

## 平成 24 年度 九州工業大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

工学部 平成 24 年 2 月 25 日

● 数 I・II・III・A・B・C (120 分)

1 1 つのさいころを 4 回投げ、 $i$  回目 ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) に出る目を  $a_i$  とする。また、出る目の種類を数え、その数を  $m$  とする。例えば、 $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 2, a_4 = 5$  のとき、 $2, 3, 5$  の 3 種類の目が出たので  $m = 3$  とする。次に答えよ。

- (1)  $m = 1$  となる場合は何通りあるか。
- (2)  $m = 2$  となる確率を求めよ。
- (3)  $m$  の期待値を求めよ。
- (4)  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$  となる確率を求めよ。

2 四面体 OABC は  $OA = 1, OB = \sqrt{15}, OC = 2, \angle AOB = \frac{\pi}{2}, \angle AOC = \frac{\pi}{3}$  を満たしている。線分 OA と OB を  $s : 1 - s$  ( $0 < s < 1$ ) に内分する点をそれぞれ P, Q とし、 $\triangle CPQ$  の重心を G とする。 $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}, \angle BOC = \theta$  ( $0 < \theta < \pi$ ) として、次に答えよ。

- (1) ベクトル  $\vec{OG}$  を  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  と  $s$  を用いて表せ。
- (2) ベクトル  $\vec{OG}$  は平面 ABC に垂直であるとする。
  - (a)  $s$  と  $\cos \theta$  の値を求めよ。
  - (b) 線分 OG と BC の長さ、および  $\angle BAC$  を求めよ。
  - (c) 四面体 OABC の体積  $V$  を求めよ。

3  $\alpha > 1, x > 0$  とする。O を原点とする座標平面上に 3 点  $A(0, 1), B(0, \alpha), P(\sqrt{x}, 0)$  がある。次に答えよ。

- (1)  $\sin \angle OPB$  と  $\sin \angle APB$  を  $\alpha$  と  $x$  を用いて表せ。
- (2)  $\sin \angle APB$  を  $x$  の関数と考え、その関数を  $f(x)$  とおく。 $f(x)$  の最大値を  $\alpha$  を用いて表せ。
- (3) (2) で求めた最大値が  $\frac{1}{2}$  となる  $\alpha$  を求めよ。

4  $a, b$  を実数とし, 関数  $f(x), g(x)$  を  $f(x) = a(e^x + e^{-x}), g(x) = 4x + b$  とする. 曲線  $C: y = f(x)$  の点  $(\log 3, f(\log 3))$  における接線が直線  $l: y = g(x)$  と一致するとき, 次に答えよ. ただし, 対数は自然対数を表し,  $e$  は自然対数の底とする. また,  $\log 3 < 1.1$  を用いてよい.

- (1)  $a, b$  の値を求めよ.
- (2) 曲線  $C$  と直線  $l$  および直線  $x = -\log 3$  で囲まれた図形の面積  $S$  を求めよ.
- (3) 曲線  $C$  と直線  $l$  および直線  $x = -\log 3$  で囲まれた図形を  $x$  軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積  $V$  を求めよ.

## 正解

- 1 (1)  $m = 1$  となるのは、4回とも同じ目である場合であり、6通りある。  
 (2)  $m = 2$  となるのは、2種類の目の選び方  ${}_6C_2$  通りに対して、その目の出方は、1種類になる場合を除いた  $2^4 - 2$  通りあるから、求める確率は

$$\frac{{}_6C_2 \times (2^4 - 2)}{6^4} = \frac{35}{216}$$

- (3)  $m = 1$  となる確率は、(1)の結果から  $\frac{6}{6^4} = \frac{1}{216}$   
 $m = 3$  となるのは3種類の目の選び方  ${}_6C_3$  通りに対して、その目の出方は、2種類になる場合と1種類になる場合を除いた  $3^4 - {}_3C_2 \cdot (2^4 - 2) - 3$  通りであるから、その確率は

$$\frac{{}_6C_3 \times \{3^4 - {}_3C_2 \cdot (2^4 - 2) - 3\}}{6^4} = \frac{120}{216}$$

$$m = 4 \text{ となる確率は } \frac{{}_6P_4}{6^4} = \frac{60}{216}$$

よって、求める  $m$  の期待値は

$$1 \times \frac{1}{216} + 2 \times \frac{35}{216} + 3 \times \frac{120}{216} + 4 \times \frac{60}{216} = \frac{671}{216}$$

