

平成 16 年度 九州工業大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
工学部 平成 16 年 2 月 25 日

● 数 I・II・III・A・B・C (120 分)

1 $a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定められる数列 $\{a_n\}$ において, a_n が 6 の倍数である項を最初から順に b_1, b_2, b_3, \dots とする. 次に答えよ.

- (1) b_1, b_2, b_3, b_4 を求めよ.
- (2) すべての自然数 n に対して, $a_{n+12} - a_n$ は 6 の倍数であることを示せ.
- (3) $b_{4k-3}, b_{4k-2}, b_{4k-1}, b_{4k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) を k を用いて表せ.
- (4) $\sum_{k=1}^{4n} b_k$ を求めよ.

2 次に答えよ.

- (1) 等式 $\alpha^2 + 2\alpha + 4 = 0$ をみたす複素数 α について, α^3 の値を求めよ.
- (2) (1) の α が $\alpha^2 = 3\bar{\alpha} + \frac{k}{\alpha}$ をみたすときの実数 k を求めよ.
- (3) (2) で求めた実数 k について方程式 $z^2 = 3\bar{z} + \frac{k}{z}$ を解け.

3 2 次の正方行列 A は $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ および $A^3 = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -12 & 20 \end{pmatrix}$ をみたしている. 次に答えよ.

- (1) 行列 A を求めよ.
- (2) $A^2 + aA + bE = O$ を満たす定数 a, b を求めよ. ただし, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする.
- (3) 行列 $\frac{1}{2^n}A^n - \frac{1}{2^{n-1}}A^{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) はすべて同一の行列であることを示せ. ただし, $A^0 = E$ とする.
- (4) 自然数 n に対して A^n を求めよ.

4 関数 $f(x) = \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x+1}}$, $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ がある．次に答えよ．

- (1) $f(x)$ の増減をしらべ，極値を求めよ．
- (2) 2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ の交点の座標を求めよ．
- (3) 2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ および y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

5 (1) $x > 0$ のとき，不等式 $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x$ が成り立つことを示せ．

(2) $x > 0$ のとき，不等式 $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ が成り立つことを示せ．

(3) 3 辺の長さが 3, 4, 5 である三角形の内角のうち最小のものを θ ラジアンとする．次が成り立つことを示せ．

$$\frac{2}{5} < \theta^2 < \frac{30 - 2\sqrt{195}}{5}$$

正解

1 (1) $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 6, a_4 = 10, a_5 = 15, a_6 = 21,$
 $a_7 = 28, a_8 = 36, a_9 = 45, a_{10} = 55, a_{11} = 66, a_{12} = 78$
 よって $b_1 = 6, b_2 = 36, b_3 = 66, b_4 = 78$

(2) $a_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ であるから

$$a_{n+12} - a_n = \frac{1}{2}(n+12)(n+13) - \frac{1}{2}n(n+1) = 6(2n+13)$$

$2n+13$ は整数であるから, $a_{n+12} - a_n$ は 6 の倍数.

(3) (1), (2) の結果から

$$\begin{aligned} b_{4k-3} &= a_{3+12(k-1)} = a_{12k-9} = \frac{1}{2}(12k-9)(12k-8) \\ &= 6(4k-3)(3k-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{4k-2} &= a_{8+12(k-1)} = a_{12k-4} = \frac{1}{2}(12k-4)(12k-3) \\ &= 6(3k-1)(4k-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{4k-1} &= a_{11+12(k-1)} = a_{12k-1} = \frac{1}{2}(12k-1) \cdot 12k \\ &= 6k(12k-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{4k} &= a_{12+12(k-1)} = a_{12k} = \frac{1}{2} \cdot 12k(12k+1) \\ &= 6k(12k+1) \end{aligned}$$

(4) (3) の結果から $b_{4k-3} + b_{4k-2} + b_{4k-1} + b_{4k} = 6(48k^2 - 24k + 7)$

よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{4n} b_k &= \sum_{k=1}^n (b_{4k-3} + b_{4k-2} + b_{4k-1} + b_{4k}) \\ &= 6 \sum_{k=1}^n (48k^2 - 24k + 7) \\ &= 6 \left\{ 48 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 24 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + 7n \right\} \\ &= 6n(16n^2 + 12n + 3) \end{aligned}$$

2 (1) $\alpha^3 - 8 = (\alpha - 2)(\alpha^2 + 2\alpha + 4)$ であるから, $\alpha^2 + 2\alpha + 4 = 0$ より

$$\alpha^3 - 8 = 0 \quad \text{よって} \quad \alpha^3 = 8$$

(2) (1) の結果から $|\alpha|^3 = 8$ ゆえに $|\alpha| = 2$

$$\alpha^2 = 3\bar{\alpha} + \frac{k}{\alpha} \quad \text{より} \quad \alpha^3 = 3|\alpha|^2 + k$$

これに $\alpha^3 = 8$, $|\alpha| = 2$ を代入すると

$$8 = 3 \cdot 2^2 + k \quad \text{よって} \quad k = -4$$

(3) (2) の結果より $z^2 = 3\bar{z} - \frac{4}{z}$ であるから

$$z^3 = 3|z|^2 - 4 \quad \text{ゆえに} \quad |z|^3 = |3|z|^2 - 4|$$

i) $3|z|^2 - 4 \geq 0$ すなわち $|z| \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$ のとき

$$|z|^3 = 3|z|^2 - 4 \quad \text{ゆえに} \quad (|z| + 1)(|z| - 2)^2 = 0$$

このとき, $|z| = 2$ であるから

$$z^3 = 3 \cdot 2^2 - 4 \quad \text{ゆえに} \quad (z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0$$

