平成 18 年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
工学部　平成 18 年 2 月 25 日

- 数 I・II・III・A・B・C (120 分)

1 1，1，2，2，3，3，0 の 7 個の数字を並べてできる 7 桁の自然数 (先頭の数字が 0 になることはない) について，次に答えよ．

(1) 10 の倍数は何個あるか．

(2) 数は全部で何個あるか．

(3) 2000000 以下の数は何個あるか．

(4) 一の位の数字が 1 である数は何個あるか．

(5) すべての数の平均値を求めよ．

2 平面上に一辺の長さが k の正方形 OABC がある．この平面上に $\angle\mathrm{AOP} = 60°$，$\angle\mathrm{COP} = 150°$，$\mathrm{OP} = 1$ となる点 P をとり，線分 AP の中点を M とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$ とおいて，次に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ の長さを k を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を k と $\vec{a}$，$\vec{p}$ を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ が平行になるときの k の値を求めよ．

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ が垂直になるときの k の値を求めよ．

3 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．B は 3 行 2 列の行列で，

$B\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ をみたしている．次に答えよ．

(1) B を求めよ．

(2) AB および $(AB)^2$ を求めよ．

(3) 自然数 n に対して，$E + AB + (AB)^2 + \cdots + (AB)^n$ を求めよ．ただし，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

(4) 自然数 n に対して，$BA + (BA)^2 + (BA)^3 + \cdots + (BA)^{n+1}$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $m>0$ とする．曲線 $C: x^2+3y^2=3\ (x \geqq 0)$ と直線 $L_m: y=mx-1$ の 2 つの共有点を $\mathrm{A}(0,-1)$，$\mathrm{B}_m(p,\ q)$ とおく．次に答えよ．

(1) p，q を m を用いて表せ．

(2) 2 点 A，B_m の間の距離を $f(m)$ とする．$f(m)$ の最大値とそのときの m の値 m_0 を求めよ．

(3) (2) で求めた m_0 に対して，曲線 C と線分 AB_m の囲む図形の面積 S を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ k を実数とする．曲線 $L_k: y=x+|x-k|$ と円 $C: x^2+(y-2)^2=1$ がある．次に答えよ．

(1) 曲線 L_2 を図示し，曲線 L_2 と円 C の共有点の個数を求めよ．

(2) 曲線 L_k と円 C の共有点の個数を調べよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 一の位が「0」の個数であるから

$$\frac{6!}{2!2!2!}=\mathbf{90}\ \ (\text{個})$$

(2) 百万の位が「0」以外の個数であるから

$$\frac{7!}{2!2!2!}-\frac{6!}{2!2!}=630-90=\mathbf{540}\ \ (\text{個})$$

(3) 百万の位が「1」の個数であるから

$$\frac{6!}{2!2!}=\mathbf{180}\ \ (\text{個})$$

(4) 一の位が「1」のとき，百万の位が「0」以外の個数であるから

$$\frac{6!}{2!2!}-\frac{5!}{2!2!}=180-30=\mathbf{150}\ \ (\text{個})$$

(5) 各位に現れる数字の回数を調べる．

百万の位には,「1」「2」「3」がそれぞれ $540\div 3=180$ 回現れる．

百万以外の位に現れる「0」の回数は，残りの位に 1,1,2,2,3,3 が並ぶ個数であるから

$$\frac{6!}{2!2!2!}=90\ \ (\text{回})$$

百万以外の位に現れる「1」「2」「3」が現れる回数は，それぞれ

$$(540-90)\div 3=150\ \ (\text{回})$$

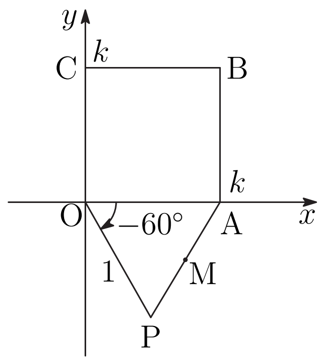
よって，求める平均値は

$$\begin{aligned}&\frac{(1+2+3)\cdot 10^6\times 180}{540}\\&\qquad+\frac{(1+2+3)\cdot(10^5+10^4+10^3+10^2+10+1)\times 150}{540}\\=&2\cdot 10^6+\frac{6\times 111\cdot 1001\times 150}{540}\\=&2\cdot 10^6+185\times 1001=\mathbf{2185185}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{p})$，$|\vec{a}| = 1$，$|\vec{p}| = k$，$\vec{a}\cdot\vec{p} = |\vec{a}||\vec{p}|\cos 60^\circ = \dfrac{k}{2}$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}| = \frac{1}{2}|\vec{a}+\vec{p}| = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{p} + |\vec{p}|^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 2\cdot\frac{k}{2} + k^2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{k^2+k+1}}$$

