平成25年度　九州工業大学2次試験前期日程(数学問題)
工学部　平成25年2月25日

- 数I・II・III・A・B・C (120分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 頂点がOで，各辺の長さが1である正四角錐(すい)O-ABCDがある．辺OA，COを$t : 1-t$ $(0 < t < 1)$に内分する点をそれぞれP，Qとし，辺ODを$k : 1-k$ $(0 < k < 1)$に内分する点をRとする．また，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$とおく．次に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．また，内積$\vec{a}\cdot\vec{c}$の値を求めよ．

(2) 内積$\overrightarrow{\mathrm{BR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$を$k$，$t$を用いて表せ．

(3) 点Rが3点P，B，Qの定める平面上にあるとする．

(i) kをtを用いて表せ．

(ii) tの値が変化するとき，kの最大値を求めよ．また，kが最大値をとるときの四角形PBQRの面積Sを求めよ．

2 a，b を実数とし，行列 A を 2 次の正方行列とする．x，y についての連立 1 次方程式を，行列を用いて

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \cdots(*)$$

と表す．次に答えよ．

(1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ のとき，連立 1 次方程式 $(*)$ を解け．

(2) c を実数とし，$a \neq 0$，$b \neq 0$ とする．また $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$ とする．

(i) $a \neq bc$ とする．連立 1 次方程式 $(*)$ がただ 1 つの解をもつことを示せ．また，連立 1 次方程式 $A^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ もただ 1 つの解をもつことを示せ．

(ii) 連立 1 次方程式 $(*)$ が解をもたないための必要十分条件を a，b，c を用いて表せ．この条件が成り立つとき，連立 1 次方程式 $A^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ も解をもたないことを示せ．

(iii) 連立 1 次方程式 $(*)$ が解を無数にもつための必要十分条件を a，b，c を用いて表せ．この条件が成り立つとき，自然数 m に対して，連立 1 次方程式

$$(A+A^2+A^3+\cdots+A^{2m-1})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

も解を無数にもつことを示せ．

3 関数 $f(x)=\log x$ がある．曲線 $y=f(x)$ の点 $(t,\ \log t)$ における接線の方程式を $y=g(x)$ とするとき，次に答えよ．ただし，対数は自然対数を表し，e は自然対数の底とする．

(1) $x>0$ のとき，不等式 $f(x)-g(x) \leqq 0$ を証明せよ．

(2) $t>\dfrac{1}{2}$ のとき，$\displaystyle\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} f(x)\,dx$ と $\displaystyle\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} g(x)\,dx$ をそれぞれ t を用いて表せ．

(3) 自然数 n に対して，$n!$ と $\sqrt{2}\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ の大小を比較せよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 曲線 $C_1 : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1\ (x \geqq 0)$ と曲線 $C_2 : x^2 + y^2 = 1\ (x \geqq 0)$ がある．曲線 C_1 の点 $\mathrm{P}(\sqrt{s},\ \sqrt{t})\ (s > 0,\ t > 0)$ における法線を l とする．次に答えよ．

(1) s を t を用いて表せ．また，直線 l の方程式を t を用いて表せ．

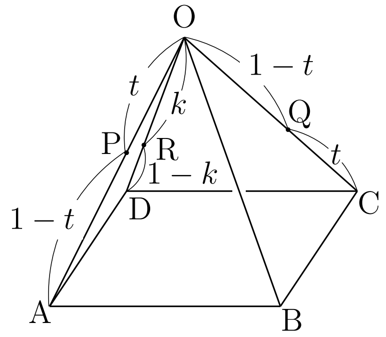
(2) 直線 l が曲線 C_2 に接するときの点 P の座標および接点 Q の座標を求めよ．

(3) P，Q は (2) で求めた点とし，点 $(0,\ 1)$ を R とする．曲線 C_1，弧 RQ および線分 PQ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}-\vec{b}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=\vec{a}+(\vec{c}-\vec{b})\\&=\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}}\end{aligned}$$



