平成 17 年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
工学部　平成 17 年 2 月 25 日

- 数 I・II・III・A・B・C (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数列 $\{a_n\}$ は，$a_1 = 1$，$a_2 = 2$,

$$\begin{cases} 2a_{2k+1} - 3a_{2k} + a_{2k-1} = 0 \\ 2a_{2k+2} - 3a_{2k+1} + a_{2k} = 1 \end{cases} \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

をみたしている．次に答えよ.

(1) a_3，a_4，a_5 の値をそれぞれ求めよ.

(2) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義する．b_{n+2} を b_n を用いて表せ.

(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ.

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次に答えよ.

(1) 複素数 $z = x + yi$ (x, y は実数) が

$$(\sqrt{3} - i)z + (\sqrt{3} + i)\overline{z} = 2 \quad \cdots (*)$$

をみたすとき，x と y の間に成り立つ関係式を求めよ.

(2) $|z + i| \geqq |2z - i|$ および $(*)$ をみたす複素数 z の表す点が描く図形 D を，複素数平面上に図示せよ.

(3) 複素数 z の表す点が (2) で求めた D 上を動くとき，$k = |2z - 1 - 2i|$ のとる値の最大値と最小値を求めよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ E を 2 次の単位行列とし，C を $C^2 = -E$ をみたす 2 次の正方行列とする．$x^2 + y^2 \neq 0$ をみたす実数 x，y に対して $P = xE + yC$ とおく．次に答えよ.

(1) C は kE (k は実数) の形に表せないことを示せ.

(2) $P^3 = \alpha E + bC$ をみたす実数 a と b を x，y を用いて表せ.

(3) P の逆行列を P^{-1} で表す．$P^{-1} = sE + tC$ をみたす実数 s と t を x，y を用いて表せ.

(4) $P = xE + yC$ が $P^6 = E$，$P^3 \neq E$ を同時にみたすような実数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \sin^2 x \ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ の表す曲線 $C : y = f(x)$ がある．次に答えよ．

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) 直線 $l : y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + a \ (a > 0)$ は曲線 C に接している．a の値と接点の座標を求めよ．

(3) a を (2) で定めた値とする．曲線 C と直線 l で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 曲線 $C : y = \dfrac{4}{x+1} + x \ (x \geqq 0)$ と直線 $L : y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{11}{2}$ がある．C と L の交点をPとし，点Pを通り x 軸に平行な直線を l とする．次に答えよ．

(1) 点Pの座標を求めよ．

(2) 直線 l に関して直線 L と対称な直線の方程式を求めよ．

(3) 曲線 C，直線 L および y 軸で囲まれた図形を直線 l の周りに1回転してできる立体の体積 V を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $$\begin{cases} 2a_{2k+1}-3a_{2k}+a_{2k-1}=0 \\ 2a_{2k+2}-3a_{2k+1}+a_{2k}=1 \end{cases} \quad (k=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots(*)$$

$(*)$ の第 1 式に $k=1,\ 2$，漸化式の第 2 式に $k=1$ を代入すると

$$2a_3-3a_2+a_1=0, \quad 2a_4-3a_3+a_2=1, \quad 2a_5-3a_4+a_3=0$$

$a_1=1$，$a_2=2$ より，これを解いて　$\boldsymbol{a_3=\frac{5}{2},\ a_4=\frac{13}{4},\ a_5=\frac{29}{8}}$

(2) $(*)$ より

$$2(a_{2k+1}-a_{2k})-(a_{2k}-a_{2k-1})=0$$
$$2(a_{2k+2}-a_{2k+1})-(a_{2k+1}-a_{2k})=1$$

したがって $$\begin{cases} 2b_{2k}-b_{2k-1}=0 \\ 2b_{2k+1}-b_{2k}=1 \end{cases} \quad (k=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots(**)$$

$(**)$ から b_{2k} を消去すると

$$4b_{2k+1}-b_{2k-1}=2 \quad \text{ゆえに} \quad b_{2k+1}=\frac{1}{4}b_{2k-1}+\frac{1}{2} \qquad \cdots①$$

$(**)$ の第 1 式から　$2b_{2k+2}-b_{2k+1}=0$

これと $(**)$ の第 2 式から，b_{2k+1} を消去すると

$$4b_{2k+2}-b_{2k}=1 \quad \text{ゆえに} \quad b_{2k+2}=\frac{1}{4}b_{2k}+\frac{1}{4} \qquad \cdots②$$

①，② から　　**$\boldsymbol{n}$ が奇数のとき　$\boldsymbol{b_{n+2}=\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{2}}$**

