

平成 20 年度 九州工業大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

数 I · II · III · A · B · C (120 分)

工学部 平成 20 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4 5

1 2つのさいころを同時に投げるとき、偶数の目が出たさいころの個数を a 、1 の目が出たさいころの個数を b とする。次に答えよ。

- (1) x に関する 2 次方程式 $x^2 + 2(a - 1)x + b = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつような a 、 b の組をすべて求めよ。
- (2) x に関する 2 次方程式 $x^2 + 2(a - 1)x + b = 0$ の実数解の個数の期待値を求めよ。ただし、重解については、その解の個数を 1 と数える。
- (3) x に関する 3 次方程式 $x^3 + 3ax^2 - 9a^2x - 27b = 0$ の実数解の個数の期待値を求めよ。ただし、重解 (2 重解または 3 重解) については、その解の個数を 1 と数える。

2 四角形 ABCD を底面とし O を頂点とする四角錐 O-ABCD において、底面の四角形 ABCD は $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$ をみたしている。辺 OD の中点を M とし、3 点 A、B、M を通る平面が辺 OC と交わる点を N とする。次に、四角形 ABNM の対角線の交点を P とし、直線 OP が底面 ABCD と交わる点を Q とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおいて、次に答えよ。

- (1) \overrightarrow{OM} を \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} を用いて表せ。
- (2) \overrightarrow{ON} を \vec{c} を用いて表せ。
- (3) \overrightarrow{OP} を \vec{a} 、 \vec{c} を用いて表せ。
- (4) 線分の長さの比 $OP : PQ$ を求めよ。

3 行列 A, B, X_0, Y_0 を

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とする. 2次の正方行列 $X_n, Y_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ を

$$X_n = AX_{n-1} + BY_{n-1}, \quad Y_n = BX_{n-1} + AY_{n-1}$$

により定める. 次に答えよ.

(1) X_1, Y_1 を求めよ.

(2) $C = A + B$ とする. すべての自然数 n に対して $C^n = \begin{pmatrix} 4^n & -n \cdot 4^n \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$ が成り立つことを数学的帰納法によって示せ.

(3) 自然数 n に対して $S_n = X_n + Y_n$ とおく. S_n を求めよ.

(4) 自然数 n に対して $T_n = X_n - Y_n$ とおく. T_n を求めよ.

(5) 自然数 n に対して X_n を求めよ.

4 O を原点とする座標平面上に 4 点 A(4, 0), B(4, 4), C(0, 4), D(3, 2) がある. 点 R は正方形 OABC の周上では速さ 4 で動き, 正方形の内部では速さ 1 で動く. 次に答えよ.

(1) 点 P(x, 0) を線分 OA 上の点とする. 点 R が O を出発して, 折れ線 OPD に沿って D に到達するまでの時間 $f(x) (0 \leq x \leq 4)$ を求めよ.

(2) (1) で求めた $f(x)$ に対して, $f'(x) = 0$ を満たす x を求めよ.

(3) (1) で求めた $f(x)$ の最小値 T_1 を求めよ.

(4) 点 Q(4, x) を線分 AB 上の点とする. 点 R が O を出発して, 折れ線 OAQD に沿って D に到達するまでの時間を $g(x) (0 \leq x \leq 4)$ とする. $g(x)$ の最小値 T_2 を求め, (3) で求めた値 T_1 との大小を比較せよ.

5 $k > 0$ とする. 2つの曲線

$$C_1: y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{4-k}{2}x + 1, \quad C_2: y = k \log \frac{x}{2} + k - 1$$

は, ある共有点 P において共通の接線 l をもっている. ただし, 対数は自然対数を表す. 次に答えよ.

(1) 共有点 P の座標と共通の接線 l の方程式を k を用いて表せ.

(2) 接線 l が点 (1, 0) を通るとき, 曲線 C_2 と x 軸との交点の x 座標を求めよ.

(3) 接線 l が点 (1, 0) を通るとき, 曲線 C_2 と x 軸および接線 l で囲まれる部分の面積を求めよ.