(2) 右の図のように，図形を座標平面上にとる．



$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\vec{a} + t\vec{p}$$

とおくと (s，t は実数)

$$(0,\ k) = s(k,\ 0) + t\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

したがって　$sk + \dfrac{t}{2} = 0$，$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t = k$　ゆえに　$s = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$t = -\dfrac{2k}{\sqrt{3}}$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\vec{a} - \dfrac{2k}{\sqrt{3}}\vec{p}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (0,\ k) - (k,\ 0) = k(-1,\ 1)$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{2}(k,\ 0) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{1}{4}(2k+1, -\sqrt{3})$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ より，$(-1,\ 1) /\!/ (2k+1, -\sqrt{3})$ であるから

$$-1\cdot(-\sqrt{3}) - 1\cdot(2k+1) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k = \frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - (k,\ 0) = \dfrac{1}{2}(1-2k, -\sqrt{3})$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より，$(-1,\ 1) \perp (1-2k, -\sqrt{3})$ であるから

$$-1\cdot(1-2k) + 1\cdot(-\sqrt{3}) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k = \frac{\sqrt{3}+1}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ であるから

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

(2)
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

ゆえに $(AB)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

(3) $C = AB$ とおくと，$C^2 = E$

i) n が偶数のとき $(n = 2m)$

$$\begin{aligned} E + AB + (AB)^2 + \cdots + (AB)^n &= E + C + C^2 + \cdots + C^{2m} \\ &= E + \sum_{k=1}^{m}(C^{2k-1} + C^{2k}) \\ &= E + \sum_{k=1}^{m}(C + E) \\ &= E + m(C + E) = E + \frac{n}{2}(C + E) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2n+2 & -n \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

ii) n が奇数のとき $(n = 2m + 1)$

$$\begin{aligned} E + AB + (AB)^2 + \cdots + (AB)^n &= E + C + C^2 + \cdots + C^{2m+1} \\ &= \sum_{k=0}^{m}(C^{2k} + C^{2k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{m}(E + C) \\ &= (m+1)(E + C) = \frac{n+1}{2}(E + C) \\ &= \boldsymbol{\frac{n+1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} &BA+(BA)^2+(BA)^3+\cdots+(BA)^{n+1} \\ =&B\{E+AB+(AB)^2+\cdots+(AB)^n\}A \end{aligned}$$

したがって，(3) の結果を利用すると

i) n が偶数のとき

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2n+2 & -n \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ =&\boldsymbol{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -n+2 & 3n+6 & -3n \\ -2 & -2 & -2 \\ n-2 & -3n-6 & 3n \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

ii) n が奇数のとき

$$\begin{aligned} &\frac{n+1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ =&\boldsymbol{\frac{n+1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $x^2+3y^2=3 \cdots$①，$y=mx-1 \cdots$② から，y を消去すると

$$x^2+3(mx-1)^2=3 \quad したがって \quad x=0,\ \frac{6m}{m^2+1}$$

ゆえに $\boldsymbol{p=\dfrac{6m}{3m^2+1}}$ 　これを ② に代入して $\boldsymbol{q=\dfrac{3m^2-1}{3m^2+1}}$

(2) (1) の結果から

$$\{f(m)\}^2=\left(\frac{6m}{3m^2+1}\right)^2+\left(\frac{3m^2-1}{3m^2+1}-1\right)^2=\frac{(6m)^2+(6m^2)^2}{(3m^2+1)^2}$$
$$=\frac{-8+4(3m^2+1)+4(3m^2+1)^2}{(3m^2+1)^2}$$

