平成 23 年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
数 I・II・III・A・B・C (120 分)
工学部　平成 23 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4

1 四面体 OABC は $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=2$，$\mathrm{OC}=1$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=60^\circ$ をみたしている．線分 AB を $1:2$ に内分する点を M とし，線分 OM を $s:1-s\ (0<s<1)$ に内分する点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\angle\mathrm{BOC}=\theta\ (0^\circ<\theta<180^\circ)$ として，次に答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ と s を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ のとき，s を θ を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OM}}$，$\mathrm{BC}=\sqrt{\dfrac{17}{5}}$ とするとき，$\cos\theta$ と s の値を求めよ．

(4) $\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OM}}$，$\mathrm{BC}=\sqrt{\dfrac{17}{5}}$ とするとき，四面体 OABC の体積 V を求めよ．

2 実数 θ に対して，行列 A を $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ とする．また，n を自然数とし，A の n 乗を A^n で表す．次に答えよ．

(1) 数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して

$$A^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$$

が成立することを示せ．

(2) $\theta=\dfrac{\pi}{12}$ とする．ある自然数 n に対しては，行列 A^n によって曲線 $y=-\dfrac{1}{2x}$ 上の点が常に曲線 $x^2-y^2=-1$ 上の点に移される．このような自然数 n の最小値を求めよ．

$\boxed{3}$ 実数 $p > 0$ と関数 $f(x) = x^3 - x$ がある．2 曲線 $C_1 : y = f(x)$，
$C_2 : y = f(x+p) - p$ について，次に答えよ．

(1) 曲線 C_1 と C_2 が共有点を 2 個もつときの p の範囲を求めよ．

(2) 実数 α，β に対して

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\beta - x)(x - \alpha)\, dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

を示せ．

(3) p が (1) で求めた範囲を動くとき，曲線 C_1，C_2 によって囲まれた図形の面積 $S(p)$ の最大値を求めよ．

$\boxed{4}$ 曲線 $C_1 : y = \sqrt{x}\,|\log x|$ と曲線 $C_2 : y = \sqrt{x}$ がある．ただし，対数は自然数対数とする．次に答えよ．

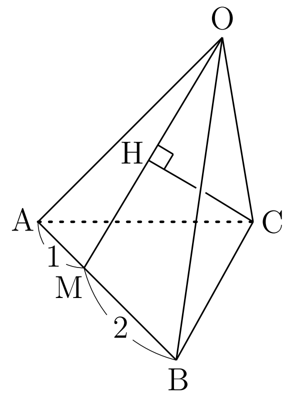
(1) 関数 $f(x) = \sqrt{x} \log x$ の増減，極値を調べ，曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ．ただし，$\displaystyle\lim_{x \to +0} \sqrt{x} \log x = 0$ であることを用いてよい．

(2) 曲線 C_1，C_2 は $x > 0$ において 2 つの交点をもつ．それらの座標を求めよ．

(3) (2) で求めた交点の x 座標を a，b $(a < b)$ とする．曲線 C_1，C_2 の $a \leqq x \leqq b$ の部分が囲む図形の面積 S を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) Mは，線分ABを1 : 2に内分する点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$$

OM : OH $= 1 : s$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \boldsymbol{\frac{2s}{3}\vec{a} + \frac{s}{3}\vec{b}}$$

また $\quad \overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \boldsymbol{\frac{2s}{3}\vec{a} + \frac{s}{3}\vec{b} - \vec{c}}$

(2)
$$\begin{aligned}
&|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 2,\ |\vec{c}| = 1,\\
&\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = 2\cdot2\cdot\frac{1}{2} = 2,\\
&\vec{a}\cdot\vec{c} = |\vec{a}||\vec{c}|\cos 60^\circ = 2\cdot1\cdot\frac{1}{2} = 1,\\
&\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta = 2\cdot1\cos\theta = 2\cos\theta
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}} = 0$ であるから

$$\begin{aligned}
9\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= \{s(2\vec{a}+\vec{b}) - 3\vec{c}\}\cdot(2\vec{a}+\vec{b})\\
&= s|2\vec{a}+\vec{b}|^2 - 3\vec{c}\cdot(2\vec{a}+\vec{b})\\
&= s(4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2) - 6\vec{a}\cdot\vec{c} - 3\vec{b}\cdot\vec{c}\\
&= s(4\cdot2^2 + 4\cdot2 + 2^2) - 6\cdot1 - 3\cdot2\cos\theta\\
&= 28s - 6 - 6\cos\theta
\end{aligned}$$

