平成16年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
数I・II・III・A・B・C (120分)
工学部　平成16年2月25日

問題 1 2 3 4 5

1 $a_n = 1+2+3\cdots+n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ において，a_n が 6 の倍数である項を最初から順に b_1，b_2，$b_3,\cdots$ とする．次に答えよ．

(1) b_1，b_2，b_3，b_4 を求めよ．

(2) すべての自然数 n に対して，$a_{n+12}-a_n$ は 6 の倍数であることを示せ．

(3) b_{4k-3}，b_{4k-2}，b_{4k-1}，b_{4k} $(k=1,2,3,\cdots)$ を k を用いて表せ．

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4n} b_k$ を求めよ．

2 次に答えよ．

(1) 等式 $\alpha^2+2\alpha+4=0$ をみたす複素数 α について，α^3 の値を求めよ．

(2) (1) の α が $\alpha^2 = 3\overline{\alpha}+\dfrac{k}{\alpha}$ をみたすときの実数 k を求めよ．

(3) (2) で求めた実数 k について方程式 $z^2 = 3\overline{z}+\dfrac{k}{z}$ を解け．

3 2 次の正方行列 A は $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ および $A^3 = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -12 & 20 \end{pmatrix}$ をみたしている．次に答えよ．

(1) 行列 A を求めよ．

(2) $A^2+aA+bE=O$ を満たす定数 a，b を求めよ．ただし，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする．

(3) 行列 $\dfrac{1}{2^n}A^n - \dfrac{1}{2^{n-1}}A^{n-1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ はすべて同一の行列であることを示せ．ただし，$A^0=E$ とする．

(4) 自然数 n に対して A^n を求めよ．

4 関数 $f(x) = \dfrac{\log(x+1)}{\sqrt{x+1}}$，$g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$ がある．次に答えよ．

(1) $f(x)$ の増減をしらべ，極値を求めよ．

(2) 2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ の交点の座標を求めよ．

(3) 2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ および y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

5 (1) $x > 0$ のとき，不等式 $1 - \dfrac{x^2}{2} < \cos x$ が成り立つことを示せ．

(2) $x > 0$ のとき，不等式 $\cos x < 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$ が成り立つことを示せ．

(3) 3 辺の長さが 3，4，5 である三角形の内角のうち最小のものを θ ラジアンとする．次が成り立つことを示せ．

$$\frac{2}{5} < \theta^2 < \frac{30 - 2\sqrt{195}}{5}$$

解答例

1 (1) $a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=6$，$a_4=10$，$a_5=15$，$a_6=21$，
$a_7=28$，$a_8=36$，$a_9=45$，$a_{10}=55$，$a_{11}=66$，$a_{12}=78$

よって　$\boldsymbol{b_1=6,\ b_2=36,\ b_3=66,\ b_4=78}$

(2) $a_n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ であるから

$$a_{n+12}-a_n=\frac{1}{2}(n+12)(n+13)-\frac{1}{2}n(n+1)=6(2n+13)$$

$2n+13$ は整数であるから，$a_{n+12}-a_n$ は 6 の倍数.

(3) (1)，(2) の結果から

$$\begin{aligned}
b_{4k-3}&=a_{3+12(k-1)}=a_{12k-9}=\frac{1}{2}(12k-9)(12k-8)\\
&=\boldsymbol{6(4k-3)(3k-2)}\\
b_{4k-2}&=a_{8+12(k-1)}=a_{12k-4}=\frac{1}{2}(12k-4)(12k-3)\\
&=\boldsymbol{6(3k-1)(4k-1)}\\
b_{4k-1}&=a_{11+12(k-1)}=a_{12k-1}=\frac{1}{2}(12k-1)\cdot 12k\\
&=\boldsymbol{6k(12k-1)}\\
b_{4k}&=a_{12+12(k-1)}=a_{12k}=\frac{1}{2}\cdot 12k(12k+1)\\
&=\boldsymbol{6k(12k+1)}
\end{aligned}$$

(4) (3) の結果から　$b_{4k-3}+b_{4k-2}+b_{4k-1}+b_{4k}=6(48k^2-24k+7)$

よって
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{4n}b_k&=\sum_{k=1}^{n}(b_{4k-3}+b_{4k-2}+b_{4k-1}+b_{4k})\\
&=6\sum_{k=1}^{n}(48k^2-24k+7)\\
&=6\left\{48\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-24\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+7n\right\}\\
&=\boldsymbol{6n(16n^2+12n+3)}
\end{aligned}$$

■

2 (1) $\alpha^3-8=(\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha+4)$ であるから，$\alpha^2+2\alpha+4=0$ より

$$\alpha^3-8=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\alpha^3=8}$$

(2) (1) の結果から　$|\alpha|^3=8$　ゆえに　$|\alpha|=2$

$\alpha^2=3\overline{\alpha}+\dfrac{k}{\alpha}$ より　　$\alpha^3=3|\alpha|^2+k$

これに $\alpha^3=8$，$|\alpha|=2$ を代入すると

$$8=3\cdot 2^2+k \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{k=-4}$$

(3) (2) の結果より $z^2=3\overline{z}-\dfrac{4}{z}$ であるから

$$z^3=3|z|^2-4 \quad \text{ゆえに} \quad |z|^3=\left|3|z|^2-4\right|$$

i) $3|z|^2-4\geqq 0$　すなわち　$|z|\geqq\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ のとき

$$|z|^3=3|z|^2-4 \quad \text{ゆえに} \quad (|z|+1)(|z|-2)^2=0$$

このとき，$|z|=2$ であるから

$$z^3=3\cdot 2^2-4 \quad \text{ゆえに} \quad (z-2)(z^2+2z+4)=0$$

これを解いて　$z=2,\ -1\pm\sqrt{3}\,i$

ii) $3|z|^2-4<0$　すなわち　$0\leqq|z|<\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ のとき

$$|z|^3=-(3|z|^2-4) \quad \text{ゆえに} \quad (|z|-1)(|z|+2)^2=0$$

このとき，$|z|=1$ であるから

$$z^3=3\cdot 1^2-4 \quad \text{ゆえに} \quad (z+1)(z^2-z+1)=0$$

これを解いて　$z=-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

よって　$\boldsymbol{z=-1,\ 2,\ -1\pm\sqrt{3}i,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}$ ■