$t=\dfrac{1}{3m^2+1}$，$g(t)=\{f(m)\}^2$ とおくと $\left(0<t<\dfrac{1}{3}\right)$

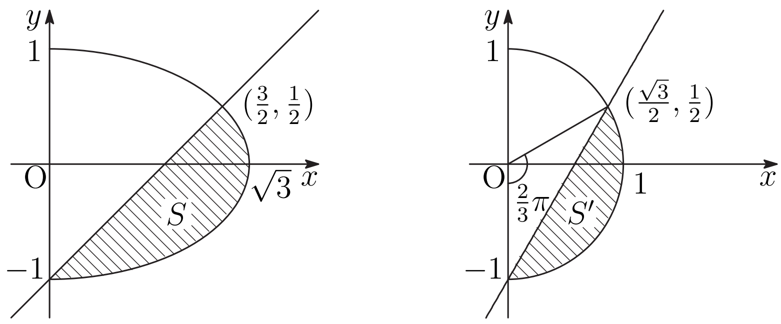
$$g(t)=-8t^2+4t+4=-8\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{2}$$

したがって，$g(t)$ は，$t=\dfrac{1}{4}$ のとき最大値 $\dfrac{9}{2}$ をとるから，$f(m)$ は

$$\frac{1}{3m^2+1}=\frac{1}{4} \quad すなわち \quad m=1 のとき最大$$

よって　$f(m)$ の**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}$，$\boldsymbol{m_0=1}$

(3) (1)，(2) の結果から，求める図形の面積を S とし (左下の図)，これを y 軸を元に x 軸方向に $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 倍縮小した図形の面積を S' とする (右下の図).



したがって　$S'=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\sin\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

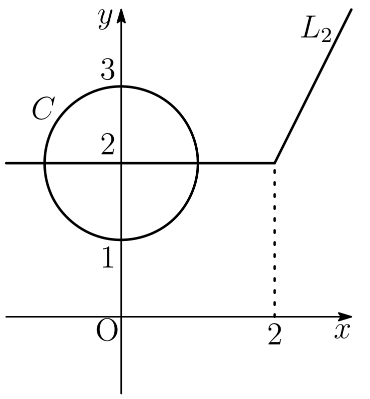
よって　$S=\sqrt{3}\,S'=\sqrt{3}\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi-\dfrac{3}{4}}$

$\boxed{5}$ (1) $L_2 : y = x + |\,x-2\,|$

$$= \begin{cases} 2x-2 & (x \geqq 2) \\ 2 & (x < 2) \end{cases}$$

右の図から，L_2 と C の共有点の個数は

2個

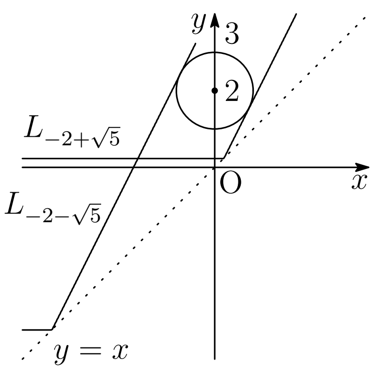


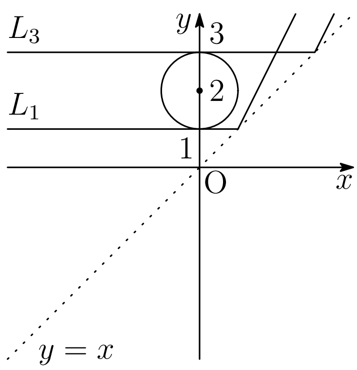
(2) $L_k : y = x + |\,x-k\,| = \begin{cases} 2x-k & (x \geqq k) \\ k & (x < k) \end{cases}$

L_k および $C : (x-2)^2 + y^2 = 1$ は直線 $y = x$ の上側にあることに注意して，$y = 2x - k$ $(-2x + y + k = 0)$ が C と接するとき

$$\frac{|2+k|}{\sqrt{(-2)^2+1^2}} = 1 \quad \text{すなわち} \quad k = -2 \pm \sqrt{5}$$

また，$y = k$ が C と接するとき　$k = 1,\ 3$





よって，L_k と C の共有点の個数を N とすると

k	$\cdots$	$-2-\sqrt{5}$	$\cdots$	$-2+\sqrt{5}$	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
N	0	1	2	1	0	1	2	1	0