$\boldsymbol{n}$ が偶数のとき　$\boldsymbol{b_{n+2}=\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{4}}$

(3) ① から　$b_{2k+1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{4}\left(b_{2k-1}-\frac{2}{3}\right)$

ゆえに　$b_{2k-1}-\frac{2}{3}=\left(b_1-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$

$b_1=a_2-a_1=2-1=1$ より

$$b_{2k-1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}+\frac{2}{3}\quad\cdots①'$$

② から　$b_{2k+2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left(b_{2k}-\frac{1}{3}\right)$

ゆえに　$b_{2k}-\frac{1}{3}=\left(b_2-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$

$b_2=a_3-a_2=\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2}$ より

$$b_{2k}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}+\frac{1}{3}\quad\cdots②'$$

①′，②′ から　**n が奇数のとき　$\boldsymbol{b_n=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}}$**

n が偶数のとき　$\boldsymbol{b_n=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}}$

別解 $(**)$ より　$2b_{n+1}-b_n=\frac{1+(-1)^n}{2}\quad(n=1,2,3\cdots)$

また　$2\left\{\frac{1}{2}-\frac{(-1)^{n+1}}{6}\right\}-\left\{\frac{1}{2}-\frac{(-1)^n}{6}\right\}=\frac{1+(-1)^n}{2}$

上の 2 式から　$2\left\{b_{n+1}-\frac{1}{2}+\frac{(-1)^{n+1}}{6}\right\}-\left\{b_n-\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{6}\right\}=0$

したがって，$\left\{b_n-\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{6}\right\}$ は初項 $\frac{1}{3}$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である．

よって　$b_n-\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{6}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

すなわち　$\boldsymbol{b_n=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{2}-\frac{(-1)^n}{6}}$

(4) ①′，②′ より

$$a_{2k}-a_{2k-1}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}+\frac{2}{3},\quad a_{2k+1}-a_{2k}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}+\frac{1}{3}$$

上の 2 式から

$$a_{2k+1}-a_{2k-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}+1 \qquad \cdots ③$$

$$a_{2k+2}-a_{2k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}+1 \qquad \cdots ④$$

n が奇数のとき $(n \geqq 3)$，③ より

$$\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(a_{2k+1}-a_{2k-1})=\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}+1\right\}$$

$$a_n-1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{n-1}{2}$$

$$a_n=\frac{7}{6}+\frac{n}{2}-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \qquad \cdots ③'$$

n が偶数のとき $(n \geqq 4)$，④ より

$$\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}(a_{2k+2}-a_{2k})=\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}+1\right\}$$

$$a_n-2=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{n-2}{2}$$

$$a_n=\frac{4}{3}+\frac{n}{2}-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \qquad \cdots ④'$$

③′，④′ は，それぞれ $n=1$，$n=2$ のときも成立する．

よって　**n が奇数のとき**　$\boldsymbol{a_n=\frac{7}{6}+\frac{n}{2}-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}$

n が偶数のとき　$\boldsymbol{a_n=\frac{4}{3}+\frac{n}{2}-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}$

別解　$\begin{cases} 2a_{2k+1} - 3a_{2k} + a_{2k-1} = 0 \\ 2a_{2k+2} - 3a_{2k+1} + a_{2k} = 1 \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$

上式から　$2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

ここで，$f(n) = \alpha n + \beta(-1)^n$ が

$$2f(n+2) - 3f(n+1) + f(n) = \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

をみたす定数 α，β を求めると　$\alpha = \dfrac{1}{2}$，$\beta = \dfrac{1}{12}$

したがって　$f(n) = \dfrac{n}{2} + \dfrac{(-1)^n}{12}$

$x_n = a_n - f(n)$ とおくと　$2x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n = 0$

$\{x_n\}$ の特性方程式 $2x^2 - 3x + 1 = 0$ の解が 1，$\dfrac{1}{2}$ であるから

$$x_n = p + q\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (p,\ q \text{ は定数})$$

とおける．$x_1 = \dfrac{7}{12}$，$x_2 = \dfrac{11}{12}$ であるから　$p = \dfrac{5}{4}$，$q = -\dfrac{4}{3}$

すなわち　$x_n = \dfrac{5}{4} - \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

よって　$a_n = x_n + f(n) = \boldsymbol{\dfrac{5}{4} - \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{n}{2} + \dfrac{(-1)^n}{12}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $(\sqrt{3}-i)z+(\sqrt{3}+i)\overline{z}=2$ に $z=x+yi$ ($x,\ y$ は実数) を代入すると

$$(\sqrt{3}-i)(x+yi)+(\sqrt{3}+i)(x-yi)=2 \quad \text{整理すると} \quad \boldsymbol{\sqrt{3}x+y=1}$$