解答例

1 (1) 起こり得る a, b の組は

$$(a, b) = (2, 0), (1, 1), (1, 0), (0, 2), (0, 1), (0, 0)$$

2次方程式 $x^2 + 2(a-1)x + b = 0 \cdots (*)$ の判別式を D とすると

$$D/4 = (a-1)^2 - b$$

2次方程式 $(*)$ が異なる実数解をもつ、すなわち $D > 0$ となる a, b の組は

$$(a, b) = (2, 0), (0, 0)$$

(2) a, b のそれぞれの組について、その確率および2次方程式 $(*)$ の実数解の個数は、次のようになる。

$P(a=2, b=0) = \frac{3 \cdot 3}{6 \cdot 6} = \frac{9}{36}$	$D > 0$ より	2個
$P(a=1, b=1) = \frac{3 \cdot 1}{6 \cdot 6} \times 2 = \frac{6}{36}$	$D < 0$ より	0個
$P(a=1, b=0) = \frac{3 \cdot 2}{6 \cdot 6} \times 2 = \frac{12}{36}$	$D = 0$ より	1個
$P(a=0, b=2) = \frac{1 \cdot 1}{6 \cdot 6} = \frac{1}{36}$	$D < 0$ より	0個
$P(a=0, b=1) = \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 6} \times 2 = \frac{4}{36}$	$D = 0$ より	1個
$P(a=0, b=0) = \frac{2 \cdot 2}{6 \cdot 6} = \frac{4}{36}$	$D > 0$ より	2個

2次方程式 $(*)$ の実数解の個数を X とすると

$$P(X=1) = \frac{12}{36} + \frac{4}{36} = \frac{16}{36}, \quad P(X=2) = \frac{9}{36} + \frac{4}{36} = \frac{13}{36}$$

よって、求める期待値は $1 \times \frac{16}{36} + 2 \times \frac{13}{36} = \frac{42}{36} = \frac{7}{6}$

(3) $f(x) = x^3 + 3ax^2 - 9a^2x - 27b$ とおくと

$$f'(x) = 3x^2 + 6ax - 9a^2 = 3(x + 3a)(x - a)$$

i) $a = 0$ のとき, $f(x)$ は単調増加であるから, $f(x) = 0$ の実数解は 1 個

ii) $a > 0$ のとき, $f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	...	$-3a$...	a	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$27(a^3 - b)$	↘	$-5a^3 - 27b$	↗

$f(a) = -5a^3 - 27b < 0$ であるから, $f(x) = 0$ の実数解の個数は

$f(-3a) < 0$ のとき 1 個,

$f(-3a) = 0$ のとき 2 個,

$f(-3a) > 0$ のとき 3 個

$f(x) = 0$ の実数解の個数を Y とすると

$Y = 1$ であるのは $(a, b) = (0, 2), (0, 1), (0, 0)$

$Y = 2$ であるのは $(a, b) = (1, 1)$

$Y = 3$ であるのは $(a, b) = (1, 0), (2, 0)$

したがって $P(Y = 1) = \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{4}{36} = \frac{9}{36}$

$$P(Y = 2) = \frac{6}{36}$$

$$P(Y = 3) = \frac{12}{36} + \frac{9}{36} = \frac{21}{36}$$

よって, 求める期待値は

$$1 \times \frac{9}{36} + 2 \times \frac{6}{36} + 3 \times \frac{21}{36} = \frac{84}{36} = \frac{7}{3}$$



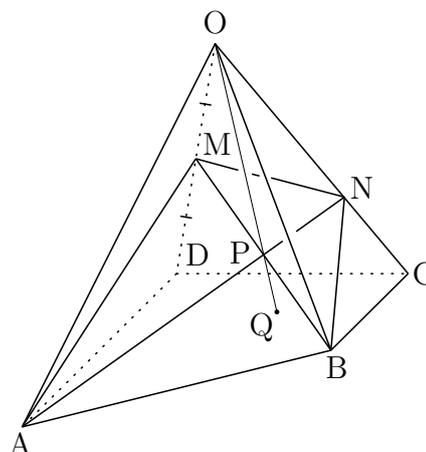
$$\boxed{2} \quad (1) \quad \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD}$$

$$\vec{AD} = 2\vec{BC} \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \vec{OD} &= \vec{OA} + 2\vec{BC} \\ &= \vec{a} + 2(\vec{c} - \vec{b}) \\ &= \vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c} \end{aligned}$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{OD} \text{ であるから}$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$



