平成24年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
数 I・II・III・A・B・C (120分)
工学部　平成24年2月25日

問題 1 2 3 4

1 1つのさいころを4回投げ，i 回目 $(i = 1, 2, 3, 4)$ に出る目を a_i とする．また，出る目の種類を数え，その数を m とする．例えば，$a_1 = 2$，$a_2 = 3$，$a_3 = 2$，$a_4 = 5$ のとき，2，3，5の3種類の目が出たので $m = 3$ とする．次に答えよ．

(1) $m = 1$ となる場合は何通りあるか．

(2) $m = 2$ となる確率を求めよ．

(3) m の期待値を求めよ．

(4) $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4$ となる確率を求めよ．

2 四面体OABCは $\mathrm{OA} = 1$，$\mathrm{OB} = \sqrt{15}$，$\mathrm{OC} = 2$，$\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{AOC} = \dfrac{\pi}{3}$ を満たしている．線分OAとOBを $s : 1 - s$ $(0 < s < 1)$ に内分する点をそれぞれP，Qとし，△CPQの重心をGとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$，$\angle\mathrm{BOC} = \theta$ $(0 < \theta < \pi)$ として，次に答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ と s を用いて表せ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ は平面ABCに垂直であるとする．

(a) s と $\cos\theta$ の値を求めよ．

(b) 線分OGとBCの長さ，および $\angle\mathrm{BAC}$ を求めよ．

(c) 四面体OABCの体積 V を求めよ．

3 $\alpha > 1$，$x > 0$ とする．Oを原点とする座標平面上に3点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ \alpha)$，$\mathrm{P}(\sqrt{x},\ 0)$ がある．次に答えよ．

(1) $\sin\angle\mathrm{OPB}$ と $\sin\angle\mathrm{APB}$ を α と x を用いて表せ．

(2) $\sin\angle\mathrm{APB}$ を x の関数と考え，その関数を $f(x)$ とおく．$f(x)$ の最大値を α を用いて表せ．

(3) (2)で求めた最大値が $\dfrac{1}{2}$ となる α を求めよ．

4 a，b を実数とし，関数 $f(x)$，$g(x)$ を $f(x)=a(e^x+e^{-x})$，$g(x)=4x+b$ とする．曲線 $C: y=f(x)$ の点 $(\log 3,\ f(\log 3))$ における接線が直線 $l: y=g(x)$ と一致するとき，次に答えよ．ただし，対数は自然対数を表し，e は自然対数の底とする．また，$\log 3<1.1$ を用いてよい．

(1) a，b の値を求めよ．

(2) 曲線 C と直線 l および直線 $x=-\log 3$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(3) 曲線 C と直線 l および直線 $x=-\log 3$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

解答例

1 (1) $m=1$ となるのは，4 回とも同じ目である場合であり，**6** 通りある．

(2) $m=2$ となるのは，2 種類の目の選び方 ${}_6\mathrm{C}_2$ 通りに対して，その目の出方は，1 種類になる場合を除いた 2^4-2 通りあるから，求める確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2\times(2^4-2)}{6^4}=\boldsymbol{\frac{35}{216}}$$

(3) $m=1$ となる確率は，(1) の結果から $\dfrac{6}{6^4}=\dfrac{1}{216}$

$m=3$ となるのは 3 種類の目の選び方 ${}_6\mathrm{C}_3$ 通りに対して，その目の出方は，2 種類になる場合と 1 種類になる場合を除いた $3^4-{}_3\mathrm{C}_2\cdot(2^4-2)-3$ 通りであるから，その確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_3\times\{3^4-{}_3\mathrm{C}_2\cdot(2^4-2)-3\}}{6^4}=\frac{120}{216}$$

$m=4$ となる確率は $\dfrac{{}_6\mathrm{P}_4}{6^4}=\dfrac{60}{216}$

よって，求める m の期待値は

$$1\times\frac{1}{216}+2\times\frac{35}{216}+3\times\frac{120}{216}+4\times\frac{60}{216}=\boldsymbol{\frac{671}{216}}$$

