平成 22 年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
工学部　平成 22 年 2 月 25 日

- 数 I・II・III・A・B・C (120 分)

1 行列 $A = \begin{pmatrix} a-b & a \\ 2a & a+b \end{pmatrix}$ の定める移動 (1 次変換) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を f とし，原点を通る 2 直線を $l_1 : y = m_1 x$，$l_2 : y = m_2 x$ とする ($m_1 < m_2$)．次に答えよ．

(1) f により，直線 l_1 上の点 $(1,\ m_1)$ は l_1 上の点に移り，直線 l_2 上の点 $(1,\ m_2)$ は l_2 上の点に移るとする．m_1，m_2 を a，b を用いて表せ．ただし，$a > 0$ とする．

(2) 実数 a，b が $(a-2)^2 + b^2 = 3$ をみたすとき，$\dfrac{b}{a}$ のとる値の範囲を求めよ．

(3) (1) で求めた m_1，m_2 に対して 2 直線 l_1，l_2 のなす角を θ とする $\left(0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$．実数 a，b が $(a-2)^2 + b^2 = 3$ をみたすとき，$\cos\theta$ のとる値の範囲を求めよ．

2 O を原点とする座標空間の 2 点 A$(0,\ 0,\ 2)$，P$(\cos\theta,\ 2+\sin\theta,\ 1)$ に対して，直線 AP 上の点で原点 O から最も近い点を Q$(X,\ Y,\ Z)$ とする．$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ として，次に答えよ．

(1) X，Y，Z を θ を用いて表せ．

(2) θ が 0，π，$\dfrac{3}{2}\pi$ のときの点 Q の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とする．$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$ をみたす実数 s，t，u を θ を用いて表せ．また，$s+t+u$ の値を求めよ．

(3) 点 Q から xy 平面にひいた垂線と xy 平面の交点を R$(X,\ Y,\ 0)$ とする．θ が $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲を動くとき，xy 平面における点 R の軌跡を求めよ．

3 次に答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲において，$\sin^2 x = \sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ を解け．

(2) 曲線 $y = \sin^2 x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ と曲線 $y = \sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次に答えよ．ただし，対数は自然対数とする．必要ならば，$1.09 < \log 3 < 1.10$ を用いてよい．

(1) すべての $x > 0$ に対して，不等式 $x - \dfrac{x^2}{2} < \log(1 + x)$ が成り立つことを示せ．

(2) 関数 $f(x) = x - \dfrac{x^2}{3} - \log(1 + x)$ の $0 \leqq x \leqq 2$ における最大値，最小値を求めよ．

(3) 方程式 $x - \dfrac{x^2}{3} = \log(1 + x)$ は $0 < x < 2$ の範囲に解を 1 つだけもつことを示せ．

(4) (3) における解を α $(0 < \alpha < 2)$ とする．

曲線 $y = x - \dfrac{x^2}{3}$ と曲線 $y = \log(1 + x)$ で囲まれた図形 $(0 \leqq x \leqq \alpha$の部分$)$ を S とする．また，曲線 $y = x - \dfrac{x^2}{3}$，曲線 $y = \log(1 + x)$ と直線 $x = 2$ で囲まれた図形 $(\alpha \leqq x \leqq 2$ の部分$)$ の面積を T とする．S と T の大小を比較せよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) A による点 $(1,\ m_1)$ の像

$$\begin{pmatrix} a-b & a \\ 2a & a+b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b+am_1 \\ 2a+(a+b)m_1 \end{pmatrix}$$

が，直線 $l_1 : y = m_1x$ 上にあるから

$$2a+(a+b)m_1 = m_1(a-b+am_1)$$

すなわち　$a{m_1}^2 - 2bm_1 - 2a = 0 \quad \cdots ①$

同様に，A による点 $(1,\ m_2)$ の像が，直線 $l_2 : y = m_2x$ 上にあるから

$$a{m_2}^2 - 2bm_2 - 2a = 0 \quad \cdots ②$$

①，② から，m_1，m_2 は，m に関する 2 次方程式

$$am^2 - 2bm - 2a = 0 \quad \cdots (*)$$

の解であるから，$m_1 < m_2$ に注意してこれを解くと

$$\boldsymbol{m_1 = \frac{b-\sqrt{2a^2+b^2}}{a}}, \quad \boldsymbol{m_2 = \frac{b+\sqrt{2a^2+b^2}}{a}}$$

(2) $k = \dfrac{b}{a}$ とおくと，$b = ka$．これを $(a-2)^2+b^2 = 3$ に代入すると

$$(a-2)^2+(ka)^2 = 3 \quad \text{ゆえに} \quad (1+k^2)a^2 - 4a + 1 = 0$$

a は実数であるから，この a に関する 2 次方程式の係数から

$$(-2)^2 - (1+k^2)\cdot 1 \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad k^2 - 3 \leqq 0$$

