

## 平成 23 年度 九州工業大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

工学部 平成 23 年 2 月 25 日

● 数 I・II・III・A・B・C (120 分)

1 四面体 OABC は  $OA = OB = 2$ ,  $OC = 1$ ,  $\angle AOB = \angle AOC = 60^\circ$  をみたしている. 線分 AB を 1:2 に内分する点を M とし, 線分 OM を  $s:1-s$  ( $0 < s < 1$ ) に内分する点を H とする.  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$ ,  $\angle BOC = \theta$  ( $0^\circ < \theta < 180^\circ$ ) として, 次に答えよ.

(1) ベクトル  $\vec{OH}$ ,  $\vec{CH}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  と  $s$  を用いて表せ.

(2)  $\vec{CH} \perp \vec{OM}$  のとき,  $s$  を  $\theta$  を用いて表せ.

(3)  $\vec{CH} \perp \vec{OM}$ ,  $BC = \sqrt{\frac{17}{5}}$  とするとき,  $\cos \theta$  と  $s$  の値を求めよ.

(4)  $\vec{CH} \perp \vec{OM}$ ,  $BC = \sqrt{\frac{17}{5}}$  とするとき, 四面体 OABC の体積  $V$  を求めよ.

2 実数  $\theta$  に対して, 行列  $A$  を  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  とする. また,  $n$  を自然数とし,  $A$  の  $n$  乗を  $A^n$  で表す. 次に答えよ.

(1) 数学的帰納法により, すべての自然数  $n$  に対して

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

が成立することを示せ.

(2)  $\theta = \frac{\pi}{12}$  とする. ある自然数  $n$  に対しては, 行列  $A^n$  によって曲線  $y = -\frac{1}{2x}$  上の点が常に曲線  $x^2 - y^2 = -1$  上の点に移される. このような自然数  $n$  の最小値を求めよ.

**3** 実数  $p > 0$  と関数  $f(x) = x^3 - x$  がある. 2 曲線  $C_1: y = f(x)$ ,  $C_2: y = f(x+p) - p$  について, 次に答えよ.

- (1) 曲線  $C_1$  と  $C_2$  が共有点を 2 個もつときの  $p$  の範囲を求めよ.
- (2) 実数  $\alpha, \beta$  に対して

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\beta - x)(x - \alpha) dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

を示せ.

- (3)  $p$  が (1) で求めた範囲を動くとき, 曲線  $C_1, C_2$  によって囲まれた図形の面積  $S(p)$  の最大値を求めよ.

**4** 曲線  $C_1: y = \sqrt{x} |\log x|$  と曲線  $C_2: y = \sqrt{x}$  がある. ただし, 対数は自然数対数とする. 次に答えよ.

- (1) 関数  $f(x) = \sqrt{x} \log x$  の増減, 極値を調べ, 曲線  $y = f(x)$  の概形をかけ. ただし,  $\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} \log x = 0$  であることを用いてよい.
- (2) 曲線  $C_1, C_2$  は  $x > 0$  において 2 つの交点をもつ. それらの座標を求めよ.
- (3) (2) で求めた交点の  $x$  座標を  $a, b$  ( $a < b$ ) とする. 曲線  $C_1, C_2$  の  $a \leq x \leq b$  の部分が囲む図形の面積  $S$  を求めよ.

## 正解

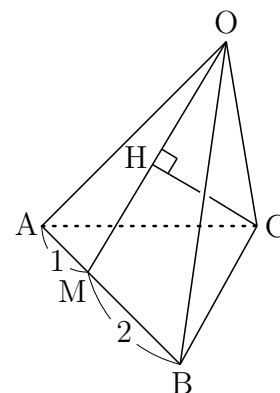
- 1 (1) M は、線分 AB を 1 : 2 に内分する点であるから

$$\vec{OM} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$$

OM : OH = 1 : s であるから

$$\vec{OH} = s\vec{OM} = \frac{2s}{3}\vec{a} + \frac{s}{3}\vec{b}$$

また  $\vec{CH} = \vec{OH} - \vec{OC} = \frac{2s}{3}\vec{a} + \frac{s}{3}\vec{b} - \vec{c}$



(2)  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 1,$   
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2,$   
 $\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}||\vec{c}| \cos 60^\circ = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1,$   
 $\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}| \cos \theta = 2 \cdot 1 \cos \theta = 2 \cos \theta$

$\vec{CH} \perp \vec{OM}$  より,  $\vec{CH} \cdot \vec{OM} = 0$  であるから

$$\begin{aligned} 9\vec{CH} \cdot \vec{OM} &= \{s(2\vec{a} + \vec{b}) - 3\vec{c}\} \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) \\ &= s|2\vec{a} + \vec{b}|^2 - 3\vec{c} \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) \\ &= s(4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2) - 6\vec{a} \cdot \vec{c} - 3\vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= s(4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 2^2) - 6 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cos \theta \\ &= 28s - 6 - 6 \cos \theta \end{aligned}$$

