平成 14 年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
工学部　平成 14 年 2 月 25 日

- 数 I・II・III・A・B・C (120 分)

1 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ に対して，$P=\begin{pmatrix} -1 & k \\ -1 & k \end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix} k & -k \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ は $AP=(1+s)P$，$AQ=sQ$ をみたしている．ただし，s，k は実数である．n は自然数として次に答えよ．

(1) s，k を求めよ．

(2) A^nP，A^nQ を求めよ．

(3) A^n を求めよ．

(4) A の逆行列を B とする．B^n を求めよ．

2 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=\dfrac{10}{9}$，$a_2=2$，$100a_{n+2}-180a_{n+1}+81a_n=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$ によって与えられている．次に答えよ．

(1) $b_n=a_{n+1}-\dfrac{9}{10}a_n$ とおく．数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ．

(2) $a_n=\dfrac{9}{10}b_nc_n$ により数列 $\{c_n\}$ を定める．一般項 c_n および a_n を求めよ．

(3) a_n が最大になるときの自然数 n を求めよ．

3 複素数 z に関する等式

$$|z|+|z-\sqrt{3}i|=k \quad \cdots(*)$$

がある．$z=\dfrac{1}{4}$ が等式 $(*)$ をみたしているとき，次に答えよ．

(1) k を求めよ．

(2) 複素数 $z=\alpha$ は等式 $(*)$ をみたし，偏角が 60° である．α を求めよ．

(3) α を (2) で求めた複素数とする．$\beta-\alpha$ が正の実数となるような複素数 $z=\beta$ は等式 $(*)$ をみたさないことを示せ．

(4) 複素数平面において，原点を O，(2) で求めた α の表す点を A，α と異なり等式 $(*)$ をみたす複素数 $z=\beta$ の表す点を B とする．$\angle\mathrm{BAO}$ は 120° である．β を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $f(x)=\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$ について，次に答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の増減を調べ，$y=f(x)$ のグラフの概形を描け．また，$y=f(x)$ と x 軸の交点の x 座標を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ の $y \geqq 0$ の部分の長さ ℓ を求めよ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $a>0$，$b>0$ とする．曲線 $C_1: y=\dfrac{1}{x}$ と曲線 $C_2: y=ax^2-3b$ が 2 つの共有点 P，Q をもち，点 P では共通の接線をもつとする．次に答えよ．

(1) a を b で表せ．

(2) 点 P および点 Q の座標を b で表せ．

(3) 点 Q における曲線 C_1 の接線と曲線 C_2 の交点で，Q と異なる点を R とする．点 R の座標を b で表せ．

(4) 線分 QR の長さ ℓ を b で表し，ℓ の最小値とそのときの b の値を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $P = \begin{pmatrix} -1 & k \\ -1 & k \end{pmatrix}$ の成分に注意すると，$AP = (1+s)P$ から

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1+s)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ゆえに $\quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1+s)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 　よって　$\boldsymbol{s = 3}$

$Q = \begin{pmatrix} k & -k \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ の成分に注意すると，$AQ = sQ$ および上の結果から

$$A\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}$$

ゆえに $\quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}$ 　よって　$\boldsymbol{k = 2}$

(2) (1) の結果より $AP = 4P$ であるから

$$A^nP = 4^nP = \boldsymbol{4^n}\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

同様に，$AQ = 3Q$ であるから

$$A^nQ = 3^nQ = \boldsymbol{3^n}\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

(3) $P + Q = E$ (E は単位行列) であるから，(2) の結果より

$$A^nP + A^nQ = 4^n\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 3^n\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-4^n + 2\cdot 3^n} & \boldsymbol{2\cdot 4^n - 2\cdot 3^n} \\ \boldsymbol{-4^n + 3^n} & \boldsymbol{2\cdot 4^n - 3^n} \end{pmatrix}$$

(4) $A^nP=4^nP$ の両辺に B^n を左から掛けると

$$P=4^nB^nP \quad \text{ゆえに} \quad B^nP=\frac{1}{4^n}P$$

同様に，$A^nQ=3^nQ$ の両辺に B^n を左から掛けると

$$Q=3^nB^nQ \quad \text{ゆえに} \quad B^nQ=\frac{1}{3^n}Q$$

$P+Q=E$ であるから，上の2式の辺々を加えると

$$\begin{aligned}B^n&=\frac{1}{4^n}P+\frac{1}{3^n}Q\\&=\frac{1}{4^n}\begin{pmatrix}-1&2\\-1&2\end{pmatrix}+\frac{1}{3^n}\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\end{pmatrix}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{12^n}\begin{pmatrix}-3^n+2\cdot4^n&2\cdot3^n-2\cdot4^n\\-3^n+4^n&2\cdot3^n-4^n\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