これを解いて　$-\sqrt{3} \leqq k \leqq \sqrt{3}$　よって　$\boldsymbol{-\sqrt{3} \leqq \dfrac{b}{a} \leqq \sqrt{3}}$

(3) $\vec{u}=(1,\ m_1)$，$\vec{v}=(1,\ m_2)$ とおく．$\vec{u}$，$\vec{v}$ のなす角を α とすると

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{1+m_1m_2}{\sqrt{1+{m_1}^2}\sqrt{1+{m_2}^2}}$$
$$=\frac{1+m_1m_2}{\sqrt{1+({m_1}^2+{m_2}^2)+(m_1m_2)^2}}$$

ここで，2 次方程式 $(*)$ の解と係数の関係および (2) の結果から

$$m_1+m_2=\frac{2b}{a}=2k,\quad m_1m_2=-2,$$
$${m_1}^2+{m_2}^2=(m_1+m_2)^2-2m_1m_2=4k^2+4$$

したがって　$\cos\alpha=\dfrac{1+(-2)}{\sqrt{1+(4k^2+4)+(-2)^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{4k^2+9}}<0$

ゆえに，2 直線 l_1，l_2 のなす角 θ は，$\theta=\pi-\alpha$ であるから

$$\cos\theta=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{4k^2+9}}$$

$-\sqrt{3}\leqq k\leqq\sqrt{3}$ より　　$\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{21}}\leqq\cos\theta\leqq\dfrac{1}{3}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,\ 0,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\cos\theta,\ 2+\sin\theta,\ -1)$ より，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(0,\ 0,\ 2)+t(\cos\theta,\ 2+\sin\theta,\ -1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ より

$$-2+t\{\cos^2\theta+(2+\sin\theta)^2+(-1)^2\}=0 \quad \text{ゆえに} \quad t=\frac{1}{3+2\sin\theta}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(0,\ 0,\ 2)+\dfrac{1}{3+2\sin\theta}(\cos\theta,\ 2+\sin\theta,\ -1)$

よって　$\boldsymbol{X=\dfrac{\cos\theta}{3+2\sin\theta},\ Y=\dfrac{2+\sin\theta}{3+2\sin\theta},\ Z=\dfrac{5+4\sin\theta}{3+2\sin\theta}}$

(2) (1) の結果にそれぞれ $\theta=0,\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$ を代入すると

$$\vec{a}=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right),\quad \vec{b}=\left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right),\quad \vec{c}=(0,\ 1,\ 1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ より

$$(X,\ Y,\ Z)=s\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right)+t\left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right)+u(0,\ 1,\ 1)$$

すなわち

$$\frac{1}{3}s-\frac{1}{3}t=X\cdots① \quad \frac{2}{3}s+\frac{2}{3}t+u=Y\cdots② \quad \frac{5}{3}s+\frac{5}{3}t+u=Z\cdots③$$

③ − ② より　$s+t=-Y+Z\cdots④$

① × 3 より　$s-t=3X\cdots⑤$

④，⑤ より　$s=\dfrac{1}{2}(3X-Y+Z)$，　$t=\dfrac{1}{2}(-3X-Y+Z)$

②，④ より　$u=Y-\dfrac{2}{3}(s+t)=Y-\dfrac{2}{3}(-Y+Z)=\dfrac{1}{3}(5Y-2Z)$

したがって

$$s=\frac{3\cos\theta-(2+\sin\theta)+(5+4\sin\theta)}{2(3+2\sin\theta)}=\boldsymbol{\frac{3(1+\sin\theta+\cos\theta)}{2(3+2\sin\theta)}}$$

$$t=\frac{-3\cos\theta-(2+\sin\theta)+(5+4\sin\theta)}{2(3+2\sin\theta)}=\boldsymbol{\frac{3(1+\sin\theta-\cos\theta)}{2(3+2\sin\theta)}}$$

$$u=\frac{5(2+\sin\theta)-2(5+4\sin\theta)}{3(3+2\sin\theta)}=\boldsymbol{-\frac{\sin\theta}{3+2\sin\theta}}$$

よって　$\boldsymbol{s+t+u=1}$

(3) R(X, Y, 0) は，(1) の結果から

$$X = \frac{\cos\theta}{3+2\sin\theta}, \quad Y = \frac{2+\sin\theta}{3+2\sin\theta}$$

上の 2 式から　　$\sin\theta = \dfrac{-3Y+2}{2Y-1}, \quad \cos\theta = \dfrac{X}{2Y-1}$

これらを $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入すると

$$\left(\frac{-3Y+2}{2Y-1}\right)^2 + \left(\frac{X}{2Y-1}\right)^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad X^2 + 5Y^2 - 8Y + 3 = 0$$