ゆえに  $28s - 6 - 6 \cos \theta = 0$  よって  $s = \frac{3 \cos \theta + 3}{14}$

(3)  $|\vec{BC}| = \sqrt{\frac{17}{5}}$  より  $|\vec{c} - \vec{b}|^2 = \frac{17}{5}$  であるから

$$|\vec{c}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{b}|^2 = \frac{17}{5} \quad \text{ゆえに} \quad 1^2 - 2 \cdot 2 \cos \theta + 2^2 = \frac{17}{5}$$

したがって  $\cos \theta = \frac{2}{5}$  (2) の結果により  $s = \frac{3}{10}$

別解  $\triangle OBC$  に余弦定理を適用すると

$$\cos \theta = \frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2OB \cdot OC} = \frac{2^2 + 1^2 - \frac{17}{5}}{2 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{2}{5}$$

(4) C から平面 OAB に垂線 CD をおろすと、実数  $x, y$  を用いて

$$\overrightarrow{OD} = x\vec{a} + y\vec{b} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}$$

とおける.  $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{CD}$  であるから,  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ ,  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$  より

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}) &= 0 & \text{ゆえに} & \quad x|\vec{a}|^2 + y\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} \\ \vec{b} \cdot (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}) &= 0 & \text{ゆえに} & \quad x\vec{a} \cdot \vec{b} + y|\vec{b}|^2 = \vec{b} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

$$(2), (3) \text{ の結果から} \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 2 \cos \theta = 2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\text{ゆえに} \quad 4x + 2y = 1, \quad 2x + 4y = \frac{4}{5} \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{1}{5}, \quad y = \frac{1}{10}$$

$$\text{したがって} \quad \overrightarrow{CD} = \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{1}{10}\vec{b} - \vec{c}$$

$$\text{ここで, (1), (3) の結果から} \quad \overrightarrow{CH} = \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{1}{10}\vec{b} - \vec{c}$$

上の 2 式から D と H は一致する.

$$\overrightarrow{CH} = \frac{3}{10}\overrightarrow{OM} - \vec{c}, \quad \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OM} = 0 \text{ に注意して}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CH}|^2 &= \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CH} \\ &= \overrightarrow{CH} \cdot \left( \frac{3}{10}\overrightarrow{OM} - \vec{c} \right) = \frac{3}{10}\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OM} - \vec{c} \cdot \overrightarrow{CH} \\ &= -\vec{c} \cdot \left( \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{1}{10}\vec{b} - \vec{c} \right) \\ &= -\frac{1}{5}\vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{1}{10}\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 \\ &= -\frac{1}{5} \times 1 - \frac{1}{10} \times \frac{4}{5} + 1^2 = \frac{18}{25} \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{CH}| = \sqrt{\frac{18}{25}} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

$$\text{また} \quad \triangle OAB = \frac{1}{2}OA \cdot OB \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

よって, 求める体積  $V$  は

$$V = \frac{1}{3}\triangle OAB \cdot |\overrightarrow{CH}| = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{5} = \frac{\sqrt{6}}{5}$$

2 (1)  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  について

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} \cdots (*)$$

とおく.

i)  $n = 1$  のとき, 明らかに成り立つ.

ii)  $n = k$  のとき

$$A^k = \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$$

が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k A \\ &= \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos k\theta \cos \theta - \sin k\theta \sin \theta & -\sin k\theta \cos \theta - \cos k\theta \sin \theta \\ \sin k\theta \cos \theta + \cos k\theta \sin \theta & \cos k\theta \cos \theta - \sin k\theta \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta \\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって,  $n = k + 1$  のときも  $(*)$  が成り立つ.

i), ii) から, すべての自然数  $n$  に対して,  $(*)$  が成り立つ.

(2) 曲線  $y = -\frac{1}{2x}$  上の点  $\left(t, -\frac{1}{2t}\right)$  を原点を中心に  $\alpha > 0$  だけ回転移動した点

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -\frac{1}{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cos \alpha + \frac{1}{2t} \sin \alpha \\ t \sin \alpha - \frac{1}{2t} \cos \alpha \end{pmatrix}$$

が曲線  $x^2 - y^2 = -1$  上にあるとき

$$\begin{aligned} \left(t \cos \alpha + \frac{1}{2t} \sin \alpha\right)^2 - \left(t \sin \alpha - \frac{1}{2t} \cos \alpha\right)^2 &= -1 \\ \left(t^2 - \frac{1}{4t^2}\right) (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \cos \alpha &= -1 \\ \left(t^2 - \frac{1}{4t^2}\right) \cos 2\alpha + \sin 2\alpha &= -1 \end{aligned}$$

