# 平成 21 年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
# 工学部　平成 21 年 2 月 25 日

- 数 I・II・III・A・B・C (120 分)

**1** 四面体 OABC は，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \sqrt{2}$，$\mathrm{OC} = 1$，$\angle\mathrm{OCA} = \angle\mathrm{OCB} = 90^\circ$ をみたしている．点 C から 3 点 O，A，B を通る平面に下した垂線とその平面との交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$，$\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とおいて，次に答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{c}$ と $\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ．また，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を $\theta$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CH}} = s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}$ とおくとき，$s$ と $t$ を $\theta$ を用いて表せ．また，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ の大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|$ を $\theta$ を用いて表せ．

(3) $\triangle\mathrm{AOB}$ と $\triangle\mathrm{ACB}$ の面積をそれぞれ $S$ と $T$ とおく．$S = \sqrt{3}T$ のとき，$\theta$ と $\angle\mathrm{ACB}$ を求めよ．

**2** 2 次の正方行列 $A$ は

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},\quad A^2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

をみたしている．楕円 $C:\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ 上の点を P とし，$A$ で表される移動 (1 次変換) で P が移る点を Q とする．次に答えよ．ただし，O は原点である．

(1) 行列 $A$ を求めよ．

(2) 点 Q が直線 OP 上にあるとき，点 P の座標を求めよ．

(3) 点 $\mathrm{P}(\sqrt{3}\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ をみたしながら $C$ 上を動くとき，線分 OQ の長さ $l$ の最大値を求めよ．また，最大値をとるときの点 P の座標を求めよ．

(4) 点 $\mathrm{P}(\sqrt{3}\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ をみたしながら $C$ 上を動くとき，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積 $S$ の最大値を求めよ．また，最大値をとるときの点 P の座標を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次に答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

(1) $x>0$ のとき，不等式 $\sqrt{x} \geqq 2+\log \dfrac{x}{4}$ を示せ．また，等号が成り立つときの $x$ の値を求めよ．

(2) 曲線 $y=2+\log \dfrac{x}{4}$ と $x$ 軸との交点の $x$ 座標を求めよ．

(3) 2 曲線 $y=\sqrt{x}\ (x \geqq 0)$，$y=2+\log \dfrac{x}{4}$ と $x$ 軸で囲まれた図形を $D$ とするとき，$D$ の面積 $S$ を求めよ．

(4) (3) の図形 $D$ を $y$ 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 $V$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $a>2$ とする．曲線 $C: y=\dfrac{1}{x^2-1}\ (x>1)$ と $C$ の $x=a$ における接線 $l: y=px+q$ について，次に答えよ．

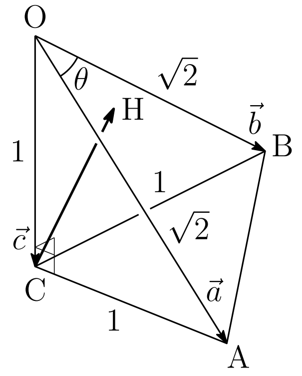
(1) $p$ と $q$ を $a$ を用いて表せ．

(2) 等式 $(px+q)(x^2-1)-1$ を $p(x-a)^2(x-k)$ と因数分解したとき，$k$ を $a$ を用いて表せ．また，$x>1$ のとき $\dfrac{1}{x^2-1} \geqq px+q$ を示せ．

(3) 曲線 $C$ と直線 $l$ および直線 $x=2$ で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} S(a)$ を求めよ．

# 正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\mathrm{OA}=\sqrt{2}$，$\mathrm{OC}=1$，$\angle\mathrm{AOC}=45^\circ$ より




$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\sqrt{2}\cdot 1\cos 45^\circ=\mathbf{1}$$

$\mathrm{OB}=\sqrt{2}$，$\mathrm{OC}=1$，$\angle\mathrm{BOC}=45^\circ$ より

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\sqrt{2}\cdot 1\cos 45^\circ=\mathbf{1}$$

$\mathrm{OA}=\sqrt{2}$，$\mathrm{OB}=\sqrt{2}$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ より

