平成19年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
数I・II・III・A・B・C (120分)
工学部　平成19年2月25日

問題 1 2 3 4 5

1 8枚のカードがあり，2枚のカードには数字の2が書いてあり，残りの6枚のカードには数字の6が書いてある．8枚のカードの中から同時に2枚を取り出すとき，その2枚のカードに書かれた数字に対して，次のように点数を定める．

> 2枚のカードに書かれた数字が同じとき，その数を a とし，方程式 $\cos(ax) = \sin(ax)$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ の解の個数を点数とする．
>
> 2枚のカードに書かれた数字が異なるとき，大きい方の数を b，小さい方の数を c とし，方程式 $\cos(bx) = \cos(cx)$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ の解の個数を点数とする．

次に答えよ．

(1) 2枚のカードに書かれた数字がともに2のときの点数を求めよ．

(2) 2枚のカードに書かれた数字の一方が2，他方が6のときの点数を求めよ．

(3) 2枚のカードに書かれた数字が同じになる確率を求めよ．

(4) 点数の期待値を求めよ．

2 数列 $\{a_n\}$ を，$a_1 = a_2 = 1$，$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定める．また，数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \cos(a_n\pi)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定め，数列 $\{c_n\}$ を $c_n = \cos\left(\dfrac{a_n}{2}\pi\right)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定める．次に答えよ．

(1) b_1，b_2，b_3，b_4，b_5，b_6 の値を求めよ．

(2) b_{n+3} $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を b_n を用いて表せ．

(3) b_{100} の値を求めよ．

(4) c_1，c_2，c_3，c_4，c_5，c_6 の値を求めよ．

(5) c_{2007} の値を求めよ．

3 行列 $P = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ がある．行列 A，B をそれぞれ $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & a \\ b & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & c \\ d & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ とする．次に答えよ．

(1) $P = A + 4B$，$AB = BA$ をみたすように a，b，c，d を定め，積 AB を求めよ．

(2) a，b，c，d を (1) で定めた値とする．自然数 n に対して A^n と B^n を求めよ．

(3) 自然数 n に対して P^n を求めよ．

4 曲線 $C : y = \log x$ 上の点 $\mathrm{P}(e,\ 1)$ における法線が x 軸と交わる点を Q とする．ただし，対数は自然対数を表し，e は自然対数の底とする．次に答えよ．

(1) 点 Q の座標を求めよ．

(2) 点 P，Q および原点 O を通り，y 軸に平行な軸をもつ放物線の方程式を求めよ．

(3) 曲線 C と x 軸との交点を R とする．(2) で求めた放物線と曲線 C および線分 OR で囲まれる図形の面積 S を求めよ．

(4) (3) の図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

5 曲線 $C : y = \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$ 上の点 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ における接線 l_1 と直線 $l_2 : y = b^2x + 2b\ \left(b > \dfrac{1}{a}\right)$ について，次に答えよ．

(1) 接線 l_1 の方程式を求めよ．

(2) l_1 と l_2 の交点を $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とする．X と Y をそれぞれ a，b を用いて表せ．

(3) l_1，l_2 および y 軸で囲まれる図形の面積 S が $2 - \sqrt{2}$ であるとき，ab の値を求めよ．またこのとき，X を a を用いて表し，Y を b を用いて表せ．

(4) 点 P が動くとき，$S = 2 - \sqrt{2}$ をみたしながら動く l_1 と l_2 の交点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ の軌跡を図示せよ．

解答例

1 (1) 2 枚のカードの数字がともに 2 のとき

$$\cos 2x = \sin 2x \quad \text{ゆえに} \quad \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

これを解いて　$x = \dfrac{\pi}{8},\ \dfrac{5}{8}\pi$　点数は　**2**

(2) 2 枚のカードの数字が 2 と 6 のとき

$$\cos 6x = \cos 2x \quad \text{ゆえに} \quad \sin 4x \sin 2x = 0 \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

これを解いて　$x = 0,\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \pi$　点数は　**5**

(3) 2 枚のカードの数字がともに 2，または，ともに 6 の確率であるから

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_2 + {}_6\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2} = \frac{1+15}{28} = \boldsymbol{\frac{4}{7}}$$