$\triangle\mathrm{AOC}\equiv\triangle\mathrm{ABC}$ であるから

$$\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$$

よって　　$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{c}=0}$

(2) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot1\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BR}}&=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=k(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})-\vec{b}\\&=k\vec{a}-(k+1)\vec{b}+k\vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=(1-t)\vec{c}-t\vec{a}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=\{k\vec{a}-(k+1)\vec{b}+k\vec{c}\}\cdot\{(1-t)\vec{c}-t\vec{a}\}\\&=k(1-t)\vec{a}\cdot\vec{c}-kt|\vec{a}|^2-(k+1)(1-t)\vec{b}\cdot\vec{c}\\&\qquad+(k+1)t\vec{a}\cdot\vec{b}+k(1-t)|\vec{c}|^2-kt\vec{a}\cdot\vec{c}\\&=0-kt-\frac{1}{2}(k+1)(1-t)+\frac{1}{2}(k+1)t+k(1-t)-0\\&=-kt+\frac{1}{2}k+t-\frac{1}{2}=\boldsymbol{(1-k)\left(t-\frac{1}{2}\right)}\end{aligned}$$

(3) (i)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=k\vec{a}-k\vec{b}+k\vec{c}\\&=k\cdot\frac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OP}}-k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+k\cdot\frac{1}{1-t}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\&=\frac{k}{t}\overrightarrow{\mathrm{OP}}-k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{k}{1-t}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\end{aligned}$$

点 R が 3 点 P，B，Q の定める平面上にあるとき

$$\frac{k}{t}-k+\frac{k}{1-t}=1\quad\text{ゆえに}\quad\boldsymbol{k=\frac{-t^2+t}{t^2-t+1}}$$

(ii) (i) の結果から　$k=\dfrac{1}{t^2-t+1}-1=\dfrac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-1$

ゆえに，k は $t=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$ をとる．

このとき，(2) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{BR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{BR}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

したがって　$S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{BR}}||\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$

$$\overrightarrow{\mathrm{BR}}=\frac{1}{3}(\vec{a}-4\vec{b}+\vec{c}),\quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{c})$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|&=\frac{1}{3}\sqrt{|\vec{a}|^2+16|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-8\vec{a}\cdot\vec{b}-8\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{c}}\\&=\frac{1}{3}\sqrt{1^2+16\cdot1^2+1^2-8\cdot\frac{1}{2}-8\cdot\frac{1}{2}+2\cdot0}=\frac{\sqrt{10}}{3}\\|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|&=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1^2-2\cdot0+1^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

よって　$S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{BR}}||\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{10}}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{6}}$

2　(1) $\begin{pmatrix}3&2\\6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ より

$$\begin{cases}3x+2y=a\\6x+4y=b\end{cases}\quad\text{ゆえに}\quad\begin{cases}6x+4y=2a\\6x+4y=b\end{cases}$$

よって　$\boldsymbol{2a\neq b}$ **のとき解なし**

　　　$\boldsymbol{2a=b}$ **のとき** $\boldsymbol{3x+2y=a}$ **を満たすすべての** $\boldsymbol{(x,\ y)}$ **が解**

(2)　(i) $a\neq bc$ より，$\det A=a-bc\neq0$ であるから，A^{-1} が存在する．

ゆえに，$(*)$ の解は　$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

$\det(A^2)=(\det A)^2=(a-bc)^2\neq0$ であるから，$(A^2)^{-1}$ が存在する．

ゆえに，$A^2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ の解は　$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(A^2)^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ より

$$\begin{cases} ax + by = a \\ cx + y = b \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} ax + by = a \\ bcx + by = b^2 \end{cases} \quad \cdots ①$$

$(*)$ が解をもたないとき　　$a = bc$，$a \neq b^2$

ゆえに　$a = bc \neq b^2$　さらに，$b \neq 0$ より　$a = bc,\ b \neq c$

逆に，$a = bc,\ b \neq c$ のとき，$\begin{pmatrix} bc & b \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc \\ b \end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{cases} bcx + by = bc \\ cx + y = b \end{cases} \quad \text{ゆえに，} b \neq 0 \text{ より} \quad \begin{cases} cx + y = c \\ cx + y = b \end{cases}$$

このとき，$b \neq c$ であるから，解をもたない.