(2) 3点 A, B, M を通る平面上の位置ベクトルは

$$\begin{aligned} &\alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB} + \gamma\vec{OM}, & \alpha + \beta + \gamma &= 1 \quad \dots \textcircled{1} \\ &= \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right) \\ &= \left(\alpha + \frac{1}{2}\gamma\right)\vec{a} + (\beta - \gamma)\vec{b} + \gamma\vec{c} \end{aligned}$$

この平面と直線 OC の交点が N であるから

$$\alpha + \frac{1}{2}\gamma = 0 \quad \dots \textcircled{2}, \quad \beta - \gamma = 0 \quad \dots \textcircled{3}, \quad \vec{ON} = \gamma\vec{c}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ を解いて } \alpha = -\frac{1}{3}, \beta = \gamma = \frac{2}{3} \text{ よって } \vec{ON} = \frac{2}{3}\vec{c}$$

(3) P は直線 BM 上にあるから

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= (1-t)\vec{OB} + t\vec{OM} \\ &= (1-t)\vec{b} + t\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right) = \frac{1}{2}t\vec{a} + (1-2t)\vec{b} + t\vec{c} \end{aligned}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は 1 次独立であり, P は平面 OAC 上の点であるから

$$1 - 2t = 0 \text{ これを解いて } t = \frac{1}{2} \text{ よって } \vec{OP} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$(4) \vec{OQ} = k\vec{OP} \text{ とおくと } \vec{OQ} = \frac{k}{4}\vec{a} + \frac{k}{2}\vec{c}$$

Q は, 平面 ABC 上の点であるから

$$\frac{k}{4} + \frac{k}{2} = 1 \text{ これを解いて } k = \frac{4}{3}$$

$$\text{したがって } \vec{OQ} = \frac{4}{3}\vec{OP} \text{ よって } \text{OP} : \text{PQ} = 3 : 1$$



3 (1) $X_1 = AX_0 + BY_0$ より

$$\begin{aligned} X_1 &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$Y_1 = BX_0 + AY_0$ より

$$\begin{aligned} Y_1 &= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) $C = A + B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ のとき, すべて

の自然数 n に対して $C^n = \begin{pmatrix} 4^n & -n \cdot 4^n \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \cdots (*)$ とする.

i) $n = 1$ のとき, 明らかに $(*)$ は成り立つ.

ii) $n = k$ のとき,

$$C^k = \begin{pmatrix} 4^k & -k \cdot 4^k \\ 0 & 4^k \end{pmatrix}$$

であると仮定すると

$$\begin{aligned} C^{k+1} &= C^k C = \begin{pmatrix} 4^k & -k \cdot 4^k \\ 0 & 4^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4^{k+1} & -(k+1)4^{k+1} \\ 0 & 4^{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって, $n = k + 1$ のときも $(*)$ が成り立つ.

i), ii) より, すべての自然数 n について, $(*)$ が成り立つ.

(3) $S_n = X_n + Y_n$ より

$$\begin{aligned} S_0 &= X_0 + Y_0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E, \\ S_n &= (AX_{n-1} + BY_{n-1}) + (BX_{n-1} + AY_{n-1}) \\ &= (A + B)(X_{n-1} + Y_{n-1}) \\ &= CS_{n-1} \end{aligned}$$

したがって、上式および(2)の結果から

$$S_n = C^n S_0 = C^n E = C^n = \begin{pmatrix} 4^n & -n4^n \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

(4) $D = A - B$ とおくと、

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

これをハミルトン・ケリーの定理に適用して $D^2 - 4D = O$

したがって $D^n = 4^{n-1}D$ (n は自然数)

