

平成19年度 九州工業大学2次試験前期日程(数学問題)

工学部 平成19年2月25日

- 数I・II・III・A・B・C (120分)

- 1 8枚のカードがあり、2枚のカードには数字の2が書いてあり、残りの6枚のカードには数字の6が書いてある。8枚のカードの中から同時に2枚を取り出すとき、その2枚のカードに書かれた数字に対して、次のように点数を定める。

2枚のカードに書かれた数字が同じとき、その数を a とし、方程式 $\cos(ax) = \sin(ax)$ ($0 \leq x \leq \pi$) の解の個数を点数とする。

2枚のカードに書かれた数字が異なるとき、大きい方の数を b 、小さい方の数を c とし、方程式 $\cos(bx) = \cos(cx)$ ($0 \leq x \leq \pi$) の解の個数を点数とする。

次に答えよ。

- (1) 2枚のカードに書かれた数字がともに2のときの点数を求めよ。
- (2) 2枚のカードに書かれた数字の一方が2、他方が6のときの点数を求めよ。
- (3) 2枚のカードに書かれた数字が同じになる確率を求めよ。
- (4) 点数の期待値を求めよ。

- 2 数列 $\{a_n\}$ を、 $a_1 = a_2 = 1$ 、 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定める。

また、数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \cos(a_n\pi)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定め、数列 $\{c_n\}$ を $c_n = \cos\left(\frac{a_n}{2}\pi\right)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定める。次に答えよ。

- (1) $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ の値を求めよ。
- (2) b_{n+3} ($n = 1, 2, 3, \dots$) を b_n を用いて表せ。
- (3) b_{100} の値を求めよ。
- (4) $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ の値を求めよ。
- (5) c_{2007} の値を求めよ。

3 行列 $P = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ がある. 行列 A, B をそれぞれ $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & a \\ b & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & c \\ d & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ とする. 次に答えよ.

- (1) $P = A + 4B$, $AB = BA$ をみたすように a, b, c, d を定め, 積 AB を求めよ.
- (2) a, b, c, d を (1) で定めた値とする. 自然数 n に対して A^n と B^n を求めよ.
- (3) 自然数 n に対して P^n を求めよ.

4 曲線 $C : y = \log x$ 上の点 $P(e, 1)$ における法線が x 軸と交わる点を Q とする. ただし, 対数は自然対数を表し, e は自然対数の底とする. 次に答えよ.

- (1) 点 Q の座標を求めよ.
- (2) 点 P, Q および原点 O を通り, y 軸に平行な軸をもつ放物線の方程式を求めよ.
- (3) 曲線 C と x 軸との交点を R とする. (2) で求めた放物線と曲線 C および線分 OR で囲まれる図形の面積 S を求めよ.
- (4) (3) の図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ.

5 曲線 $C : y = \frac{1}{x} (x > 0)$ 上の点 $P\left(a, \frac{1}{a}\right)$ における接線 l_1 と

直線 $l_2 : y = b^2x + 2b \left(b > \frac{1}{a}\right)$ について, 次に答えよ.

- (1) 接線 l_1 の方程式を求めよ.
- (2) l_1 と l_2 の交点を $Q(X, Y)$ とする. X と Y をそれぞれ a, b を用いて表せ.
- (3) l_1, l_2 および y 軸で囲まれる図形の面積 S が $2 - \sqrt{2}$ であるとき, ab の値を求めよ. またこのとき, X を a を用いて表し, Y を b を用いて表せ.
- (4) 点 P が動くとき, $S = 2 - \sqrt{2}$ をみたしながら動く l_1 と l_2 の交点 $Q(X, Y)$ の軌跡を図示せよ.