(4) 2 枚のカードの数字がともに 6 のとき

$$\cos 6x = \sin 6x \quad \text{ゆえに} \quad \sin\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

これを解いて　$x = \dfrac{\pi}{24},\ \dfrac{5}{24}\pi,\ \dfrac{9}{24}\pi,\ \dfrac{13}{24}\pi,\ \dfrac{17}{24}\pi,\ \dfrac{21}{24}\pi$　点数は　6

点数を X とすると

$$P(X=2) = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2} = \frac{1}{28}, \quad P(X=5) = \frac{{}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_6\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2} = \frac{12}{28},$$
$$P(X=6) = \frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2} = \frac{15}{28}$$

よって，期待値 $E(X)$ は

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{28} + 5 \times \frac{12}{28} + 6 \times \frac{15}{28} = \frac{152}{28} = \boldsymbol{\frac{38}{7}}$$

補足　$P(X=5) = 1 - P(X=2) - P(X=6) = 1 - \dfrac{1}{28} - \dfrac{15}{28} = \dfrac{12}{28}$　■

2 (1) 漸化式から

$$a_1 = 1,\quad a_2 = 1,\quad a_3 = 2,\quad a_4 = 3,\quad a_5 = 5,\quad a_6 = 8$$

したがって

$$b_1 = \cos\pi = \mathbf{-1},\qquad b_2 = \cos\pi = \mathbf{-1},\qquad b_3 = \cos 2\pi = \mathbf{1},$$
$$b_4 = \cos 3\pi = \mathbf{-1},\qquad b_5 = \cos 5\pi = \mathbf{-1},\qquad b_6 = \cos 8\pi = \mathbf{1}$$

(2) 漸化式から

$$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} = (a_{n+1} + a_n) + a_{n+1} = 2a_{n+1} + a_n$$

上式および $\{a_n\}$ が整数であることから

$$b_{n+3} = \cos(a_{n+3}\pi) = \cos\{(2a_{n+1} + a_n)\pi\} = \cos(a_n\pi) = b_n$$

したがって　　$\boldsymbol{b_{n+3} = b_n}$

(3) (2) の結果により　$b_{100} = b_1 = \mathbf{-1}$

(4) (1) と同様にして

$$c_1 = \cos\frac{\pi}{2} = \mathbf{0},\qquad c_2 = \cos\frac{\pi}{2} = \mathbf{0},\qquad c_3 = \cos\frac{2}{2}\pi = \mathbf{-1},$$
$$c_4 = \cos\frac{3}{2}\pi = \mathbf{0},\qquad c_5 = \cos\frac{5}{2}\pi = \mathbf{0},\qquad c_6 = \cos\frac{8}{2}\pi = \mathbf{1}$$

(5) 漸化式から

$$\begin{aligned}
a_{n+6} &= a_{n+5} + a_{n+4} = (a_{n+4} + a_{n+3}) + a_{n+4} = 2a_{n+4} + a_{n+3} \\
&= 2(a_{n+3} + a_{n+2}) + a_{n+3} = 3a_{n+3} + 2a_{n+2} \\
&= 3(a_{n+2} + a_{n+1}) + 2a_{n+2} = 4(a_{n+2} + a_{n+1}) + (a_{n+2} - a_{n+1}) \\
&= 4(a_{n+2} + a_{n+1}) + a_n
\end{aligned}$$

上式および $\{a_n\}$ が整数であることから

$$\begin{aligned}
c_{n+6} &= \cos\left(\frac{a_{n+6}}{2}\pi\right) \\
&= \cos\left\{\frac{4(a_{n+2} + a_{n+1}) + a_n}{2}\pi\right\} = \cos\left(\frac{a_n}{2}\pi\right) = c_n
\end{aligned}$$

したがって　　$c_{n+6} = c_n$

上式および (4) の結果から　　$c_{2007} = c_3 = \mathbf{-1}$ ■

3 (1) $P = A + 4B$ より

$$\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & a \\ b & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & c \\ d & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & a+4c \\ b+4d & 2 \end{pmatrix} \quad \cdots (*)$$