解説  $m = 3$  となる確率は、 $m = 1, 2, 4$  となる事象の余事象の確率であるから

$$1 - \left( \frac{1}{216} + \frac{35}{216} + \frac{60}{216} \right) = \frac{120}{216}$$

- (4)  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$  を満たす  $a_1, a_2, a_3, a_4$  の組合せの総数は、1から6の6種類の数から重複を許して4個とる組合せの数であるから

$${}_6H_4 = {}_{6+4-1}C_4 = {}_9C_4 = 126 \text{ (通り)}$$

$$\text{よって、求める確率は } \frac{126}{6^4} = \frac{7}{72}$$

解説 5つの仕切り ( | ) があれば、1~6の数に分けることができるので、区切られた仕切りの左側から1~6とする。たとえば

$$\begin{array}{l} ||| \quad || \quad \text{は } a_1 = 1, a_2 = a_3 = 4, a_4 = 6 \\ | \quad ||| \quad | \quad \text{は } a_1 = 2, a_2 = a_3 = a_4 = 5 \end{array}$$

このように考えると、5つの | と4つの の配列の仕方の総数が6種類の数から4個の数の選び方の総数である。これは同じものを含む順列で、 $9 = (6 - 1) + 4$  個の場所から4個の の場所を選ぶ組合せの数  ${}_9C_4$  である。

2 (1)  $\overrightarrow{OP} = s\vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OQ} = s\vec{b}$  であるから,  $\triangle CPQ$  の重心  $G$  の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OC}) = \frac{s}{3}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{3}\vec{c}$$

(2) (a)  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{15}$ ,  $|\vec{c}| = 2$ ,

$\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ ,  $\angle AOC = \frac{\pi}{3}$ ,  $\angle BOC = \theta$  ( $0 < \theta < \pi$ ) であるから

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| |\vec{c}| \cos \frac{\pi}{3} = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| |\vec{c}| \cos \theta = \sqrt{15} \cdot 2 \cos \theta = 2\sqrt{15} \cos \theta$$

$\overrightarrow{OG}$  が平面  $ABC$  に垂直であるから  $\overrightarrow{OG} \perp \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{OG} \perp \overrightarrow{AC}$   
 $\overrightarrow{OG} \perp \overrightarrow{AB}$  より,  $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  であるから

$$s(\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} - \vec{a}) + \vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

$$s(|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2) + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$14s + 2\sqrt{15} \cos \theta - 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$\overrightarrow{OG} \perp \overrightarrow{AC}$  より,  $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$  であるから

$$s(\vec{a} + \vec{b})(\vec{c} - \vec{a}) + \vec{c} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0$$

$$s(\vec{a} \cdot \vec{c} - |\vec{a}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{c}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$(2\sqrt{15} \cos \theta)s + 3 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より  $(1 - 14s)s + 3 = 0$  ゆえに  $(2s - 1)(7s + 3) = 0$

$0 < s < 1$  に注意して  $s = \frac{1}{2}$  ゆえに  $\cos \theta = -\frac{\sqrt{15}}{5}$

(b) 以上の結果から  $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{6}(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c})$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{c} = -6$

$$\begin{aligned} OG = |\overrightarrow{OG}| &= \frac{1}{6} \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 4|\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b} \cdot \vec{c} + 4\vec{a} \cdot \vec{c}} \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{1^2 + (\sqrt{15})^2 + 4 \cdot 2^2 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot (-6) + 4 \cdot 1} \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{12} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 BC &= |\overrightarrow{BC}| = |\vec{c} - \vec{b}| = \sqrt{|\vec{c}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{b}|^2} \\
 &= \sqrt{2^2 - 2\cdot(-6) + (\sqrt{15})^2} = \sqrt{31} \\
 CA &= |\overrightarrow{CA}| = |\vec{a} - \vec{c}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2} \\
 &= \sqrt{1^2 - 2\cdot 1 + 2^2} = \sqrt{3} \\
 AB &= |\overrightarrow{AB}| = |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{|\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2} \\
 &= \sqrt{(\sqrt{15})^2 - 2\cdot 0 + 1^2} = 4
 \end{aligned}$$