ゆえに $\quad 28s - 6 - 6\cos\theta = 0 \quad$ よって $\quad \boldsymbol{s = \frac{3\cos\theta + 3}{14}}$

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = \sqrt{\dfrac{17}{5}}$ より $\quad |\vec{c}-\vec{b}|^2 = \dfrac{17}{5}$ であるから

$$|\vec{c}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{b}|^2 = \frac{17}{5} \quad \text{ゆえに} \quad 1^2 - 2\cdot2\cos\theta + 2^2 = \frac{17}{5}$$

したがって $\quad \boldsymbol{\cos\theta = \frac{2}{5}} \quad$ (2)の結果により $\quad \boldsymbol{s = \frac{3}{10}}$

別解 △OBCに余弦定理を適用すると

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{OB}^2 + \mathrm{OC}^2 - \mathrm{BC}^2}{2\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}} = \frac{2^2 + 1^2 - \frac{17}{5}}{2\cdot2\cdot1} = \frac{2}{5}$$

(4) C から平面 OAB に垂線 CD をおろすと，実数 x，y を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = x\vec{a} + y\vec{b} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}$$

とおける．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$ より

$$\begin{aligned}
&\vec{a} \cdot (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}) = 0 && \text{ゆえに} && x|\vec{a}|^2 + y\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} \\
&\vec{b} \cdot (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}) = 0 && \text{ゆえに} && x\vec{a} \cdot \vec{b} + y|\vec{b}|^2 = \vec{b} \cdot \vec{c}
\end{aligned}$$

(2)，(3) の結果から　$\vec{b} \cdot \vec{c} = 2\cos\theta = 2 \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{5}$

ゆえに　$4x + 2y = 1$，$2x + 4y = \dfrac{4}{5}$　これを解いて　$x = \dfrac{1}{5}$，$y = \dfrac{1}{10}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \dfrac{1}{5}\vec{a} + \dfrac{1}{10}\vec{b} - \vec{c}$

ここで，(1)，(3) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \dfrac{1}{5}\vec{a} + \dfrac{1}{10}\vec{b} - \vec{c}$

上の 2 式から D と H は一致する．

$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \dfrac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}} = 0$ に注意して

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2 &= \overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CH}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \left(\frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \vec{c}\right) = \frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \vec{c} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CH}} \\
&= -\vec{c} \cdot \left(\frac{1}{5}\vec{a} + \frac{1}{10}\vec{b} - \vec{c}\right) \\
&= -\frac{1}{5}\vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{1}{10}\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 \\
&= -\frac{1}{5} \times 1 - \frac{1}{10} \times \frac{4}{5} + 1^2 = \frac{18}{25}
\end{aligned}$$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}| = \sqrt{\dfrac{18}{25}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{5}$

また　$\triangle\mathrm{OAB} = \dfrac{1}{2}\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB} \sin 60^\circ = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

よって，求める体積 V は

$$V = \frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB} \cdot |\overrightarrow{\mathrm{CH}}| = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{5} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{5}}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ について

$$A^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix} \quad \cdots (*)$$

とおく．

i) $n=1$ のとき，明らかに成り立つ．

ii) $n=k$ のとき

$$A^k=\begin{pmatrix}\cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta\end{pmatrix}$$

が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}
A^{k+1} &= A^kA \\
&= \begin{pmatrix}\cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta & -\sin k\theta\cos\theta-\cos k\theta\sin\theta \\ \sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta & \cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta \\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

i)，ii) から，すべての自然数 n に対して，$(*)$ が成り立つ．

(2) 曲線 $y=-\dfrac{1}{2x}$ 上の点 $\left(t, -\dfrac{1}{2t}\right)$ を原点を中心に $\alpha>0$ だけ回転移動した点

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ -\frac{1}{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\cos\alpha + \frac{1}{2t}\sin\alpha \\ t\sin\alpha - \frac{1}{2t}\cos\alpha \end{pmatrix}$$

が曲線 $x^2-y^2=-1$ 上にあるとき

$$\begin{aligned} \left(t\cos\alpha+\frac{1}{2t}\sin\alpha\right)^2-\left(t\sin\alpha-\frac{1}{2t}\cos\alpha\right)^2 &= -1 \\ \left(t^2-\frac{1}{4t^2}\right)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+2\sin\alpha\cos\alpha &= -1 \\ \left(t^2-\frac{1}{4t^2}\right)\cos 2\alpha+\sin 2\alpha &= -1 \end{aligned}$$