$AB = BA$ より

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 3b & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3c \\ 3d & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 3c \\ 3d & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 3b & 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 9ad+2 & 3a+3c \\ 6b+6d & 9bc+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9bc+2 & 6a+6c \\ 3b+3d & 9ad+2 \end{pmatrix} \quad \cdots (**)$$

$(*)$，$(**)$ の両辺の (1,2) 成分から　$a = -\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，$c = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

$(*)$，$(**)$ の両辺の (2,1) 成分から　$b = -\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，$d = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

これらの値は $(**)$ における (1,1) 成分および (2,2) 成分を満たす．

また，このとき　$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

(2) (1) の結果より，$A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$，$B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ から，

$$A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$
$$B^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$A^2 = A$，$B^2 = B$ であるから，$A^n = A$，$B^n = B$ より

$$\boldsymbol{A^n} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\sqrt{\mathbf{2}} \\ -\sqrt{\mathbf{2}} & \mathbf{2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B^n} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \sqrt{\mathbf{2}} \\ \sqrt{\mathbf{2}} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

(3) (1)，(2) の結果から[1]　$P^n = (A+4B)^n = A + 4^n B$

ゆえに　$\boldsymbol{P^n} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\begin{pmatrix} \mathbf{1+2\cdot 4^n} & \sqrt{\mathbf{2}}\cdot\mathbf{4^n} - \sqrt{\mathbf{2}} \\ \sqrt{\mathbf{2}}\cdot\mathbf{4^n} - \sqrt{\mathbf{2}} & \mathbf{2+4^n} \end{pmatrix}$ ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf のスペクトル分解を参照．

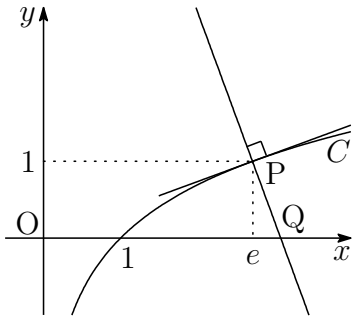
4 (1) $y = \log x$ より　$y' = \dfrac{1}{x}$

$x = e$ のとき　$-\dfrac{1}{y'} = -e$

C の点 $(e,\ 1)$ における法線の方程式は

$$y - 1 = -e(x - e)$$

ゆえに　$y = -ex + e^2 + 1$



上式に $y = 0$ を代入すると　$x = \dfrac{e^2+1}{e}$　よって　$\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\dfrac{e^2+1}{e}},\ \mathbf{0}\right)$

(2) 2 点 O，Q を通り，y 軸に平行な軸をもつ放物線を

$$y = ax\left(x - \frac{e^2+1}{e}\right)$$

とおく (a は定数)．これが点 $\mathrm{P}(e,\ 1)$ を通るから

$$1 = ae\left(e - \frac{e^2+1}{e}\right) \quad \text{ゆえに} \quad a = -1$$

よって，求める放物線の方程式は

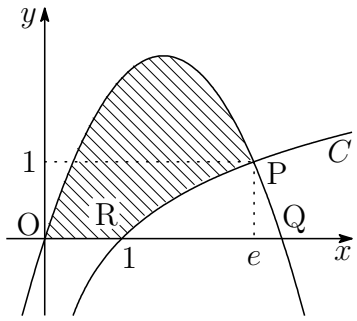
$$y = -x\left(x - \frac{e^2+1}{e}\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -x^2 + \frac{e^2+1}{e}x}$$

(3) S は右の図の斜線部分の面積であるから

$$S = \int_0^e \left(-x^2 + \frac{e^2+1}{e}x\right)dx - \int_1^e \log x\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{e^2+1}{2e}x^2\right]_0^e - \Big[\,x(\log x - 1)\,\Big]_1^e$$

$$= \boldsymbol{\frac{e^3}{6} + \frac{e}{2} - 1}$$



(4) $V = \pi\displaystyle\int_0^e \left(-x^2 + \frac{e^2+1}{e}x\right)^2 dx - \pi\int_1^e (\log x)^2\,dx$

$$= \pi\left[\frac{x^5}{5} - \frac{e^2+1}{2e}x^4 + \frac{(e^2+1)^2}{3e^2}x^3\right]_0^e - \pi\Big[x\{(\log x)^2 - 2\log x + 2\}\Big]_1^e$$

$$= \boldsymbol{\left(\frac{e^5}{30} + \frac{e^3}{6} - \frac{2}{3}e + 2\right)\pi}$$