正解

- 1 (1) 2枚のカードの数字がともに2のとき

$$\cos 2x = \sin 2x \quad \text{ゆえに} \quad \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$$\text{これを解いて} \quad x = \frac{\pi}{8}, \frac{5}{8}\pi \quad \text{点数は} \quad \mathbf{2}$$

- (2) 2枚のカードの数字が2と6のとき

$$\cos 6x = \cos 2x \quad \text{ゆえに} \quad \sin 4x \sin 2x = 0 \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$$\text{これを解いて} \quad x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi, \pi \quad \text{点数は} \quad \mathbf{5}$$

- (3) 2枚のカードの数字がともに2, または, ともに6の確率であるから

$$\frac{{}_2C_2 + {}_6C_2}{{}_8C_2} = \frac{1 + 15}{28} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{7}}$$

- (4) 2枚のカードの数字がともに6のとき

$$\cos 6x = \sin 6x \quad \text{ゆえに} \quad \sin\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$$\text{これを解いて} \quad x = \frac{\pi}{24}, \frac{5}{24}\pi, \frac{9}{24}\pi, \frac{13}{24}\pi, \frac{17}{24}\pi, \frac{21}{24}\pi \quad \text{点数は} \quad \mathbf{6}$$

点数を X とすると

$$P(X=2) = \frac{{}_2C_2}{{}_8C_2} = \frac{1}{28}, \quad P(X=5) = \frac{{}_2C_1 \cdot {}_6C_1}{{}_8C_2} = \frac{12}{28},$$

$$P(X=6) = \frac{{}_6C_2}{{}_8C_2} = \frac{15}{28}$$

よって, 期待値 $E(X)$ は

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{28} + 5 \times \frac{12}{28} + 6 \times \frac{15}{28} = \frac{152}{28} = \frac{\mathbf{38}}{\mathbf{7}}$$

$$\text{補足} \quad P(X=5) = 1 - P(X=2) - P(X=6) = 1 - \frac{1}{28} - \frac{15}{28} = \frac{12}{28}$$

2 (1) 漸化式から

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 3, \quad a_5 = 5, \quad a_6 = 8$$

したがって

$$\begin{aligned} b_1 &= \cos \pi = -1, & b_2 &= \cos \pi = -1, & b_3 &= \cos 2\pi = 1, \\ b_4 &= \cos 3\pi = -1, & b_5 &= \cos 5\pi = -1, & b_6 &= \cos 8\pi = 1 \end{aligned}$$

(2) 漸化式から

$$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} = (a_{n+1} + a_n) + a_{n+1} = 2a_{n+1} + a_n$$

上式および $\{a_n\}$ が整数であることから

$$b_{n+3} = \cos(a_{n+3}\pi) = \cos\{(2a_{n+1} + a_n)\pi\} = \cos(a_n\pi) = b_n$$

したがって $b_{n+3} = b_n$

(3) (2) の結果により $b_{100} = b_1 = -1$

(4) (1) と同様にして

$$\begin{aligned} c_1 &= \cos \frac{\pi}{2} = 0, & c_2 &= \cos \frac{\pi}{2} = 0, & c_3 &= \cos \frac{2}{2}\pi = -1, \\ c_4 &= \cos \frac{3}{2}\pi = 0, & c_5 &= \cos \frac{5}{2}\pi = 0, & c_6 &= \cos \frac{8}{2}\pi = 1 \end{aligned}$$

(5) 漸化式から

$$\begin{aligned} a_{n+6} &= a_{n+5} + a_{n+4} = (a_{n+4} + a_{n+3}) + a_{n+4} = 2a_{n+4} + a_{n+3} \\ &= 2(a_{n+3} + a_{n+2}) + a_{n+3} = 3a_{n+3} + 2a_{n+2} \\ &= 3(a_{n+2} + a_{n+1}) + 2a_{n+2} = 4(a_{n+2} + a_{n+1}) + (a_{n+2} - a_{n+1}) \\ &= 4(a_{n+2} + a_{n+1}) + a_n \end{aligned}$$

上式および $\{a_n\}$ が整数であることから

$$\begin{aligned} c_{n+6} &= \cos \left(\frac{a_{n+6}}{2} \pi \right) \\ &= \cos \left\{ \frac{4(a_{n+2} + a_{n+1}) + a_n}{2} \pi \right\} = \cos \left(\frac{a_n}{2} \pi \right) = c_n \end{aligned}$$