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos\theta=\boldsymbol{2\cos\theta}$$

(2) $\vec{a}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$，$\vec{b}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ であるから，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=0$，$\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=0$ より

$$\vec{a}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})=0 \qquad \vec{b}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})=0$$
$$s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}=0 \qquad s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$ および (1) の結果を上の 2 式に代入すると

$$2s+2t\cos\theta-1=0 \quad \cdots①, \qquad 2s\cos\theta+2t-1=0 \quad \cdots②$$

① − ② より　　$(1-\cos\theta)(s-t)=0$

$0<\theta<\pi$ であるから，$1-\cos\theta\neq 0$ より　$s=t$

これを ① に代入して　　$\boldsymbol{s=t=\dfrac{1}{2(1+\cos\theta)}}$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=s\vec{a}+s\vec{b}-\vec{c}$ であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2&=s^2|\vec{a}|^2+s^2|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2s^2\vec{a}\cdot\vec{b}-2s\vec{b}\cdot\vec{c}-2s\vec{a}\cdot\vec{c}\\&=2s^2+2s^2+1+4s^2\cos\theta-2s-2s\\&=4s^2(1+\cos\theta)-4s+1\\&=\frac{1}{1+\cos\theta}-\frac{2}{1+\cos\theta}+1=\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\sqrt{\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}}}$

**注意** $\mathrm{AC}=1$，$\mathrm{BC}=1$ より，$\mathrm{AB}<\mathrm{AC}+\mathrm{BC}=2$ であるから

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}>0$$

(3) 四面体 OABC の体積を $V$ とすると

$$V=\frac{1}{3}S|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\frac{1}{3}T|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| \qquad \text{ゆえに} \qquad \frac{T}{S}=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}=\sqrt{\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$S=\sqrt{3}T$ より，$\dfrac{T}{S}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから　$\sqrt{\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

これを解いて　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$　よって　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{3}}$

したがって，$\triangle$OAB は一辺が $\sqrt{2}$ の正三角形である．

$\mathrm{AB}=\sqrt{2}$，$\mathrm{BC}=1$，$\mathrm{CA}=1$ であるから　$\boldsymbol{\angle\mathrm{ACB}=90^\circ}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $A^2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$ より　$AA\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$

これに $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を代入すると　$A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$

上の 2 式から　　$A\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$

よって　　$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{-6} \end{pmatrix}$$

(2) $\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\vec{q} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ とおく．

P は楕円 $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \cdots$ ① 上の点であるから　　$\vec{p} \neq \vec{0}$

$A$ による P の像が Q であるから　　$A\vec{p} = \vec{q}$

Q は直線 OP 上にあるから　　$\vec{q} = t\vec{p}$　($t$ は実数)

ゆえに　　$A\vec{p} = t\vec{p}$　すなわち　$(A - tE)\vec{p} = \vec{0}$　$\cdots(*)$

$A - tE$ が正則であるとき，$\vec{p} = \vec{0}$ となり，$\vec{p} \neq \vec{0}$ に反する．

したがって，$A - tE = \begin{pmatrix} 2-t & 3 \\ -4 & -6-t \end{pmatrix}$，$\det(A - tE) = 0$ より

$$(2-t)(-6-t) - 3\cdot(-4) = 0 \quad \text{すなわち} \quad t^2 + 4t = 0$$

これを解いて　$t = 0, -4$

$t = 0$ のとき，$(*)$ をみたす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad 2x + 3y = 0 \quad \cdots ②$$

$t = -4$ のとき，$(*)$ をみたす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad 2x + y = 0 \quad \cdots ③$$

P は楕円 ① 上の点であるから

①，② を解いて　$\left(\pm\dfrac{3}{2},\ \mp 1\right)$　①，③ を解いて　$\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \mp\sqrt{3}\right)$

よって　　$\left(\pm\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}},\ \mp\sqrt{\mathbf{3}}\right)$，$\left(\pm\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},\ \mp\mathbf{1}\right)$ **(複号同順)**