■

5 (1) $y=\dfrac{1}{x}$ を微分すると　$y'=-\dfrac{1}{x^2}$

l_1 は，C の $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ における接線であるから

$$y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=-\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a}}$$

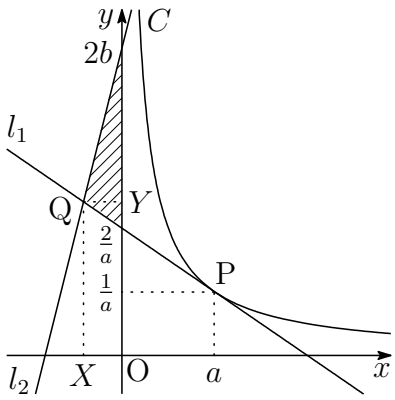
(2) $l_1: y=-\dfrac{1}{a^2}x+\dfrac{2}{a}$，$l_2: y=b^2x+2b$

上の 2 式を連立させて解くと

$$x=\frac{2a(1-ab)}{1+a^2b^2},\quad y=\frac{2b(1+ab)}{1+a^2b^2}$$

よって　$\boldsymbol{X=\dfrac{2a(1-ab)}{1+a^2b^2}}$,

$\boldsymbol{Y=\dfrac{2b(1+ab)}{1+a^2b^2}}$



(3) S は上の図の斜線部分の面積であるから，$b>\dfrac{1}{a}>0$ に注意して

$$ab>1,\quad 2b-\frac{2}{a}=2\left(b-\frac{1}{a}\right)>0,\quad X=-\frac{2a^2\left(b-\dfrac{1}{a}\right)}{1+a^2b^2}<0$$

したがって　$S=\dfrac{1}{2}\left(2b-\dfrac{2}{a}\right)\times\dfrac{2a^2\left(b-\dfrac{1}{a}\right)}{1+a^2b^2}=\dfrac{2(ab-1)^2}{1+a^2b^2}$

$$=\frac{2\{(1+a^2b^2)-2ab\}}{1+a^2b^2}=2-\frac{4ab}{1+a^2b^2}$$

$S=2-\sqrt{2}$ のとき

$$\frac{4ab}{1+a^2b^2}=\sqrt{2}\quad \text{ゆえに}\quad 1+a^2b^2=2\sqrt{2}ab\quad \cdots ①$$

したがって　$(ab)^2-2\sqrt{2}ab+1=0$

$ab>1$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{ab=\sqrt{2}+1}$　$\cdots$②

①，② を (2) に代入すると

$$X = \frac{2a(1-ab)}{1+a^2b^2} = \frac{2a\{1-(\sqrt{2}+1)\}}{2\sqrt{2}ab} = -\frac{1}{b}$$
$$Y = \frac{2b(1+ab)}{1+a^2b^2} = \frac{2b\{1+(\sqrt{2}+1)\}}{2\sqrt{2}ab} = \frac{\sqrt{2}+1}{a}$$

② より，$\dfrac{1}{b} = \dfrac{a}{\sqrt{2}+1}$，$\dfrac{\sqrt{2}+1}{a} = b$ であるから

$$\boldsymbol{X = -\frac{a}{\sqrt{2}+1}, \quad Y = b}$$

(4) (3) の結果から　$a = -(\sqrt{2}+1)X, \quad b = Y$

これらを $ab = \sqrt{2}+1$ に代入すると

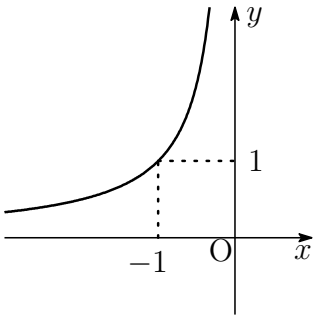
$$XY = -1$$

また，$a > 0$ より　$X < 0$

よって，求める軌跡の方程式は

$$\boldsymbol{xy = -1 \ (x < 0)}$$

その図形は，右の図のようになる．



■