解説 (1) で示したように，$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}k\\1\end{pmatrix}$ は，それぞれ行列 A の固有値 $1+s$，s に対する固有ベクトルである．実際，A の固有方程式[1]は

$$\lambda^2-7\lambda+12=0 \quad \text{これを解いて} \quad \lambda=4,\ 3$$

このことからも $s=3$ であることが分かる．

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf を参照.

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $p=\dfrac{9}{10}$ とおくと，与えられた漸化式は

$$a_1=\frac{1}{p},\ a_2=2,\ a_{n+2}-2pa_{n+1}+p^2a_n=0 \quad \cdots ①$$

したがって　$a_{n+2}-pa_{n+1}=p(a_{n+1}-pa_n)$

$b_n=a_{n+1}-pa_n$ であるから

$$b_1=a_2-pa_1=1,\quad b_{n+1}=pb_n$$

数列 $\{b_n\}$ は，初項が 1，公比が p の等比数列であるから

$$b_n=1\cdot p^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{b_n=\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}}$$

(2) $b_n=p^{n-1}$ を $a_n=pb_nc_n$ に代入すると　$a_n=p^nc_n \quad \cdots ②$

また，$a_1=\dfrac{1}{p}$，$a_2=2$ より　$c_1=\dfrac{1}{p^2}$，$c_2=\dfrac{2}{p^2}$

② を ① に代入すると　$p^{n+2}c_{n+2}-2p\cdot p^{n+1}c_{n+1}+p^2\cdot p^nc_n=0$

したがって　$c_{n+2}-c_{n+1}=c_{n+1}-c_n$，$c_2-c_1=\dfrac{2}{p^2}-\dfrac{1}{p^2}=\dfrac{1}{p^2}$

数列 $\{c_n\}$ は，初項が $\dfrac{1}{p^2}$，公差が $\dfrac{1}{p^2}$ の等比数列であるから

$$c_n=\frac{1}{p^2}+(n-1)\cdot\frac{1}{p^2}=\frac{n}{p^2} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{c_n=\frac{100}{81}n}$$

これを ② に代入して　$a_n=p^n\cdot\dfrac{n}{p^2}=np^{n-2}$　よって　$\boldsymbol{a_n=n\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n-2}}$

(3) (2) の結果から

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)p^{n-1}}{np^{n-2}}=\frac{(n+1)p}{n}=\frac{9(n+1)}{10n}$$

したがって　$$\frac{a_{n+1}}{a_n}-1=\frac{9-n}{10n}$$

ゆえに　$a_1<a_2<\cdots<a_9=a_{10}>a_{11}>\cdots$

よって，a_n は $\boldsymbol{n=9,\ 10}$ のとき最大

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $z=\dfrac{1}{4}$ が $(*)$ をみたしているから　$\dfrac{1}{4}+\left|\dfrac{1}{4}-\sqrt{3}i\right|=k$

よって　$k=\dfrac{1}{4}+\sqrt{\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{1}{4}+\sqrt{\dfrac{49}{16}}=\mathbf{2}$

(2) α の偏角が 60° であるから，$\alpha=r(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=\dfrac{r}{2}\left(1+\sqrt{3}\,i\right)$ とおいて $(r>0)$，$(*)$ に代入すると

$$r+\left|\frac{r}{2}\left(1+\sqrt{3}\,i\right)-\sqrt{3}\,i\right|=2$$
$$\left|\frac{r}{2}+\sqrt{3}\left(\frac{r}{2}-1\right)i\right|=2-r \quad \cdots ②$$

両辺を平方すると　$\left(\dfrac{r}{2}\right)^2+3\left(\dfrac{r}{2}-1\right)^2=(2-r)^2$

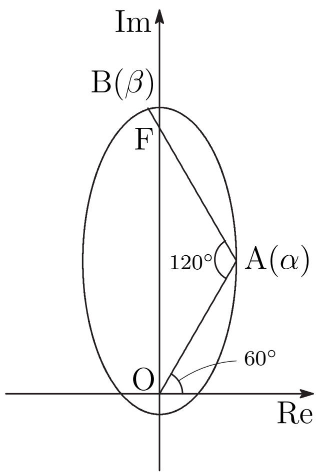
② より，$0<r\leqq 2$ に注意して　$r=1$　よって　$\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{3}}\boldsymbol{i}}{\mathbf{2}}$