このとき，$t\neq 0$ のすべての実数に対して上式は成り立つので

$$\cos 2\alpha = 0, \quad \sin 2\alpha = -1$$

上の 2 式をみたす最小の $\alpha>0$ は

$$2\alpha=\frac{3}{2}\pi \quad \text{すなわち} \quad \alpha=\frac{3}{4}\pi=9\times\frac{\pi}{12}$$

よって，求める自然数 n の最小値は　**9**

解説 曲線 $y=-\dfrac{1}{2x}$ すなわち $2xy=-1$ は

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=-1 \quad \cdots(*)$$

行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値 1，-1 に対するそれぞれの単位固有ベクトルを

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする[1]．xy-系からこれらを基底とする XY-系への直交座標変換

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{X}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\frac{Y}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

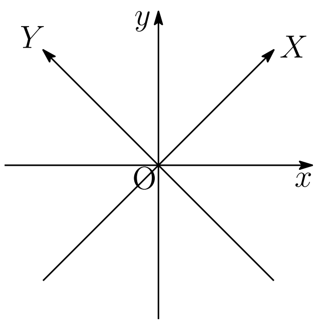
すなわち $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

また $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

これらを $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}&=-1 \\ \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}&=-1 \\ X^2-Y^2&=-1\end{aligned}$$

XY-系の双曲線 $X^2-Y^2=-1\cdots$①，xy-系の双曲線 $x^2-y^2=-1\cdots$② の頂点はそれぞれ Y 軸，y 軸上にある．双曲線 ① を原点を中心に $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転すると ② に移動することがわかる．



■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2010.pdf

$\boxed{3}$ (1) C_2 の方程式は $\quad y=(x+p)^3-(x+p)-p$

すなわち $\quad y=x^3+3px^2+(3p^2-1)x+p^3-2p$

C_1 と C_2 から，y を消去すると，$p\neq 0$ より

$$3px^2+3p^2x+p^3-2p=0 \quad \text{ゆえに} \quad 3x^2+3px+p^2-2=0 \quad \cdots(*)$$

この方程式の判別式を D とすると

$$D=(3p)^2-4\cdot 3\cdot(p^2-2)=3(-p^2+8)$$

方程式 $(*)$ が異なる 2 つの解をもつので，$D>0$ より

$$-p^2+8>0 \quad \text{ゆえに}\ p>0\ \text{に注意して} \quad \boldsymbol{0<p<2\sqrt{2}}$$

(2) $$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta(\beta-x)(x-\alpha)dx&=\int_\alpha^\beta\{(\beta-\alpha)-(x-\alpha)\}(x-\alpha)dx\\&=(\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta(x-\alpha)dx-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2dx\\&=(\beta-\alpha)\Big[\,\frac{1}{2}(x-\alpha)^2\,\Big]_\alpha^\beta-\Big[\,\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\,\Big]_\alpha^\beta\\&=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

(3) $(*)$ の解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-p,\quad \alpha\beta=\frac{p^2-2}{3},\quad (\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{8-p^2}{3}$$

C_2 の関数を $y=g(x)$ とおくと，解と係数の関係により

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=(x^3-x)-\{x^3+3px^2+(3p^2-1)x+p^3-2p\}\\&=-3px^2-3p^2x-p^3+2p\\&=-3p(x-\alpha)(x-\beta)=3p(\beta-x)(x-\alpha)\end{aligned}$$

面積 $S(p)$ は，(2) の結果を用いて

$$\begin{aligned}S(p)&=\int_\alpha^\beta\{f(x)-g(x)\}dx=3p\int_\alpha^\beta(\beta-x)(x-\alpha)dx\\&=3p\cdot\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{p}{2}\left(\frac{8-p^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

$\{S(p)\}^2 = \dfrac{1}{108}p^2(8-p^2)^3$ から，$t = p^2$ とおき

$$h(t) = t(8-t)^3 \quad (0 < t < 8)$$

とすると　$h'(t) = -4(t-2)(8-t)^2$

$h(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(8)
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	(0)	$\nearrow$	極大	$\searrow$	(0)

$p^2 = 2$，すなわち，$p = \sqrt{2}$ のとき，$S(p)$ は最大となる．

最大値は　$S(\sqrt{2}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{8-2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \mathbf{2}$

補足　4 正数 $3p^2$，$8-p^2$，$8-p^2$，$8-p^2$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{3p^2+3(8-p^2)}{4} \geqq \sqrt[4]{3p^2(8-p^2)^3} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{108}p^2(8-p^2)^3 \leqq 4$$

したがって　$\{S(p)\}^2 \leqq 4$　ゆえに　$S(p) \leqq 2$

上式で等号が成立するとき

$$3p^2 = 8-p^2 \quad \text{すなわち} \quad p = \sqrt{2}$$

■

4　(1)　$f(x) = \sqrt{x}\log x$ を微分すると

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\log x + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}}$$