したがって $c_{n+6} = c_n$

上式および (4) の結果から $c_{2007} = c_3 = -1$

3 (1) $P = A + 4B$ より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & a \\ b & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & c \\ d & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & a+4c \\ b+4d & 2 \end{pmatrix} \quad \dots (*) \end{aligned}$$

$AB = BA$ より

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 3b & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3c \\ 3d & 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 3c \\ 3d & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 3b & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 9ad+2 & 3a+3c \\ 6b+6d & 9bc+2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 9bc+2 & 6a+6c \\ 3b+3d & 9ad+2 \end{pmatrix} \quad \dots (**) \end{aligned}$$

(*), (**) の両辺の (1,2) 成分から $a = -\frac{\sqrt{2}}{3}, c = \frac{\sqrt{2}}{3}$

(*), (**) の両辺の (2,1) 成分から $b = -\frac{\sqrt{2}}{3}, d = \frac{\sqrt{2}}{3}$

これらの値は (**) における (1,1) 成分および (2,2) 成分を満たす。

また, このとき $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) (1) の結果より, $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ から,

$$A^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$A^2 = A, B^2 = B$ であるから, $A^n = A, B^n = B$ より

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, B^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

(3) (1), (2) の結果から¹ $P^n = (A + 4B)^n = A + 4^n B$

ゆえに $P^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot 4^n & \sqrt{2} \cdot 4^n - \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \cdot 4^n - \sqrt{2} & 2 + 4^n \end{pmatrix}$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf のスペクトル分解を参照。

4 (1) $y = \log x$ より $y' = \frac{1}{x}$

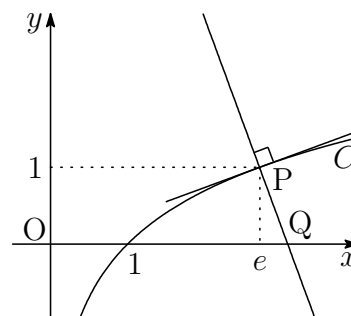
$$x = e \text{ のとき } -\frac{1}{y'} = -e$$

C の点 $(e, 1)$ における法線の方程式は

$$y - 1 = -e(x - e)$$

$$\text{ゆえに } y = -ex + e^2 + 1$$

$$\text{上式に } y = 0 \text{ を代入すると } x = \frac{e^2 + 1}{e} \text{ よって } Q\left(\frac{e^2 + 1}{e}, 0\right)$$



(2) 2点 O, Q を通り, y 軸に平行な軸をもつ放物線を

$$y = ax \left(x - \frac{e^2 + 1}{e} \right)$$

とおく (a は定数). これが点 $P(e, 1)$ を通るから

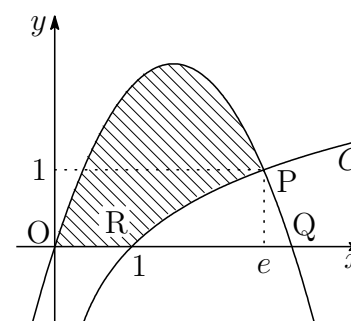
$$1 = ae \left(e - \frac{e^2 + 1}{e} \right) \text{ ゆえに } a = -1$$

よって, 求める放物線の方程式は

$$y = -x \left(x - \frac{e^2 + 1}{e} \right) \text{ すなわち } y = -x^2 + \frac{e^2 + 1}{e} x$$