(2) $|z+i| \geqq |2z-i|$ に $z=x+yi$ ($x,\ y$ は実数) を代入すると

$$|x+(y+1)i| \geqq |2x+(2y-1)i|$$

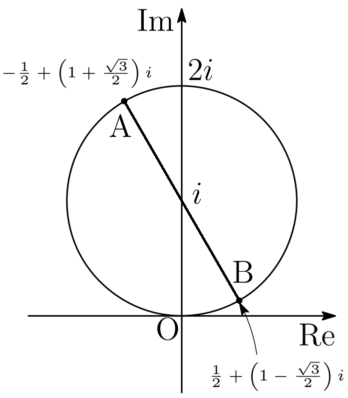
したがって

$$\sqrt{x^2+(y+1)^2} \geqq \sqrt{(2x)^2+(2y-1)^2}$$

両辺を平方して整理すると

$$x^2+y^2-2y \leqq 0$$

ゆえに $\qquad x^2+(y-1)^2 \leqq 1$



D は右の図のように 2 点 $\mathrm{A}(-\frac{1}{2}+(1+\frac{\sqrt{3}}{2})i)$, $\mathrm{B}(\frac{1}{2}+(1-\frac{\sqrt{3}}{2})i)$ を結ぶ線分.

(3) D 上の点 z は (2) の結果から，$z=x+(1-\sqrt{3}x)i$ であるから $(-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} k &= |2z-1-2i| = |2\{x+(1-\sqrt{3}x)i\}-1-2i| \\ &= |(2x-1)-2\sqrt{3}xi| \\ &= \sqrt{(2x-1)^2+12x^2} = \sqrt{16x^2-4x+1} \\ &= \sqrt{16\left(x-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

よって，$x=-\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\sqrt{7}}$，$x=\dfrac{1}{8}$ のとき最小値 $\dfrac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$ をとる.

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $C = kE$ (k は実数) とすると　$C^2 = k^2E$

これと条件式により　$k^2E = -E$

ゆえに $k^2 = -1$ となり，これを満たす実数 k は存在しない．

よって，$C = kE$ (k は実数) の形に表すことはできない．

(2) $P = xE + yC$ より

$$\begin{aligned} P^3 &= (xE + yC)^3 \\ &= x^3E + 3x^2yC + 3xy^2C^2 + y^3C^3 \\ &= x^3E + 3x^2yC - 3xy^2E - y^3C \\ &= (x^3 - 3xy^2)E + (3x^2y - y^3)C \end{aligned}$$

$P^3 = aE + bC$ であるから，上式より

$$(x^3 - 3xy^2)E + (3x^2y - y^3)C = aE + bC \quad \cdots ①$$

ここで，$\alpha E+\beta C = \alpha' E+\beta' C$ (α，α'，β，β' を実数) のとき $\alpha = \alpha'$，$\beta = \beta'$ が成り立つことを示す．$(\beta - \beta')C = -(\alpha - \alpha')E$ であるから，$\beta - \beta' \neq 0$ とすると，C は E の実数倍となるので，(1) の結果に反する．したがって，$\alpha = \alpha'$，$\beta = \beta'$ が成り立つ．

ゆえに，① より　$\boldsymbol{a = x^3 - 3xy^2}$，$\boldsymbol{b = 3x^2y - y^3}$

(3) $(xE + yC)(xE - yC) = (x^2 + y^2)E$ であるから　$P^{-1} = \dfrac{xE - yC}{x^2 + y^2}$

よって　$\boldsymbol{s = \dfrac{x}{x^2 + y^2}}$，$\boldsymbol{t = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}}$

(4) $P^6=E$ のとき　$P^3=(P^3)^{-1}$

$P^3=aE+bC$ とすると，$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$．(3) の結果から

$$(P^3)^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}E-\frac{b}{a^2+b^2}C$$

したがって　$a=\dfrac{a}{a^2+b^2},\quad b=-\dfrac{b}{a^2+b^2}$

ゆえに　$a(a^2+b^2-1)=0,\ \ b(a^2+b^2+1)=0$

$P^3\neq E$ に注してこれを解くと　$a=-1,\ b=0$

これを (2) の結果に代入して

$$x^3-3xy^2=-1\quad\cdots②,\quad 3x^2y-y^3=0\quad\cdots③$$

③ から　$y(3x^2-y^2)=0$　ゆえに　$y=0$ または $y^2=3x^2$

$y=0$ を ② に代入して　$x=-1$

$y^2=3x^2$ を ② に代入して　$x=\dfrac{1}{2},\ y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$\boldsymbol{(x,\ y)=(-1,\ 0),\ \left(\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ より $\quad f'(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \sin 2x$