△ABC に余弦定理を適用すると

$$\cos \angle BAC = \frac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2CA \cdot AB} = \frac{(\sqrt{3})^2 + 4^2 - (\sqrt{31})^2}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot 4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{よって } \angle BAC = \frac{5}{6}\pi$$

(c) O から平面 ABC に垂線 OH を引くと,  $\overrightarrow{OH} = k\overrightarrow{OG}$  ( $k$  は実数) から

$$\overrightarrow{OH} = \frac{k}{6}(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}) = \frac{k}{6}\vec{a} + \frac{k}{6}\vec{b} + \frac{k}{3}\vec{c}$$

H は平面 ABC 上の点であるから

$$\frac{k}{6} + \frac{k}{6} + \frac{k}{3} = 1 \quad \text{ゆえに } k = \frac{3}{2}$$

$$\overrightarrow{OH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OG} \text{ より } OH = \frac{3}{2}OG = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

△ABC の面積は

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}CA \cdot AB \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \sin \frac{5}{6}\pi = \sqrt{3}$$

よって, 求める四面体 OABC の体積  $V$  は

$$V = \frac{1}{3}\triangle ABC \cdot OH = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$$

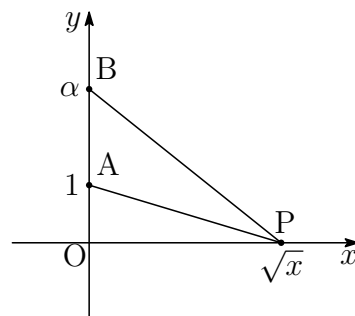
3 (1) 右の図から

$$\sin \angle OPB = \frac{OB}{PB} = \frac{\alpha}{\sqrt{x + \alpha^2}}$$

$$\cos \angle OPB = \frac{OP}{PB} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \alpha^2}}$$

$$\sin \angle OPA = \frac{OA}{PA} = \frac{1}{\sqrt{x + 1}}$$

$$\cos \angle OPA = \frac{OP}{PA} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + 1}}$$



したがって

$$\begin{aligned} \sin \angle APB &= \sin(\angle OPB - \angle OPA) \\ &= \sin \angle OPB \cos \angle OPA - \cos \angle OPB \sin \angle OPA \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{x + \alpha^2}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + 1}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \alpha^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x + 1}} \\ &= \frac{(\alpha - 1)\sqrt{x}}{\sqrt{(x + 1)(x + \alpha^2)}} \end{aligned}$$

(2) (1)の結果から

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(\alpha - 1)\sqrt{x}}{\sqrt{(x + 1)(x + \alpha^2)}} = \frac{(\alpha - 1)\sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + (\alpha^2 + 1)x + \alpha^2}} \\ &= \frac{\alpha - 1}{\sqrt{x + (\alpha^2 + 1) + \frac{\alpha^2}{x}}} = \frac{\alpha - 1}{\sqrt{\left(\sqrt{x} - \frac{\alpha}{\sqrt{x}}\right)^2 + (\alpha + 1)^2}} \end{aligned}$$

$\alpha > 1$  より  $\sqrt{x} - \frac{\alpha}{\sqrt{x}} = 0$  すなわち  $x = \alpha$  のとき, 最大値

$$f(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{\sqrt{(\alpha + 1)^2}} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

をとる.