$T_n = X_n - Y_n$ より

$$\begin{aligned} T_0 &= X_0 - Y_0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \\ T_n &= (AX_{n-1} + BY_{n-1}) - (BX_{n-1} + AY_{n-1}) \\ &= (A - B)(X_{n-1} - Y_{n-1}) \\ &= DT_{n-1} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} T_n &= D^n T_0 = 4^{n-1} D T_0 \\ &= 4^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 4^{n-1} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \cdot 4^{n-1} & 2 \cdot 4^{n-1} \\ 6 \cdot 4^{n-1} & 2 \cdot 4^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(5) (3),(4)の結果から

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{2}(S_n + T_n) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 4^n & -n4^n \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \cdot 4^{n-1} & 2 \cdot 4^{n-1} \\ 6 \cdot 4^{n-1} & 2 \cdot 4^{n-1} \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \cdot 4^{n-1} & (1-2n) \cdot 4^{n-1} \\ 3 \cdot 4^{n-1} & 3 \cdot 4^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4 (1) $f(x) = \frac{OP}{4} + \frac{PD}{1}$

$$= \frac{x}{4} + \sqrt{(x-3)^2 + 4}$$

(2) (1)の結果を微分すると

$$f'(x) = \frac{1}{4} + \frac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2 + 4}} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$f'(x) = 0 \text{となるのは} \quad \frac{3-x}{\sqrt{(x-3)^2 + 4}} = \frac{1}{4} \quad \dots \textcircled{2}$$

②の両辺を平方して整理すると

$$16(3-x)^2 = (x-3)^2 + 4 \quad \text{ゆえに} \quad 15(3-x)^2 = 4$$

②より, $3-x > 0$ であるから

$$3-x = \frac{2}{\sqrt{15}} \quad \text{よって} \quad x = 3 - \frac{2}{\sqrt{15}}$$

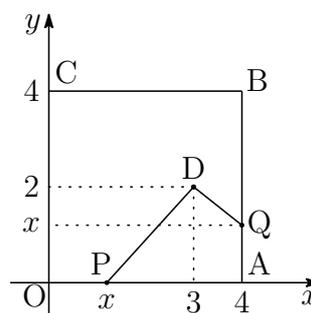
(3) ①を微分すると

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\sqrt{(x-3)^2 + 4} - (x-3) \cdot \frac{(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2 + 4}}}{(x-3)^2 + 4} \\ &= \frac{4}{\{(x-3)^2 + 4\}^{\frac{3}{2}}} > 0 \end{aligned}$$

(2)で求めた値を α とすると $\alpha = 3 - \frac{2}{\sqrt{15}} \quad \dots \textcircled{3}$

x	0	...	α	...	4
$f'(x)$		-	0	+	
$f''(x)$		+	+	+	
$f(x)$	$\sqrt{13}$	\searrow	極小	\nearrow	$1 + \sqrt{5}$

したがって $T_1 = f(\alpha)$



$$\textcircled{2} \text{ より } \sqrt{(\alpha - 3)^2 + 4} = 4(3 - \alpha) \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より } T_1 = f(\alpha) &= \frac{\alpha}{4} + \sqrt{(\alpha - 3)^2 + 4} \\ &= \frac{\alpha}{4} + 4(3 - \alpha) = 12 - \frac{15}{4}\alpha \\ &= 12 - \frac{15}{4} \left(3 - \frac{2}{\sqrt{15}} \right) = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{15}}{2} \end{aligned}$$

(4) 前ページの図から

$$g(x) = \frac{OA + AQ}{4} + \frac{QD}{1} = \frac{4 + x}{4} + \sqrt{(x - 2)^2 + 1}$$