したがって，増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{11}{6}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$\sqrt{3}\pi$

よって　極大値 $f\left(\dfrac{2}{3}\pi\right) = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{\sqrt{3}} + \dfrac{3}{4}}$, $f\left(\dfrac{5}{3}\pi\right) = \boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{3}}{6}\pi + \dfrac{3}{4}}$

極小値 $f\left(\dfrac{5}{6}\pi\right) = \boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{3}}{12}\pi + \dfrac{1}{4}}$, $f\left(\dfrac{11}{6}\pi\right) = \boldsymbol{\dfrac{11\sqrt{3}}{12}\pi + \dfrac{1}{4}}$

(2) $g(x) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + a\right) - f(x)$ とおくと

$$g(x) = a - \sin^2 x, \quad g'(x) = -2\sin x\cos x$$

l と C の接点の x 座標を t とすると，$g(t)=0$，$g'(t)=0$ であるから

$$a - \sin^2 t = 0, \quad -2\sin t\cos t = 0$$

$a>0$ より，$\sin t \neq 0$ であるから　$\cos t = 0$

したがって　$t = \dfrac{\pi}{2}, \ \dfrac{3}{2}\pi$　ゆえに　$\boldsymbol{a=1}$

接点の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{\pi}{2}, \ \dfrac{\sqrt{3}}{4}+1\right)}$, $\boldsymbol{\left(\dfrac{3\pi}{2}, \ \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\pi+1\right)}$

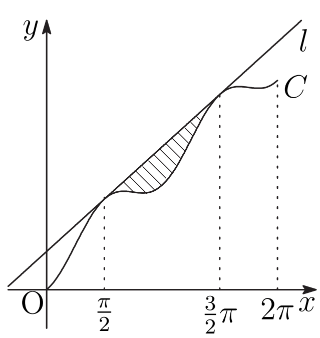
(3) (2) の結果から　$g(x) = 1-\cos^2 x = \sin^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x$

$\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ において　$g(x) \geqq 0$

よって，求める面積 S は

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} g(x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx$$

$$= \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$



$\boxed{\textbf{5}}$ (1) $C: y=\dfrac{4}{x+1}+x$，$L: y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{11}{2}$ から y を消去すると

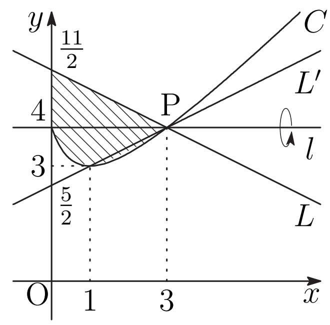
$$\frac{4}{x+1}+x=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}\quad \text{整理すると}\quad (x-3)(3x+1)=0$$

$x \geqq 0$ に注意してこれを解くと　$x=3$　よって　$\mathbf{P(3,\ 4)}$

(2) 求める直線を L' とすると，L' は点 P を通り，傾き $\dfrac{1}{2}$ の直線であるから

$$y-4=\frac{1}{2}(x-3)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}}$$

(3) $f(x)=\dfrac{4}{x+1}+x$，$g(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$ とおくと



$$4-f(x)=4-\left(\frac{4}{x+1}+x\right)=\frac{x(3-x)}{x+1},$$

$$\begin{aligned} f(x)-g(x)&=\frac{4}{x+1}+x-\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)\\ &=\frac{(x-1)(x-3)}{2(x+1)} \end{aligned}$$

ゆえに　　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき　$g(x) \leqq f(x) \leqq 4$,

$1 \leqq x \leqq 3$ のとき　$f(x) \leqq g(x) \leqq 4$

したがって，求める立体の体積 V は

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi}&=\int_0^1 \{4-g(x)\}^2\,dx+\int_1^3 \{4-f(x)\}^2\,dx\\ &=\int_0^1 \left\{4-\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)\right\}^2 dx+\int_1^3 \left\{(4-x)-\frac{4}{x+1}\right\}^2 dx\\ &=\int_0^1 \frac{1}{4}(x-3)^2\,dx+\int_1^3 \left\{(x-4)^2+\frac{8(x-4)}{x+1}+\frac{16}{(x+1)^2}\right\} dx\\ &=\left[\frac{1}{12}(x-3)^3\right]_0^1+\left[\frac{(x-4)^3}{3}+8\{x-5\log(x+1)\}-\frac{16}{x+1}\right]_1^3\\ &=\frac{121}{4}-40\log 2 \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V=\left(\frac{121}{4}-40\log 2\right)\pi}$