このとき、 $t \neq 0$  のすべての実数に対して上式は成り立つので

$$\cos 2\alpha = 0, \quad \sin 2\alpha = -1$$

上の2式をみたす最小の  $\alpha > 0$  は

$$2\alpha = \frac{3}{2}\pi \quad \text{すなわち} \quad \alpha = \frac{3}{4}\pi = 9 \times \frac{\pi}{12}$$

よって、求める自然数  $n$  の最小値は **9**

解説 曲線  $y = -\frac{1}{2x}$  すなわち  $2xy = -1$  は

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1 \quad \dots(*)$$

行列  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  の固有値  $1, -1$  に対するそれぞれの単位固有ベクトルを

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする<sup>1</sup>.  $xy$ -系からこれらを基底とする  $XY$ -系への直交座標変換

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{X}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{Y}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

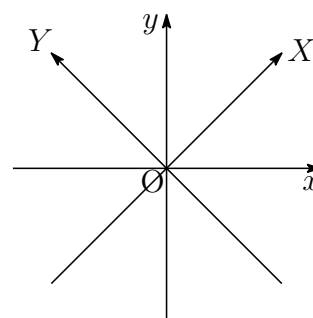
$$\text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\text{また} \quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

これらを (\*) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= -1 \\ \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= -1 \\ X^2 - Y^2 &= -1 \end{aligned}$$

$XY$ -系の双曲線  $X^2 - Y^2 = -1 \dots \textcircled{1}$ ,  $xy$ -系の双曲線  $x^2 - y^2 = -1 \dots \textcircled{2}$  の頂点はそれぞれ  $Y$  軸,  $y$  軸上にある. 双曲線  $\textcircled{1}$  を原点を中心に  $\frac{3}{4}\pi$  だけ回転すると  $\textcircled{2}$  に移動することがわかる.



<sup>1</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai\\_ri\\_2010.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2010.pdf)

**3** (1)  $C_2$  の方程式は  $y = (x+p)^3 - (x+p) - p$   
すなわち  $y = x^3 + 3px^2 + (3p^2 - 1)x + p^3 - 2p$

$C_1$  と  $C_2$  から,  $y$  を消去すると,  $p \neq 0$  より

$$3px^2 + 3p^2x + p^3 - 2p = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 3x^2 + 3px + p^2 - 2 = 0 \quad \cdots (*)$$

この方程式の判別式を  $D$  とすると

$$D = (3p)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (p^2 - 2) = 3(-p^2 + 8)$$

方程式 (\*) が異なる 2 つの解をもつので,  $D > 0$  より

$$-p^2 + 8 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad p > 0 \text{ に注意して} \quad 0 < p < 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} (2) \int_{\alpha}^{\beta} (\beta - x)(x - \alpha) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(\beta - \alpha) - (x - \alpha)\}(x - \alpha) dx \\ &= (\beta - \alpha) \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha) dx - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^2 dx \\ &= (\beta - \alpha) \left[ \frac{1}{2}(x - \alpha)^2 \right]_{\alpha}^{\beta} - \left[ \frac{1}{3}(x - \alpha)^3 \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^3 - \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

(3) (\*) の解を  $\alpha, \beta$  とすると ( $\alpha < \beta$ ), 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -p, \quad \alpha\beta = \frac{p^2 - 2}{3}, \quad (\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \frac{8 - p^2}{3}$$

$C_2$  の関数を  $y = g(x)$  とおくと, 解と係数の関係により

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (x^3 - x) - \{x^3 + 3px^2 + (3p^2 - 1)x + p^3 - 2p\} \\ &= -3px^2 - 3p^2x - p^3 + 2p \\ &= -3p(x - \alpha)(x - \beta) = 3p(\beta - x)(x - \alpha) \end{aligned}$$

面積  $S(p)$  は, (2) の結果を用いて

$$\begin{aligned} S(p) &= \int_{\alpha}^{\beta} \{f(x) - g(x)\} dx = 3p \int_{\alpha}^{\beta} (\beta - x)(x - \alpha) dx \\ &= 3p \cdot \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{p}{2} \left( \frac{8 - p^2}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$



$\{S(p)\}^2 = \frac{1}{108}p^2(8-p^2)^3$  から,  $t = p^2$  とおき

$$h(t) = t(8-t)^3 \quad (0 < t < 8)$$

とすると  $h'(t) = -4(t-2)(8-t)^2$

$h(t)$  の増減表は, 次のようになる.