これを解いて $z = 2, -1 \pm \sqrt{3}i$

ii) $3|z|^2 - 4 < 0$ すなわち $0 \leq |z| < \frac{2}{\sqrt{3}}$ のとき

$$|z|^3 = -(3|z|^2 - 4) \quad \text{ゆえに} \quad (|z| - 1)(|z| + 2)^2 = 0$$

このとき, $|z| = 1$ であるから

$$z^3 = 3 \cdot 1^2 - 4 \quad \text{ゆえに} \quad (z + 1)(z^2 - z + 1) = 0$$

これを解いて $z = -1, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

よって $z = -1, 2, -1 \pm \sqrt{3}i, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

3 (1) $A^2A = A^3$ により

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -12 & 20 \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad 4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} A = 4 \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) (1)の結果にハミルトン・ケリーの定理を適用すると $A^2 - 4A + 4E = O$

$$\text{これと } A^2 + aA + bE = O \text{ により} \quad (a+4)A = (4-b)E$$

$a+4 \neq 0$ のとき, A は E の実数倍となり, A に反する.

したがって $a+4=0, 4-b$ よって $a=-4, b=4$

(3) $A^2 - 4A + 4E = O$ より $A^{n+2} - 4A^{n+1} + 4A^n = O$

$$\text{ゆえに} \quad A^{n+2} - 2A^{n+1} = 2(A^{n+1} - 2A^n)$$

$$\text{したがって} \quad A^n - 2A^{n-1} = 2^{n-1}(A - 2E)$$

$$\text{よって} \quad \frac{1}{2^n}A^n - \frac{1}{2^{n-1}}A^{n-1} = \frac{1}{2}(A - 2E) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) (3)の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2^k}A^k - \frac{1}{2^{k-1}}A^{k-1} \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{2^n}A^n - E &= \frac{n}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{2^n}A^n &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -n+2 & n \\ -n & n+2 \end{pmatrix} \\ A^n &= 2^{n-1} \begin{pmatrix} -n+2 & n \\ -n & n+2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

別解 $(A - 2E)^2 = O$ であるから

$$\begin{aligned} A^n &= \{(A - 2E) + 2E\}^n = n(A - 2E)(2E)^{n-1} + (2E)^n \\ &= 2^{n-1}\{n(A - 2E) + 2E\} \end{aligned}$$

4 (1) $f(x) = \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x+1}}$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x+1} \left\{ \frac{1}{x+1} \times \sqrt{x+1} - \log(x+1) \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right\} \\ &= \frac{2 - \log(x+1)}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

したがって, $f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	-1	...	$e^2 - 1$...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	$\frac{2}{e}$	↘

よって, $x = e^2 - 1$ のとき 極大値 $\frac{2}{e}$

(2) $f(x) = g(x)$ より $\log(x+1) = 2$

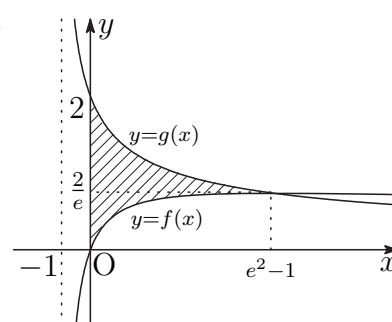
これを解いて $x = e^2 - 1$ よって $\left(e^2 - 1, \frac{2}{e} \right)$

(3) $0 \leq x \leq e^2 - 1$ において, $g(x) \geq f(x)$ であるから

$$S = \int_0^{e^2-1} \frac{2 - \log(x+1)}{\sqrt{x+1}} dx$$

ここで, $t = \sqrt{x+1}$ とおくと

x	$0 \rightarrow e^2 - 1$	$x = t^2 - 1, \quad \frac{dx}{dt} = 2t$
t	$1 \rightarrow e$	



$$\begin{aligned} \text{よって} \quad S &= \int_1^e \frac{2 - \log t^2}{t} 2t dt = 4 \int_1^e (1 - \log t) dt \\ &= 4 \left[t(2 - \log t) \right]_1^e = 4(e - 2) \end{aligned}$$

$$\boxed{5} \quad (1) \quad x > 0 \text{ のとき} \quad \int_0^x (1 - \cos t) dt > 0 \quad \text{ゆえに} \quad x - \sin x > 0$$

$$\text{さらに} \quad \int_0^x (t - \sin t) dt > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{x^2}{2!} + \cos x - 1 > 0$$

$$\text{よって} \quad 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x$$

(2) (1) の結果から, $x > 0$ のとき

$$\int_0^x \left(\cos t + \frac{t^2}{2!} - 1 \right) dt > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \sin x + \frac{x^3}{3!} - x > 0$$

$$\text{さらに} \quad \int_0^x \left(\sin t + \frac{t^3}{3!} - t \right) dt > 0 \quad \text{ゆえに} \quad -\cos x + 1 + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^2}{2!} > 0$$

$$\text{よって} \quad \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

(3) (1), (2) の結果から, $x > 0$ のとき

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

このとき, $\cos \theta = \frac{4}{5}$ であるから, 上式により

$$1 - \frac{\theta^2}{2} < \frac{4}{5} < 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24}$$

$$\text{したがって} \quad \begin{cases} \theta^2 > \frac{2}{5} & \dots \textcircled{1} \\ 5\theta^4 - 60\theta^2 + 24 > 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\theta < \frac{\pi}{4} < 1$ であるから, $\theta^2 < 1$ に注意して $\textcircled{2}$ を解くと

$$\theta^2 < \frac{30 - 2\sqrt{195}}{5} \quad \dots \textcircled{2}'$$

$2 = 30 - 2\sqrt{196} < 30 - 2\sqrt{195}$ に注意して, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}'$ により

$$\frac{2}{5} < \theta^2 < \frac{30 - 2\sqrt{195}}{5}$$