により

$$s'(t)\sqrt{1+\{s(t)\}^2}=\frac{1}{\sqrt{1+\{s(t)\}^2}}$$

ゆえに　$s'(t)=\dfrac{1}{1+\{s(t)\}^2}$　　よって　$f(x)=\dfrac{dx}{dt}=\boldsymbol{\dfrac{1}{1+x^2}}$

(2) $s'(t)>0$ より，$s(t)$ は単調増加関数であるから

$$s\left(-\frac{4}{3}\right)<s(0)<s\left(\frac{4}{3}\right)\quad \text{ゆえに}\quad \alpha<0<\beta \quad \cdots ①$$

上式および (1) の結果を与えられた等式に適用すると

$$\frac{4}{3}=\int_{-\frac{4}{3}}^{0}\frac{1}{f(x)}\frac{dx}{dt}\,dt=\int_{\alpha}^{0}(x^2+1)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{\alpha}^{0}=-\frac{\alpha^3}{3}-\alpha$$

$$\frac{4}{3}=\int_{0}^{\frac{4}{3}}\frac{1}{f(x)}\frac{dx}{dt}\,dt=\int_{0}^{\beta}(x^2+1)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{0}^{\beta}=\frac{\beta^3}{3}+\beta$$

ゆえに　　$(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+4)=0,\quad (\beta-1)(\beta^2+\beta+4)=0$

① に注意して　　$\boldsymbol{\alpha=-1,\ \beta=1}$

(3) (1) の結果から $\quad \dfrac{d^2x}{dt^2} = f'(x)\dfrac{dx}{dt}$

ゆえに $\quad g(x) = \dfrac{d^2x}{dt^2} = f'(x)f(x)$

$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ を微分すると $\quad f'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

したがって $\quad g(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} \times \dfrac{1}{1+x^2} = \boldsymbol{-\dfrac{2x}{(1+x^2)^3}}$

$g(x) = -2x(1+x^2)^{-3}$ を微分すると

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2(1+x^2)^{-3} - 2x\cdot(-3)(1+x^2)^{-4}\cdot 2x \\ &= \frac{-2(1+x^2)+12x^2}{(1+x^2)^4} = \frac{2(5x^2-1)}{(1+x^2)^4} \end{aligned}$$

(2) の結果から，$-1 \leqq x \leqq 1$ における $g(x)$ の増減表は，次のようになる．

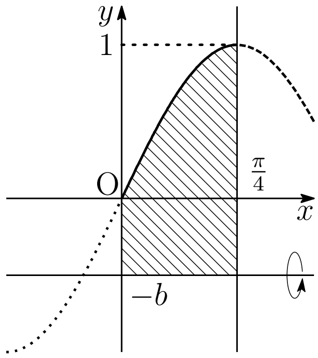
x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\cdots$	1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{25\sqrt{5}}{108}$	$\searrow$	$-\frac{25\sqrt{5}}{108}$	$\nearrow$	$-\frac{1}{4}$

よって，$-1 \leqq x \leqq 1$ において，$g(x)$ が最大となる x の値は $\quad \boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\displaystyle\int \tan x\,dx = \boldsymbol{-\log|\cos x| + C}$ **($\boldsymbol{C}$ は積分定数)**

$$\int \tan^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \boldsymbol{\tan x - x + C} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C}\textbf{ は積分定数)}$$

(2) V_1 は右の図の斜線部分を $y = -b$ のまわりに 1 回転したものであるから



$$\begin{aligned}\frac{V_1}{\pi} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2x + b)^2\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(b^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x + 2b\sin 2x\right) dx \\ &= \left[\ \left(b^2 + \frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{8}\sin 4x - b\cos 2x\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{8}(2b^2 + 1) + b\end{aligned}$$

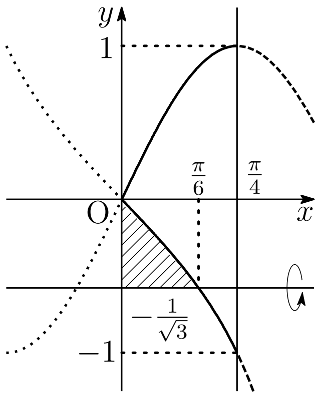
よって $\quad \boldsymbol{V_1 = \dfrac{\pi^2}{8}(2b^2 + 1) + b\pi}$

(3)
$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= -\tan x + \sin 2x \\ &= -\tan x + 2\sin x\cos x \\ &= -\tan x + 2\tan x\cos^2 x \\ &= \tan x(-1 + 2\cos^2 x) = \tan x\cos 2x\end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ において $\quad \tan x \geqq 0$，$\cos 2x \geqq 0$

よって $\quad f(x) + g(x) \geqq 0$

(4) 右の図の斜線部分を $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のまわりに1回転させた立体の体積を V とすると



$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(-\tan x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 dx\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\tan^2 x-\frac{2}{\sqrt{3}}\tan x+\frac{1}{3}\right)dx\\ &= \left[-\frac{2}{3}x+\tan x+\frac{2}{\sqrt{3}}\log|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{6}}\\ &= -\frac{\pi}{9}+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\log\frac{3}{4}\right)\end{aligned}$$

ゆえに　　$V=-\dfrac{\pi^2}{9}+\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\left(1+\log\dfrac{3}{4}\right)$

$b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときの V_1 を V_0 とおくと　$V_0=\dfrac{5}{24}\pi^2+\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$

よって，求める面積 V_2 は

$$\begin{aligned}V_2 &= V_0-V\\ &= \left(\frac{5}{24}\pi^2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)-\left\{-\frac{\pi^2}{9}+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(1+\log\frac{3}{4}\right)\right\}\\ &= \boldsymbol{\frac{23}{72}\pi^2-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\log\frac{3}{4}}\end{aligned}$$