$t$	(0)	...	2	...	(8)
$h'(t)$		+	0	-	
$h(t)$	(0)	↗	極大	↘	(0)

$p^2 = 2$ , すなわち,  $p = \sqrt{2}$  のとき,  $S(p)$  は最大となる.

$$\text{最大値は } S(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{8-2}{3} \right)^{\frac{3}{2}} = 2$$

補足 4 正数  $3p^2, 8-p^2, 8-p^2, 8-p^2$  の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{3p^2 + 3(8-p^2)}{4} \geq \sqrt[4]{3p^2(8-p^2)^3} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{108}p^2(8-p^2)^3 \leq 4$$

したがって  $\{S(p)\}^2 \leq 4$  ゆえに  $S(p) \leq 2$

上式で等号が成立するとき

$$3p^2 = 8 - p^2 \quad \text{すなわち} \quad p = \sqrt{2}$$

**4** (1)  $f(x) = \sqrt{x} \log x$  を微分すると

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \log x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}}$$

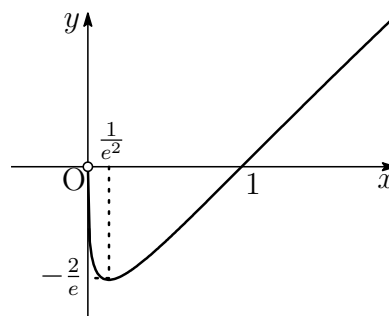
$f(x)$  の増減表は次のようになる.

$x$	(0)	...	$\frac{1}{e^2}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	(0)	↘	$-\frac{2}{e}$	↗

$x = \frac{1}{e^2}$  のとき極小値  $-\frac{2}{e}$  をとる.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

グラフの概形は右の図のようになる.



(2)  $y = \sqrt{x}|\log x|$  と  $y = \sqrt{x}$  から  $y$  を消去すると

$$\sqrt{x} \log x = \sqrt{x} \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{x}(|\log x| - 1) = 0$$

$x > 0$  より  $|\log x| = 1$  これを解いて  $x = \frac{1}{e}, e$

よって、求める交点の座標は  $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right), (e, \sqrt{e})$

(3) 求める面積は右の図の斜線部分である。

したがって、求める面積  $S$  は

$$S = \int_{\frac{1}{e}}^e \sqrt{x} dx - \int_{\frac{1}{e}}^e \sqrt{x} |\log x| dx$$

ここで、 $\sqrt{x} \log x$  の原始関数の 1 つを

$$F(x) = \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\log x - 2)$$

とおくと<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{e}}^e \sqrt{x} dx - \int_{\frac{1}{e}}^e \sqrt{x} |\log x| dx \\ &= \left[ \frac{2}{3}x\sqrt{x} \right]_{\frac{1}{e}}^e + \int_{\frac{1}{e}}^1 \sqrt{x} \log x dx - \int_1^e \sqrt{x} \log x dx \\ &= \frac{2}{3} \left( e\sqrt{e} - \frac{1}{e\sqrt{e}} \right) + \left[ F(x) \right]_{\frac{1}{e}}^1 - \left[ F(x) \right]_1^e \\ &= \frac{2}{3} \left( e\sqrt{e} - \frac{1}{e\sqrt{e}} \right) + 2F(1) - F\left(\frac{1}{e}\right) - F(e) \end{aligned}$$

このとき、 $F(1) = -\frac{4}{9}$ ,  $F\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{10}{9e\sqrt{e}}$ ,  $F(e) = \frac{2}{9}e\sqrt{e}$  であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{2}{3} \left( e\sqrt{e} - \frac{1}{e\sqrt{e}} \right) + 2 \left( -\frac{4}{9} \right) - \left( -\frac{10}{9e\sqrt{e}} \right) - \frac{2}{9}e\sqrt{e} \\ &= \frac{4}{9} \left( e\sqrt{e} + \frac{1}{e\sqrt{e}} - 2 \right) \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>  $\int \sqrt{x} \log x dx = \int \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}})' \log x dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \log x - \int \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\log x - 2) + C$

補足 まず,  $0 < x \leq 1$  のとき,  $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}} < \log x$  を示す.

$$g(x) = \log x + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \quad (0 < x \leq 1) \text{ とおくと}$$

$$0 < x < 1 \text{ のとき } g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x\sqrt[3]{x}} < 0$$

$g(x)$  は単調減少で,  $g(1) = 3$  であるから

$$g(x) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \log x + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} > 0$$

$$\text{よって} \quad 0 < x < 1 \text{ のとき} \quad -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} < \log x < 0$$

$$\text{したがって} \quad 0 < x < 1 \text{ のとき} \quad -3\sqrt[3]{x} < \sqrt{x} \log x < 0$$

$\lim_{x \rightarrow +0} (-3\sqrt[3]{x}) = 0$  であるから, はさみうちの原理により

$$\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} \log x = 0$$