(3) (2)の結果から  $\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = \frac{1}{2}$   $\alpha > 1$  に注意してこれを解くと  $\alpha = 3$

4 (1)  $f(x) = a(e^x + e^{-x})$  より  $f'(x) = a(e^x - e^{-x})$

$$f(\log 3) = a(e^{\log 3} + e^{-\log 3}) = a\left(3 + \frac{1}{3}\right) = \frac{10}{3}a$$

$$f'(\log 3) = a(e^{\log 3} - e^{-\log 3}) = a\left(3 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}a$$

ゆえに  $C : y = f(x)$  の点  $(\log 3, f(\log 3))$  における接線は

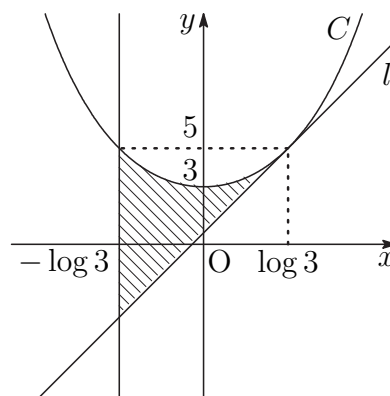
$$y - \frac{10}{3}a = \frac{8}{3}a(x - \log 3) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{8}{3}ax + \left(\frac{10}{3} - \frac{8}{3}\log 3\right)a$$

これが  $y = 4x + b$  と一致するから  $\frac{8}{3}a = 4, \quad \left(\frac{10}{3} - \frac{8}{3}\log 3\right)a = b$

よって  $a = \frac{3}{2}, \quad b = 5 - 4\log 3$

(2) 求める面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\log 3}^{\log 3} \left\{ \frac{3}{2}(e^x + e^{-x}) - (4x + b) \right\} dx \\ &= 2 \int_0^{\log 3} \left\{ \frac{3}{2}(e^x + e^{-x}) - b \right\} dx \\ &= \left[ 3(e^x - e^{-x}) - 2bx \right]_0^{\log 3} \\ &= 8 - 2b \log 3 = 8 - 2(5 - 4\log 3) \log 3 \\ &= 8 - 10 \log 3 + 8(\log 3)^2 \end{aligned}$$



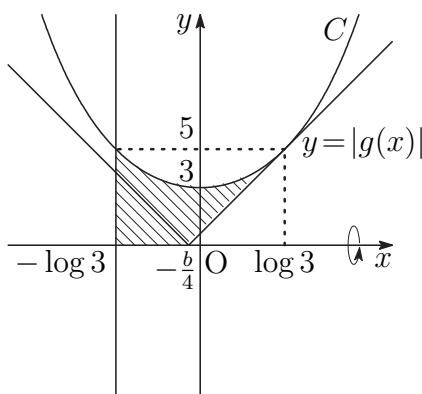
(3) (1) の結果から  $b = 4 \left( \frac{5}{4} - \log 3 \right) = 4 \left( \frac{5}{4} - 1.1 \right) > 0$

$f(x) \geq 4x + b$  および  $C$  は  $y$  軸に関して対称であるから  $f(x) \geq 4|x| + b$

このとき,  $|4x + b| \leq |4x| + |b| = 4|x| + b$  であるから  $f(x) \geq |4x + b|$

$y = |4x + b|$  の  $x$  軸との交点の  $x$  座標は  $-\frac{b}{4} = \log 3 - \frac{5}{4}$

求める体積  $V$  は, 図の斜線部分を  $x$  軸のまわりに 1 回転させた体積である.



したがって

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-\log 3}^{\log 3} \left\{ \frac{3}{2}(e^x + e^{-x}) \right\}^2 dx - \frac{1}{3} \left\{ \log 3 - \left( -\frac{b}{4} \right) \right\} \cdot \pi \cdot 5^2 \\
 &= \frac{9}{4} \pi \int_0^{\log 3} (2e^{2x} + 4 + 2e^{-2x}) dx - \frac{1}{3} \left\{ \log 3 - \left( \log 3 - \frac{5}{4} \right) \right\} \cdot \pi \cdot 5^2 \\
 &= \frac{9}{4} \pi \left[ e^{2x} + 4x - e^{-2x} \right]_0^{\log 3} - \frac{125}{12} \pi \\
 &= \frac{9}{4} \pi \left( 9 + 4 \log 3 - \frac{1}{9} \right) - \frac{125}{12} \pi \\
 &= \left( \frac{115}{12} + 9 \log 3 \right) \pi
 \end{aligned}$$