解説 $m=3$ となる確率は，$m=1,2,4$ となる事象の余事象の確率であるから

$$1-\left(\frac{1}{216}+\frac{35}{216}+\frac{60}{216}\right)=\frac{120}{216}$$

(4) $a_1\leqq a_2\leqq a_3\leqq a_4$ を満たす a_1，a_2，a_3，a_4 の組合せの総数は，1 から 6 の 6 種類の数から重複を許して 4 個とる組合せの数であるから

$${}_6\mathrm{H}_4={}_{6+4-1}\mathrm{C}_4={}_9\mathrm{C}_4=126\ (\text{通り})$$

よって，求める確率は $\dfrac{126}{6^4}=\boldsymbol{\dfrac{7}{72}}$

解説 5 つの仕切り (|) があれば，1〜6 の数に分けることができるので，区切られた仕切りの左側から 1〜6 とする．たとえば

○|||○○||○ は $a_1=1,\ a_2=a_3=4,\ a_4=6$
|○|||○○○| は $a_1=2,\ a_2=a_3=a_4=5$

このように考えると，5 つの | と 4 つの○の配列の仕方の総数が 6 種類の数から 4 個の数の選び方の総数である．これは同じものを含む順列で，$9=(6-1)+4$ 個の場所から 4 個の○の場所を選ぶ組合せの数 ${}_9\mathrm{C}_4$ である．

■

2 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\vec{b}$ であるから，△CPQ の重心 G の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})=\boldsymbol{\frac{s}{3}(\vec{a}+\vec{b})+\frac{1}{3}\vec{c}}$$

(2) (a) $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{15}$，$|\vec{c}|=2$，

$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{BOC}=\theta\ (0<\theta<\pi)$ であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{2}=0$$
$$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\frac{\pi}{3}=1\cdot2\cdot\frac{1}{2}=1$$
$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta=\sqrt{15}\cdot2\cos\theta=2\sqrt{15}\cos\theta$$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ が平面 ABC に垂直であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから

$$s(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}-\vec{a})+\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$$
$$s(|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2)+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}=0$$
$$14s+2\sqrt{15}\cos\theta-1=0\quad\cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ であるから

$$s(\vec{a}+\vec{b})(\vec{c}-\vec{a})+\vec{c}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$$
$$s(\vec{a}\cdot\vec{c}-|\vec{a}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{c}|^2-\vec{a}\cdot\vec{c}=0$$
$$(2\sqrt{15}\cos\theta)s+3=0\quad\cdots②$$

①，② より　$(1-14s)s+3=0$　ゆえに　$(2s-1)(7s+3)=0$

$0<s<1$ に注意して　$\boldsymbol{s=\frac{1}{2}}$　ゆえに　$\boldsymbol{\cos\theta=-\frac{\sqrt{15}}{5}}$

(b) 以上の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{6}(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c})$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=-6$

$$\begin{aligned}\mathrm{OG}=|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|&=\frac{1}{6}\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+4|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}\cdot\vec{c}+4\vec{a}\cdot\vec{c}}\\&=\frac{1}{6}\sqrt{1^2+(\sqrt{15})^2+4\cdot2^2+2\cdot0+4\cdot(-6)+4\cdot1}\\&=\frac{1}{6}\sqrt{12}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{BC} = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = |\vec{c} - \vec{b}| &= \sqrt{|\vec{c}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{b}|^2} \\
&= \sqrt{2^2 - 2\cdot(-6) + (\sqrt{15})^2} = \boldsymbol{\sqrt{31}} \\
\mathrm{CA} = |\overrightarrow{\mathrm{CA}}| = |\vec{a} - \vec{c}| &= \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2} \\
&= \sqrt{1^2 - 2\cdot 1 + 2^2} = \sqrt{3} \\
\mathrm{AB} = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\vec{b} - \vec{a}| &= \sqrt{|\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2} \\
&= \sqrt{(\sqrt{15})^2 - 2\cdot 0 + 1^2} = 4
\end{aligned}$$