3 (1) $A^2A = A^3$ により

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -12 & 20 \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad 4\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} A = 4\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

よって
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

(2) (1) の結果にハミルトン・ケリーの定理を適用すると　$A^2 - 4A + 4E = O$

これと $A^2 + aA + bE = O$ により　$(a+4)A = (4-b)E$

$a + 4 \neq 0$ のとき，A は E の実数倍となり，A に反する．

したがって　$a + 4 = 0$，$4 - b = 0$　よって　$\boldsymbol{a = -4,\ b = 4}$

(3) $A^2 - 4A + 4E = O$ より　$A^{n+2} - 4A^{n+1} + 4A^n = O$

ゆえに　$A^{n+2} - 2A^{n+1} = 2(A^{n+1} - 2A^n)$

したがって　$A^n - 2A^{n-1} = 2^{n-1}(A - 2E)$

よって
$$\frac{1}{2^n}A^n - \frac{1}{2^{n-1}}A^{n-1} = \frac{1}{2}(A - 2E) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

(4) (3) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}A^k - \frac{1}{2^{k-1}}A^{k-1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\frac{1}{2^n}A^n - E = \frac{n}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\frac{1}{2^n}A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -n+2 & n \\ -n & n+2 \end{pmatrix}$$
$$A^n = \boldsymbol{2^{n-1}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{-n+2} & \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{-n} & \boldsymbol{n+2} \end{pmatrix}$$

別解 $(A - 2E)^2 = O$ であるから

$$A^n = \{(A - 2E) + 2E\}^n = n(A - 2E)(2E)^{n-1} + (2E)^n$$
$$= 2^{n-1}\{n(A - 2E) + 2E\}$$

■

4 (1) $f(x)=\dfrac{\log(x+1)}{\sqrt{x+1}}$ より

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}\left\{\frac{1}{x+1}\times\sqrt{x+1}-\log(x+1)\times\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right\}$$
$$=\frac{2-\log(x+1)}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

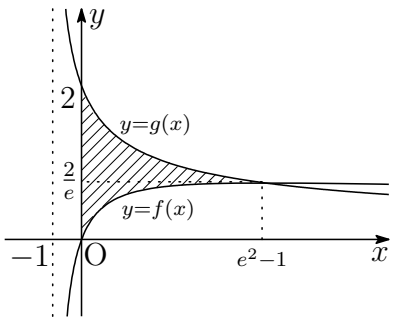
x	-1	$\cdots$	e^2-1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$

よって，$x=e^2-1$ のとき　極大値 $\boldsymbol{\dfrac{2}{e}}$

(2) $f(x)=g(x)$ より　$\log(x+1)=2$

これを解いて　$x=e^2-1$　よって　$\boldsymbol{\left(e^2-1,\ \dfrac{2}{e}\right)}$

(3) $0\leqq x\leqq e^2-1$ において，$g(x)\geqq f(x)$ であるから



$$S=\int_0^{e^2-1}\frac{2-\log(x+1)}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

ここで，$t=\sqrt{x+1}$ とおくと

x	$0\longrightarrow e^2-1$
t	$1\longrightarrow e$

$x=t^2-1,\quad \dfrac{dx}{dt}=2t$

よって　$S=\displaystyle\int_1^e\frac{2-\log t^2}{t}\,2t\,dt=4\int_1^e(1-\log t)\,dt$

$$=4\Big[\,t\,(2-\log t)\,\Big]_1^e=\boldsymbol{4(e-2)}$$

■

$\boxed{5}$ (1) $x>0$ のとき $\displaystyle\int_0^x (1-\cos t)\,dt>0$ ゆえに $x-\sin x>0$

さらに $\displaystyle\int_0^x (t-\sin t)\,dt>0$ ゆえに $\dfrac{x^2}{2!}+\cos x-1>0$

よって $1-\dfrac{x^2}{2}<\cos x$

(2) (1) の結果から，$x>0$ のとき

$$\int_0^x \left(\cos t+\frac{t^2}{2!}-1\right)dt>0 \quad \text{ゆえに} \quad \sin x+\frac{x^3}{3!}-x>0$$

さらに $\displaystyle\int_0^x \left(\sin t+\frac{t^3}{3!}-t\right)dt>0$ ゆえに $-\cos x+1+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^2}{2!}>0$

よって $\cos x<1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$

(3) (1)，(2) の結果から，$x>0$ のとき

$$1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

このとき，$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$ であるから，上式により

$$1-\frac{\theta^2}{2}<\frac{4}{5}<1-\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^4}{24}$$

したがって $\begin{cases} \theta^2>\dfrac{2}{5} & \cdots ① \\ 5\theta^4-60\theta^2+24>0 & \cdots ② \end{cases}$

$\theta<\dfrac{\pi}{4}<1$ であるから，$\theta^2<1$ に注意して ② を解くと

$$\theta^2<\frac{30-2\sqrt{195}}{5} \quad \cdots ②'$$

$2=30-2\sqrt{196}<30-2\sqrt{195}$ に注意して，①，②$'$ により

$$\frac{2}{5}<\theta^2<\frac{30-2\sqrt{195}}{5}$$

■