よって，求める軌跡の方程式は，次の楕円である．

$$x^2 + 5y^2 - 8y + 3 = 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{5x^2 + 25\left(y - \frac{4}{5}\right)^2 = 1}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\sin^2 x - \sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x) - \dfrac{1}{2}\left\{1-2\cos 2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$

$$= \frac{1}{2}\left\{\cos 2\left(x+\frac{\pi}{3}\right) - \cos 2x\right\}$$

$$= -\sin\frac{\pi}{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \quad \cdots(*)$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より　$\dfrac{\pi}{3} \leqq 2x+\dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{7}{3}\pi$

したがって，方程式 $\sin^2 x = \sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ の解は，$(*)$ より

$$2x+\frac{\pi}{3} = \pi,\ 2\pi \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{6}}$$

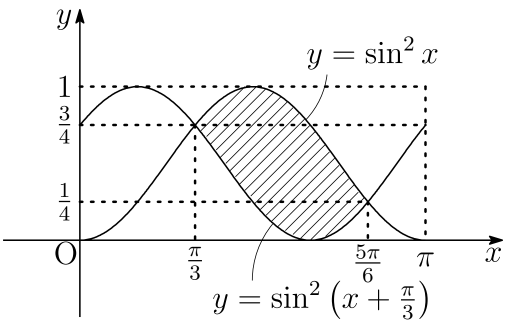
(2) (1) の結果から，$\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ において，

$(*)$ により　$\sin^2 x \geqq \sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

したがって，求める面積 S は

$$S = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right\}dx$$

$$= \left[\ \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\ \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$



補足 2 曲線 $y=\sin^2 x$，$y=\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ および 2 直線 $x=0$，$x=\pi$ で囲まれた部分の面積を T とし，$(*)$ の原始関数の 1 つを

$$F(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

とすると

$$T = -\Big[\ F(x)\ \Big]_0^{\frac{\pi}{3}} + \Big[\ F(x)\ \Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi} - \Big[\ F(x)\ \Big]_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi}$$

$$= 2F\left(\frac{5}{6}\pi\right) - 2F\left(\frac{\pi}{3}\right) + F(0) - F(\pi)$$

ここで，$F\left(\dfrac{5}{6}\pi\right) = -F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$，$F(0)=F(\pi)$ であるから

$$T = 4F\left(\frac{5}{6}\pi\right) = 4\times\frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $g(x)=\log(1+x)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)$ とおくと $(x \geqq 0)$

$x>0$ において　$g'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x=\dfrac{x^2}{1+x}>0$

$g(0)=0$ であるから，$x>0$ において　　$g(x)>0$

よって，すべての $x>0$ に対して　$x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)$

(2) $f(x)=x-\dfrac{x^3}{3}-\log(1+x)$ を微分すると

$$f'(x)=1-\frac{2}{3}x-\frac{1}{1+x}=\frac{x(1-2x)}{3(1+x)}$$

したがって，$f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 2$ における増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{5}{12}-\log\frac{3}{2}$	$\searrow$	$\frac{2}{3}-\log 3$

$1.09<\log 3$ より，$\dfrac{2}{3}<1.09<\log 3$ であるから　$\dfrac{2}{3}-\log 3<0$

よって　$x=\dfrac{1}{2}$ のとき **最大値** $\boldsymbol{\dfrac{5}{12}-\log\dfrac{3}{2}}$

$x=2$ のとき **最小値** $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}-\log 3}$

(3) (2) の増減表により，$0<x<\dfrac{1}{2}$ において　$f(x)>0$

$\dfrac{1}{2}<x<2$ において，$f(x)$ は単調減少で，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)>0$，$f(2)<0$

したがって，$\dfrac{1}{2}<x<2$ において，$f(x)=0$ となる x が唯一存在する．

よって，方程式 $x-\dfrac{x^3}{3}=\log(1+x)$ は $0<x<2$ に解を 1 つだけもつ．

(4) (3) の結果から

$$0 < x < \alpha \text{ において} \qquad x - \frac{x^2}{3} > \log(1+x)$$

$$\alpha < x < 2 \text{ において} \qquad x - \frac{x^2}{3} < \log(1+x)$$

したがって

$$S = \int_0^\alpha \left\{ \left(x - \frac{x^2}{3} \right) - \log(1+x) \right\} dx = \int_0^\alpha f(x)\,dx$$
$$T = \int_\alpha^2 \left\{ \log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{3} \right) \right\} dx = -\int_\alpha^2 f(x)\,dx$$

上の 2 式から

$$\begin{aligned} S - T &= \int_0^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^2 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx \\ &= \int_0^2 \left\{ x - \frac{x^2}{3} - \log(1+x) \right\} dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{9} - (1+x)\log(1+x) + x \right]_0^2 \\ &= \frac{28}{9} - 3\log 3 = \frac{1}{9} - 3(\log 3 - 1) = \frac{1}{9}\{1 - 27(\log 3 - 1)\} \end{aligned}$$

$\log 3 - 1 > 0.09$ であるから　$-27(\log 3 - 1) < -27 \times 0.09 = -2.43$

ゆえに　$1 - 27(\log 3 - 1) < -1.43 < 0$　　よって　$\boldsymbol{S < T}$