△ABC に余弦定理を適用すると

$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{\mathrm{CA}^2 + \mathrm{AB}^2 - \mathrm{BC}^2}{2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}} = \frac{(\sqrt{3})^2 + 4^2 - (\sqrt{31})^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot 4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって　　$\boldsymbol{\angle\mathrm{BAC} = \frac{5}{6}\pi}$

(c) O から平面 ABC に垂線 OH を引くと，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = k\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ (k は実数) から

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{k}{6}(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}) = \frac{k}{6}\vec{a} + \frac{k}{6}\vec{b} + \frac{k}{3}\vec{c}$$

H は平面 ABC 上の点であるから

$$\frac{k}{6} + \frac{k}{6} + \frac{k}{3} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad k = \frac{3}{2}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ より　　$\mathrm{OH} = \frac{3}{2}\mathrm{OG} = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

△ABC の面積は

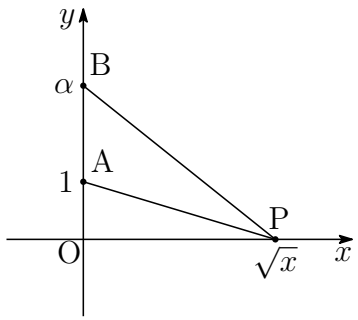
$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 4\sin\frac{5}{6}\pi = \sqrt{3}$$

よって，求める四面体 OABC の体積 V は

$$V = \frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{OH} = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

■

3 (1) 右の図から



$$\sin\angle\mathrm{OPB} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{PB}} = \boldsymbol{\frac{\alpha}{\sqrt{x+\alpha^2}}}$$

$$\cos\angle\mathrm{OPB} = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PB}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\alpha^2}}$$

$$\sin\angle\mathrm{OPA} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{PA}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$\cos\angle\mathrm{OPA} = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PA}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$$

したがって

$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{APB} &= \sin(\angle\mathrm{OPB} - \angle\mathrm{OPA})\\ &= \sin\angle\mathrm{OPB}\cos\angle\mathrm{OPA} - \cos\angle\mathrm{OPB}\sin\angle\mathrm{OPA}\\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{x+\alpha^2}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\alpha^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+1}}\\ &= \boldsymbol{\frac{(\alpha-1)\sqrt{x}}{\sqrt{(x+1)(x+\alpha^2)}}}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{(\alpha-1)\sqrt{x}}{\sqrt{(x+1)(x+\alpha^2)}} = \frac{(\alpha-1)\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+(\alpha^2+1)x+\alpha^2}}\\ &= \frac{\alpha-1}{\sqrt{x+(\alpha^2+1)+\dfrac{\alpha^2}{x}}} = \frac{\alpha-1}{\sqrt{\left(\sqrt{x}-\dfrac{\alpha}{\sqrt{x}}\right)^2+(\alpha+1)^2}}\end{aligned}$$

$\alpha > 1$ より　$\sqrt{x} - \dfrac{\alpha}{\sqrt{x}} = 0$　すなわち　$x = \alpha$ のとき，最大値

$$f(\alpha) = \frac{\alpha-1}{\sqrt{(\alpha+1)^2}} = \boldsymbol{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}$$

をとる．

(3) (2) の結果から　$\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1} = \dfrac{1}{2}$　$\alpha > 1$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{\alpha = 3}$ ■

4 (1) $f(x)=a(e^x+e^{-x})$ より　$f'(x)=a(e^x-e^{-x})$

$$f(\log 3)=a(e^{\log 3}+e^{-\log 3})=a\left(3+\frac{1}{3}\right)=\frac{10}{3}a$$
$$f'(\log 3)=a(e^{\log 3}-e^{-\log 3})=a\left(3-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{3}a$$