(3) $A$ による $\mathrm{P}(\sqrt{3}\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ の像は $(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2})$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{pmatrix} = 2\sqrt{3}(\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ゆえに
$$\begin{aligned} l = \mathrm{OQ} &= 2\sqrt{3}\left|\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta\right|\sqrt{1^2 + (-2)^2} \\ &= 4\sqrt{15}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

よって，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき $l$ は最大値 $\boldsymbol{4\sqrt{15}}$ をとり，このとき $\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \sqrt{3}}\right)$

(4) $\vec{q} = 2\sqrt{3}(\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$，$\vec{p} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{pmatrix}$

$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積 $S$ は $(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2})$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\left|\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta\right|\left|1\cdot 2\sin\theta - (-2)\cdot\sqrt{3}\cos\theta\right| \\ &= 2\sqrt{3}\left|(\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta)(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)\right| \\ &= 2\sqrt{3}\left|4\sin\theta\cos\theta + \sqrt{3}\right| \\ &= 2\sqrt{3}(2\sin 2\theta + \sqrt{3}\,) \end{aligned}$$

よって，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，$S$ は最大値 $\boldsymbol{4\sqrt{3} + 6}$ をとり，このとき $\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ \sqrt{2}}\right)$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=\sqrt{x}-2-\log x+\log 4$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$$

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $4$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

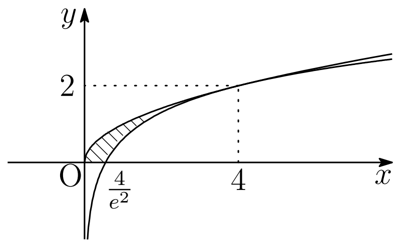
右の増減表により，$f(x)\geqq f(4)=0$ であるから

$$\sqrt{x}-2-\log x+\log 4\geqq 0 \quad すなわち \quad \sqrt{x}\geqq 2+\log\frac{x}{4}$$

上式の等号は，$\boldsymbol{x=4}$ **のとき成り立つ．**

(2) $2+\log\dfrac{x}{4}=0$ より　　$\boldsymbol{x=\dfrac{4}{e^2}}$

(3) $D$ は右の図の斜線部分であるから，その面積を $S$ とすると




$$\begin{aligned}S&=\int_0^4\sqrt{x}\,dx-\int_{\frac{4}{e^2}}^4(2+\log x-\log 4)\,dx\\&=\left[\,\frac{2x}{3}\sqrt{x}\,\right]_0^4-\left[\,x(\log x-\log 4+1)\,\right]_{\frac{4}{e^2}}^4\\&=\boldsymbol{\frac{4}{3}-\frac{4}{e^2}}\end{aligned}$$

(4) $y=2+\log\dfrac{x}{4}$ を $x$ について解くと　$x=4e^{y-2}$

$y=\sqrt{x}$ を $x$ について解くと　$x=y^2$

よって
$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_0^2\left\{(4e^{y-2})^2-(y^2)^2\right\}dy=\int_0^2(16e^{2y-4}-y^4)\,dy\\&=\left[\,8e^{2y-4}-\frac{y^5}{5}\,\right]_0^2=8\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{e^4}\right)\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V=8\pi\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{e^4}\right)}$

別解　バウムクーヘン型求積法 (九工大情報工学部 2011 年一般前期 $\boxed{\mathbf{3}}$[1] を参照)

$$\begin{aligned}\frac{V}{2\pi}&=\int_0^4 x\cdot\sqrt{x}\,dx-\int_{\frac{4}{e^2}}^4 x\left(2+\log\frac{x}{4}\right)dx\\&=\left[\,\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\,\right]_0^4-\left[\,\frac{x^2}{4}\left(2\log\frac{x}{4}+3\right)\,\right]_{\frac{4}{e^2}}^4=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{e^4}\right)\end{aligned}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou_2011.pdf

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $y = \dfrac{1}{x^2-1}$ を微分すると　$y' = -\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$