よって，$(*)$ が解をもたないための必要十分条件は　$\boldsymbol{a = bc}$，$\boldsymbol{b \neq c}$

この条件をみたすとき

$A^2 = \begin{pmatrix} bc & b \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} bc & b \\ c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc(bc+1) & b(bc+1) \\ c(bc+1) & bc+1 \end{pmatrix} \cdots ②$，

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc \\ b \end{pmatrix}$ であるから，$A^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdots (**)$ は

$$\begin{cases} bc(b+1)x + b(bc+1)y = bc \\ c(b+1)x + (bc+1)y = b \end{cases}$$

$b \neq 0$ より　$\begin{cases} c(b+1)x + (bc+1)y = c \\ c(b+1)x + (bc+1)y = b \end{cases}$

よって，$a = bc,\ b \neq c$ のとき，$(**)$ も解をもたない.

(iii) ① より，$(*)$ が解を無数にもつとき　$a=bc$，$a=b^2$
ゆえに　$a=bc=b^2$　さらに，$b\neq 0$ より　$a=b^2,\ b=c$
逆に，$a=b^2,\ b=c$ のとき，$\begin{pmatrix} b^2 & b \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b^2 \\ b \end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{cases} b^2x+by=b^2 \\ bx+y=b \end{cases} \quad \text{ゆえに，} b\neq 0 \text{ より} \quad \begin{cases} bx+y=b \\ bx+y=b \end{cases}$$

このとき，解を無数にもつ．
よって，$(*)$ が解を無数にもつための必要十分条件は　$\boldsymbol{a=b^2}$，$\boldsymbol{b=c}$
この条件をみたすとき，② から　$A^2=(b^2+1)A$
ゆえに，自然数 n に対して　$A^n=(b^2+1)^{n-1}A$
したがって，$b\neq 0$ に注意して

$$\begin{aligned} A+A^2+A^3+\cdots+A^{2m-1} &= \sum_{k=1}^{2m-1}(b^2+1)^{k-1}A \\ &= \frac{(b^2+1)^{2m-1}-1}{b^2}A \\ &= \frac{(b^2+1)^{2m-1}-1}{b^2}\begin{pmatrix} b^2 & b \\ b & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

連立 1 次方程式

$$(A+A^2+A^3+\cdots+A^{2m-1})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \cdots(***)$$

は，$a=b^2$ であるから

$$\frac{(b^2+1)^{2m-1}-1}{b^2}\begin{pmatrix} b^2 & b \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b^2 \\ b \end{pmatrix}$$

この連立方程式は

$$\begin{cases} \dfrac{(b^2+1)^{2m-1}-1}{b^2}(b^2x+by)=b^2 \\ \dfrac{(b^2+1)^{2m-1}-1}{b^2}(bx+y)=b \end{cases}$$

$b\neq 0$ より
$$\begin{cases} \dfrac{(b^2+1)^{2m-1}-1}{b^2}(bx+b)=b \\ \dfrac{(b^2+1)^{2m-1}-1}{b^2}(bx+y)=b \end{cases}$$

よって，$a=b^2,\ b=c$ のとき，$(***)$ も無数に解をもつ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=\log x$ より　$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ \log t)$ における接線の方程式は

$$y-\log t=\frac{1}{t}(x-t)\quad ゆえに\quad y=\frac{x}{t}+\log t-1$$

したがって　$g(x)=\dfrac{x}{t}+\log t-1$　$\cdots$①

$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと $(x>0)$

$$h(x)=\log x-\left(\frac{x}{t}+\log t-1\right)$$

$$h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{t}=\frac{t-x}{tx}$$

x	(0)	$\cdots$	t	$\cdots$
$h'(x)$		$+$	0	$-$
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$