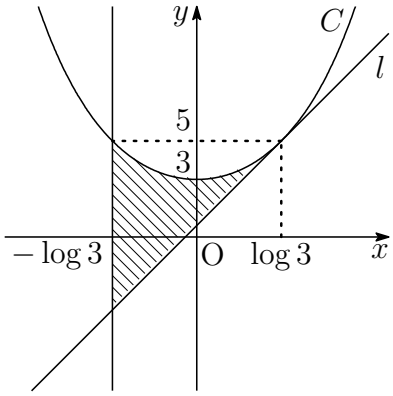
ゆえに $C: y=f(x)$ の点 $(\log 3,\ f(\log 3))$ における接線は

$$y-\frac{10}{3}a=\frac{8}{3}a(x-\log 3)\quad \text{すなわち}\quad y=\frac{8}{3}ax+\left(\frac{10}{3}-\frac{8}{3}\log 3\right)a$$

これが $y=4x+b$ と一致するから　$\dfrac{8}{3}a=4,\quad \left(\dfrac{10}{3}-\dfrac{8}{3}\log 3\right)a=b$

よって　　$\boldsymbol{a=\dfrac{3}{2},\ b=5-4\log 3}$

(2) 求める面積 S は



$$\begin{aligned}S&=\int_{-\log 3}^{\log 3}\left\{\frac{3}{2}(e^x+e^{-x})-(4x+b)\right\}dx\\&=2\int_0^{\log 3}\left\{\frac{3}{2}(e^x+e^{-x})-b\right\}dx\\&=\Big[\,3(e^x-e^{-x})-2bx\,\Big]_0^{\log 3}\\&=8-2b\log 3=8-2(5-4\log 3)\log 3\\&=\boldsymbol{8-10\log 3+8(\log 3)^2}\end{aligned}$$

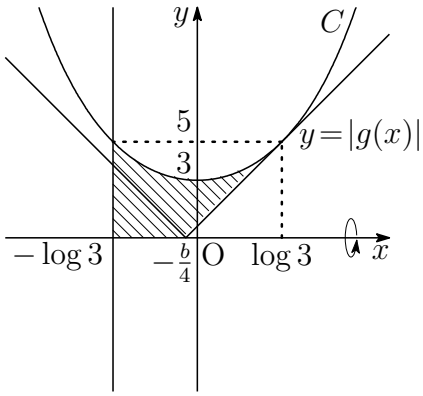
(3) (1) の結果から　$b = 4\left(\dfrac{5}{4} - \log 3\right) = 4\left(\dfrac{5}{4} - 1.1\right) > 0$

$f(x) \geqq 4x + b$ および C は y 軸に関して対称であるから　$f(x) \geqq 4|\,x\,| + b$

このとき，$|4x + b| \leqq |4x| + |\,b\,| = 4|\,x\,| + b$ であるから　$f(x) \geqq |4x + b|$

$y = |4x + b|$ の x 軸との交点の x 座標は　$-\dfrac{b}{4} = \log 3 - \dfrac{5}{4}$

求める体積 V は，図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させた体積である．



したがって

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-\log_3}^{\log 3} \left\{\frac{3}{2}(e^x + e^{-x})\right\}^2 dx - \frac{1}{3}\left\{\log 3 - \left(-\frac{b}{4}\right)\right\} \cdot \pi \cdot 5^2 \\
&= \frac{9}{4}\pi \int_0^{\log 3} (2e^{2x} + 4 + 2e^{-2x}) dx - \frac{1}{3}\left\{\log 3 - \left(\log 3 - \frac{5}{4}\right)\right\} \cdot \pi \cdot 5^2 \\
&= \frac{9}{4}\pi \Big[\, e^{2x} + 4x - e^{-2x} \,\Big]_0^{\log 3} - \frac{125}{12}\pi \\
&= \frac{9}{4}\pi \left(9 + 4\log 3 - \frac{1}{9}\right) - \frac{125}{12}\pi \\
&= \boldsymbol{\left(\frac{115}{12} + 9\log 3\right)\pi}
\end{aligned}
$$

■