(3) S は右の図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_0^e \left(-x^2 + \frac{e^2 + 1}{e} x \right) dx - \int_1^e \log x dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{e^2 + 1}{2e} x^2 \right]_0^e - \left[x(\log x - 1) \right]_1^e \\ &= \frac{e^3}{6} + \frac{e}{2} - 1 \end{aligned}$$



$$(4) V = \pi \int_0^e \left(-x^2 + \frac{e^2 + 1}{e} x \right)^2 dx - \pi \int_1^e (\log x)^2 dx$$

$$\begin{aligned} &= \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{e^2 + 1}{2e} x^4 + \frac{(e^2 + 1)^2}{3e^2} x^3 \right]_0^e - \pi \left[x \{ (\log x)^2 - 2 \log x + 2 \} \right]_1^e \\ &= \left(\frac{e^5}{30} + \frac{e^3}{6} - \frac{2}{3} e + 2 \right) \pi \end{aligned}$$

5 (1) $y = \frac{1}{x}$ を微分すると $y' = -\frac{1}{x^2}$

l_1 は, C の $P\left(a, \frac{1}{a}\right)$ における接線であるから

$$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$$

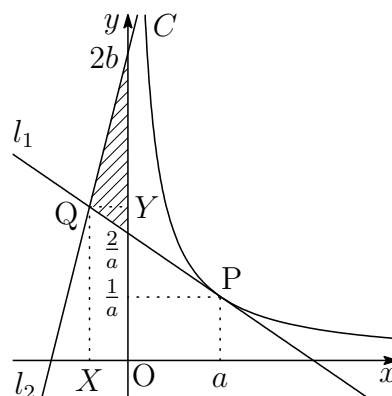
(2) $l_1 : y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$, $l_2 : y = b^2x + 2b$

上の2式を連立させて解くと

$$x = \frac{2a(1-ab)}{1+a^2b^2}, \quad y = \frac{2b(1+ab)}{1+a^2b^2}$$

よって $X = \frac{2a(1-ab)}{1+a^2b^2}$,

$$Y = \frac{2b(1+ab)}{1+a^2b^2}$$



(3) S は上の図の斜線部分の面積であるから, $b > \frac{1}{a} > 0$ に注意して

$$ab > 1, \quad 2b - \frac{2}{a} = 2\left(b - \frac{1}{a}\right) > 0, \quad X = -\frac{2a^2\left(b - \frac{1}{a}\right)}{1+a^2b^2} < 0$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad S &= \frac{1}{2} \left(2b - \frac{2}{a}\right) \times \frac{2a^2\left(b - \frac{1}{a}\right)}{1+a^2b^2} = \frac{2(ab-1)^2}{1+a^2b^2} \\ &= \frac{2\{(1+a^2b^2) - 2ab\}}{1+a^2b^2} = 2 - \frac{4ab}{1+a^2b^2} \end{aligned}$$

$S = 2 - \sqrt{2}$ のとき

$$\frac{4ab}{1+a^2b^2} = \sqrt{2} \quad \text{ゆえに} \quad 1+a^2b^2 = 2\sqrt{2}ab \quad \dots \textcircled{1}$$

したがって $(ab)^2 - 2\sqrt{2}ab + 1 = 0$

$ab > 1$ に注意してこれを解くと $ab = \sqrt{2} + 1 \quad \dots \textcircled{2}$

①, ② を (2) に代入すると

$$X = \frac{2a(1-ab)}{1+a^2b^2} = \frac{2a\{1-(\sqrt{2}+1)\}}{2\sqrt{2}ab} = -\frac{1}{b}$$

$$Y = \frac{2b(1+ab)}{1+a^2b^2} = \frac{2b\{1+(\sqrt{2}+1)\}}{2\sqrt{2}ab} = \frac{\sqrt{2}+1}{a}$$

② より, $\frac{1}{b} = \frac{a}{\sqrt{2}+1}$, $\frac{\sqrt{2}+1}{a} = b$ であるから

$$X = -\frac{a}{\sqrt{2}+1}, \quad Y = b$$

(4) (3) の結果から $a = -(\sqrt{2}+1)X$, $b = Y$

これらを $ab = \sqrt{2}+1$ に代入すると

$$XY = -1$$

また, $a > 0$ より $X < 0$

よって, 求める軌跡の方程式は

$$xy = -1 \quad (x < 0)$$

その図形は, 右の図のようになる.