$h(x)$ の増減は，右のようになる．ゆえに　$h(x)\leqq 0$　$(x>0)$

よって，$x>0$ のとき，$f(x)-g(x)\leqq 0$ が成り立つ．

(2) $f(x)=\log x$ および ① から，$t>\dfrac{1}{2}$ のとき

$$\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} f(x)\,dx=\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}}\log x\,dx=\Big[x\log x-x\Big]_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}}$$

$$=\boldsymbol{\left(t+\frac{1}{2}\right)\log\left(t+\frac{1}{2}\right)-\left(t-\frac{1}{2}\right)\log\left(t-\frac{1}{2}\right)-1}$$

$$\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} g(x)\,dx=\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{t}+\log t-1\right)dx=\left[\frac{x^2}{2t}+(\log t-1)x\right]_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\log t}$$

(3) (1) の結果から，$f(x)\leqq g(x)$ において等号が成り立つのは $x=t$ のときに限る．ゆえに，自然数 k に対して

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} f(x)\,dx<\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} g(x)\,dx$$

が成り立つ．また，(2) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} f(x)\,dx=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}-n$$

$$=\log\sqrt{2}\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} g(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\log k=\log n!$$

よって　$$\boldsymbol{\sqrt{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}<n!}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\mathrm{P}(\sqrt{s},\ \sqrt{t})$ は曲線 C_1 上の点であるから $(s>0,\ t>0)$

$$\frac{(\sqrt{s}\,)^2}{4}+(\sqrt{t}\,)^2=1 \quad ゆえに \quad \boldsymbol{s=-4t+4}$$

$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を x について微分すると

$$\frac{x}{2}+2yy'=0 \quad ゆえに \quad -\frac{1}{y'}=\frac{4y}{x}$$

C_1 上の点 $\mathrm{P}(\sqrt{s},\ \sqrt{t})$ における法線 l の傾きは $\quad -\dfrac{1}{y'}=\dfrac{4\sqrt{t}}{\sqrt{s}}$

したがって，l の方程式は

$$y-\sqrt{t}=\frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{s}}(x-\sqrt{s}) \quad ゆえに \quad y=\frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{s}}x-3\sqrt{t}$$

$\sqrt{s}=2\sqrt{1-t}$ であるから $\qquad \boldsymbol{y=\dfrac{2\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}}x-3\sqrt{t}} \quad \cdots①$

(2) ① を $x^2+y^2=1$ に代入すると $\quad x^2+\left(\dfrac{2\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}}x-3\sqrt{t}\right)^2=1$

したがって $\qquad \dfrac{1+3t}{1-t}x^2-\dfrac{12t}{\sqrt{1-t}}x+9t-1=0 \quad \cdots②$

このとき，$D=0$ であるから

$$D/4=\left(-\frac{6t}{\sqrt{1-t}}\right)^2-\frac{1+3t}{1-t}\times(9t-1)=\frac{(3t-1)^2}{1-t}=0$$

上式より $t=\dfrac{1}{3}$ $\quad$ ゆえに $\quad \sqrt{t}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\sqrt{s}=2\sqrt{1-t}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

したがって $\qquad \mathbf{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{6}}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}}\right)$

$t=\dfrac{1}{3}$ を ①，② に代入すると

$$y=\sqrt{2}x-\sqrt{3}\cdots①',\quad 3x^2-2\sqrt{6}x+2=0\cdots②'$$

②$'$ から $\quad x=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ $\quad$ これを ①$'$ に代入して $\quad y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

したがって $\qquad \mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}\right)$

(3) ①$'$ より　$x=\dfrac{y+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(\frac{y+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2dy+\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}(4-4y^2)dy-\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}(1-y^2)dy\\&=\frac{1}{6}\Big[(y+\sqrt{3})^3\Big]_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}}+4\Big[y-\frac{y^3}{3}\Big]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}+\Big[\frac{y^3}{3}-y\Big]_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}\\&=\frac{1}{6}\times\frac{56}{9}\sqrt{3}+4\left(\frac{2}{3}-\frac{8}{27}\sqrt{3}\right)+\left(-\frac{2}{3}-\frac{8}{27}\sqrt{3}\right)\\&=2-\frac{4\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V=\dfrac{18-4\sqrt{3}}{9}\pi}$