$C$ の $x = a$ における接線の方程式は

$$y - \frac{1}{a^2-1} = -\frac{2a}{(a^2-1)^2}(x-a)$$

すなわち　$y = -\dfrac{2a}{(a^2-1)^2}x + \dfrac{3a^2-1}{(a^2-1)^2}$

これが $y = px + q$ を表すので

$$\boldsymbol{p = -\frac{2a}{(a^2-1)^2},\ q = \frac{3a^2-1}{(a^2-1)^2}}$$

(2) $(px+q)(x^2-1)-1=0$ とすると，3 次方程式 $px^3+qx^2-px-q-1=0$ の解が $a$，$a$，$k$ であるから，解と係数の関係により

$$a+a+k = -\frac{q}{p},\quad aa+ak+ka = \frac{-p}{p},\quad aak = -\frac{-q-1}{p}\quad \cdots(*)$$

$a \neq 0$ であるから，$(*)$ の第 2 式により　$\boldsymbol{k = -\dfrac{a^2+1}{2a}}$

$k$ は，(1) の結果から，$(*)$ の第 1 式および第 3 式を満たしている．

したがって　$(px+q)(x^2-1)-1 = p(x-a)^2\left(x + \dfrac{a^2+1}{2a}\right)$

$x \neq 1$ のとき　$px+q-\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{p(x-a)^2}{x^2-1}\left(x+\dfrac{a^2+1}{2a}\right)$

$a > 2$ より，(1) の結果から $p < 0$ であるから，$x > 1$ のとき，上式より

$$px+q-\frac{1}{x^2-1} \leqq 0 \quad ゆえに \quad \frac{1}{x^2-1} \geqq px+q$$

補足 $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ とすると，$l$ の方程式から　$px+q = f'(a)(x-a)+f(a)$

また，$g(x) = f'(a)(x-a)+f(a)-f(x)$，$h(x) = (x^2-1)g(x)$ とおくと

$$h(x) = (px+q)(x^2-1)-1,$$
$$g'(x) = f'(a)-f'(x),\quad h'(x) = 2xg(x)+(x^2-1)g'(x)$$

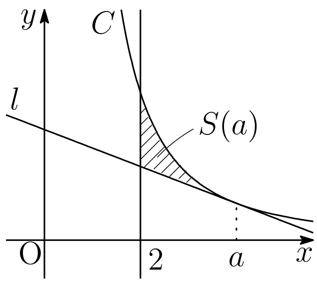
$g(a)=0$，$g'(a)=0$ であるから　$h(a)=0$，$h'(a)=0$

3 次式 $h(x)$ は $(x-a)^2$ を因数にもつから，最高次の係数に注意して

$$h(x) = (px+q)(x^2-1)-1 = p(x-a)^2(x-k)\quad (k\ は定数)$$

の形に因数分解できる．

(3) $S(a)$ は，右の図から




$$\begin{aligned} S(a) &= \int_2^a \left\{ \frac{1}{x^2-1} - (px+q) \right\} dx \\ &= \int_2^a \left\{ \frac{1}{2}\left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) - (px+q) \right\} dx \\ &= \left[ \frac{1}{2}\log\frac{x-1}{x+1} - \frac{p}{2}x^2 - qx \right]_2^a \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{3(a-1)}{a+1} + p\left(2 - \frac{a^2}{2}\right) + q(2-a) \end{aligned}$$

ここで，(1) の結果から

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{2}\log\frac{3(a-1)}{a+1} = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2}\log\frac{3\left(1-\frac{1}{a}\right)}{1+\frac{1}{a}} = \frac{1}{2}\log 3,$$

$$\lim_{a\to\infty} p\left(2-\frac{a^2}{2}\right) = \lim_{a\to\infty} \frac{-2a\left(2-\frac{a^2}{2}\right)}{(a^2-1)^2} = 0,$$

$$\lim_{a\to\infty} q(2-a) = \lim_{a\to\infty} \frac{(2-a)(3a^2-1)}{(a^2-1)^2} = 0$$

よって　　$\displaystyle \boldsymbol{\lim_{a\to\infty} S(a) = \frac{1}{2}\log 3}$