このとき, $g'(x)$, $g''(x)$ は, (2), (3) と同様に

$$g'(x) = \frac{1}{4} + \frac{x - 2}{\sqrt{(x - 2)^2 + 1}}, \quad g''(x) = \frac{1}{\{(x - 2)^2 + 1\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$g'(\beta) = 0 \text{ をみたす } \beta \text{ (} 0 < \beta < 4 \text{)} \text{ は } \frac{2 - \beta}{\sqrt{(\beta - 2)^2 + 1}} = \frac{1}{4} \quad \dots \textcircled{4}$$

④の両辺を平方して整理すると

$$16(2 - \beta)^2 = (\beta - 2)^2 + 1 \quad 15(2 - \beta)^2 = 1$$

④より, $2 - \beta > 0$ であるから

$$2 - \beta = \frac{1}{\sqrt{15}} \quad \text{よって} \quad \beta = 2 - \frac{1}{\sqrt{15}} \quad \dots \textcircled{5}$$

x	0	...	β	...	4
$g'(x)$		-	0	+	
$g''(x)$		+	+	+	
$g(x)$	$1 + \sqrt{5}$	\searrow	極小	\nearrow	$2 + \sqrt{5}$

したがって $T_2 = g(\beta)$

$$\textcircled{4} \text{ より } \sqrt{(\beta - 2)^2 + 1} = 4(2 - \beta) \quad \dots \textcircled{6}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5}, \textcircled{6} \text{ より } T_2 = g(\beta) &= \frac{4 + \beta}{4} + \sqrt{(\beta - 2)^2 + 1} \\ &= \frac{4 + \beta}{4} + 4(2 - \beta) = 9 - \frac{15}{4}\beta \\ &= 9 - \frac{15}{4} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{15}} \right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{15}}{4} \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } T_1 - T_2 = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{15}}{2} \right) - \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{15}}{4} \right) = \frac{\sqrt{15} - 3}{4} > 0$$

よって $T_1 > T_2$ ■

5 (1) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{4-k}{2}x + 1$, $g(x) = k \log \frac{x}{2} + k - 1$ とおくと

$$f'(x) = x - \frac{4-k}{2}, \quad g'(x) = \frac{k}{x}$$

点 P の x 座標を p とおくと, $f'(p) = g'(p)$ であるから

$$p - \frac{4-k}{2} = \frac{k}{p} \quad \text{ゆえに} \quad (p-2)(2p+k) = 0$$

$k > 0$, $p > 0$ であるから $p = 2$

このとき $f(2) = k - 1$, $g(2) = k - 1$ ゆえに $P(2, k - 1)$

したがって, P における接線の傾きは $f'(2) = g'(2) = \frac{k}{2}$

よって, 接線 l の方程式は

$$y - (k - 1) = \frac{k}{2}(x - 2) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{k}{2}x - 1$$

(2) l が点 $(1, 0)$ を通るから

$$0 = \frac{k}{2} \cdot 1 - 1 \quad \text{これを解いて} \quad k = 2$$

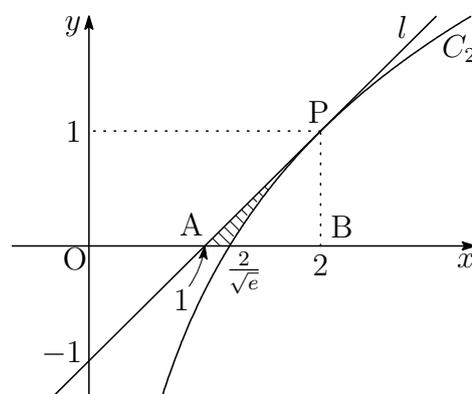
よって $C_2: y = 2 \log \frac{x}{2} + 1$

これに $y = 0$ を代入すると

$$0 = 2 \log \frac{x}{2} + 1 \quad \text{よって} \quad x = \frac{2}{\sqrt{e}}$$

(3) 求める面積は, 図の斜線部分で, その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABP - \int_{\frac{2}{\sqrt{e}}}^2 \left(2 \log \frac{x}{2} + 1 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} - \left[2x \log \frac{x}{2} - x \right]_{\frac{2}{\sqrt{e}}}^2 \\ &= \frac{5}{2} - \frac{4}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$



■