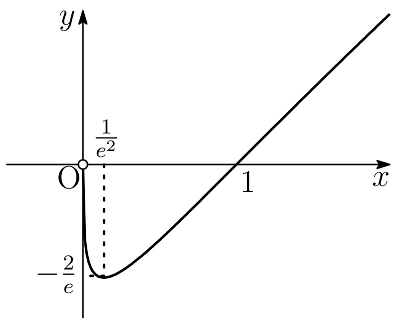
$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	(0)	$\searrow$	$-\frac{2}{e}$	$\nearrow$

$x = \dfrac{1}{e^2}$ のとき極小値 $-\dfrac{2}{e}$ をとる．

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

グラフの概形は右の図のようになる．



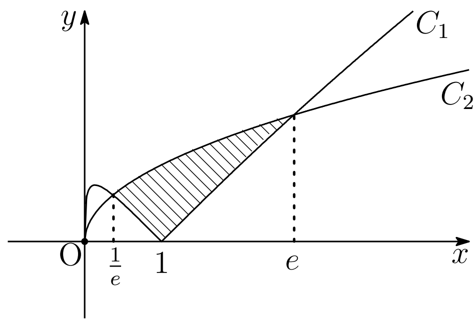
(2) $y=\sqrt{x}|\log x|$ と $y=\sqrt{x}$ から y を消去すると

$$\sqrt{x}\log x=\sqrt{x} \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{x}\,(|\log x|-1)=0$$

$x>0$ より　$|\log x|=1$　これを解いて　$x=\dfrac{1}{e},\ e$

よって，求める交点の座標は　$\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{e},\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}}\right)$，$\boldsymbol{(e,\ \sqrt{e})}$

(3) 求める面積は右の図の斜線部分である．



したがって，求める面積 S は

$$S=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\sqrt{x}\,dx-\int_{\frac{1}{e}}^{e}\sqrt{x}\,|\log x|\,dx$$

ここで，$\sqrt{x}\ \log x$ の原始関数の 1 つを

$$F(x)=\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\log x-2)$$

とおくと [2]

$$\begin{aligned}
S&=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\sqrt{x}\,dx-\int_{\frac{1}{e}}^{e}\sqrt{x}\,|\log x|\,dx\\
&=\Big[\ \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ \Big]_{\frac{1}{e}}^{e}+\int_{\frac{1}{e}}^{1}\sqrt{x}\ \log x\,dx-\int_{1}^{e}\sqrt{x}\ \log x\,dx\\
&=\frac{2}{3}\left(e\sqrt{e}-\frac{1}{e\sqrt{e}}\right)+\Big[\ F(x)\ \Big]_{\frac{1}{e}}^{1}-\Big[\ F(x)\ \Big]_{1}^{e}\\
&=\frac{2}{3}\left(e\sqrt{e}-\frac{1}{e\sqrt{e}}\right)+2F(1)-F\left(\frac{1}{e}\right)-F(e)
\end{aligned}$$

このとき，$F(1)=-\dfrac{4}{9}$，$F\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{10}{9e\sqrt{e}}$，$F(e)=\dfrac{2}{9}e\sqrt{e}$ であるから

$$\begin{aligned}
S&=\frac{2}{3}\left(e\sqrt{e}-\frac{1}{e\sqrt{e}}\right)+2\left(-\frac{4}{9}\right)-\left(-\frac{10}{9e\sqrt{e}}\right)-\frac{2}{9}e\sqrt{e}\\
&=\boldsymbol{\frac{4}{9}\left(e\sqrt{e}+\frac{1}{e\sqrt{e}}-2\right)}
\end{aligned}$$

[2] $\displaystyle\int\sqrt{x}\log x\,dx=\int\frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}})'\log x\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\log x-\int\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\log x-2)+C$

補足 まず，$0 < x \leqq 1$ のとき，$-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} < \log x$ を示す．

$g(x) = \log x + \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}$ $(0 < x \leqq 1)$ とおくと

$$0 < x < 1 \text{ のとき}\quad g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x\sqrt[3]{x}} < 0$$

$g(x)$ は単調減少で，$g(1) = 3$ であるから

$$g(x) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \log x + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} > 0$$

よって　　$0 < x < 1$ のとき　$-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} < \log x < 0$

したがって　$0 < x < 1$ のとき　$-3\sqrt[6]{x} < \sqrt{x}\log x < 0$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}(-3\sqrt[6]{x}) = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\log x = 0$$

■