(3) $\beta-\alpha$ が正の実数であるとすると，$\beta=x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とおける $\left(x>\dfrac{1}{2}\right)$.
これを $(*)$ に代入すると

$$\left|x+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|+\left|\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\sqrt{3}\,i\right|=2$$
$$\left|x+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|+\left|x-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=2$$
$$\sqrt{x^2+\frac{3}{4}}+\sqrt{x^2+\frac{3}{4}}=2$$
$$\sqrt{x^2+\frac{3}{4}}=1$$

$x>\dfrac{1}{2}$ は上式をみたさない．よって複素数 $z=\beta$ は $(*)$ をみたさない．

(4) AB と虚軸との交点を F とする．$\arg\alpha = 60^\circ$ および $\angle \mathrm{BAO} = 120^\circ$ より，$\triangle \mathrm{OAF}$ は $\angle \mathrm{AOF} = \mathrm{AFO} = 30^\circ$ の二等辺三角形で，$\mathrm{F}(\sqrt{3}i)$ である．$\mathrm{B}(\beta)$ は直線 AF 上の点であるから，実数 t を用いて $(t > 1)$



$$\begin{aligned}\beta &= \alpha + t(\sqrt{3}\,i - \alpha)\\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + t\left\{\sqrt{3}\,i - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right\}\\ &= \frac{1}{2}(1-t) + \frac{\sqrt{3}}{2}(1+t)i\end{aligned}$$

β は $(*)$ をみたすから，$t > 1$ に注意しながら

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2}(1-t) + \frac{\sqrt{3}}{2}(1+t)i\right| + \left|\left\{\frac{1}{2}(1-t) + \frac{\sqrt{3}}{2}(1+t)i\right\} - \sqrt{3}\,i\right| &= 2\\ \left|\frac{1}{2}(1-t) + \frac{\sqrt{3}}{2}(1+t)i\right| + \left|\frac{1}{2}(1-t) + \frac{\sqrt{3}}{2}(-1+t)i\right| &= 2\\ \sqrt{\frac{1}{4}(1-t)^2 + \frac{3}{4}(1+t)^2} + \sqrt{\frac{1}{4}(1-t)^2 + \frac{3}{4}(-1+t)^2} &= 2\\ \sqrt{t^2+t+1} + t - 1 &= 2\\ \sqrt{t^2+t+1} &= 3 - t\end{aligned}$$

両辺を平方して　$t^2 + t + 1 = 9 - 6t + t^2$　ゆえに　$t = \dfrac{8}{7}$

よって　　$\beta = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{8}{7}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \dfrac{8}{7}\right)i = \boldsymbol{\dfrac{-1 + 15\sqrt{3}i}{14}}$

解説 $|z| + |z - \sqrt{3}i| = 2$ より，長軸の長さが 2，焦点が 0 と $\sqrt{3}i$ である楕円である．実際，$|z| + |z - \sqrt{3}\,i| = 2$ に $z = x + yi$ を代入して整理すると

$$4x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

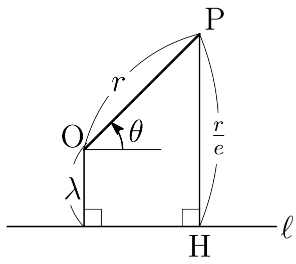
α は，上式と $y = \sqrt{3}x$ の連立方程式を解くと

$$(x,\ y) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{14}, -\frac{\sqrt{3}}{14}\right)$$

よって，$\arg\alpha = 60^\circ$ より　$\alpha = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

また，楕円の離心率 e は

$$e=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \left(e=\frac{2\text{ つの焦点間の距離}}{\text{長軸の長さ}}\right)$$



楕円の準線を ℓ とすると，楕円上の点 P から準線 ℓ に下した垂線 PH とすると

$$e=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}$$

が成り立つ (2 次曲線について成り立つ関係式).
O から準線 ℓ までの距離を λ とする.
右図から，PH を 2 通りに表すと

$$\mathrm{PH}=\frac{r}{e}, \quad \mathrm{PH}=\lambda+r\sin\theta$$

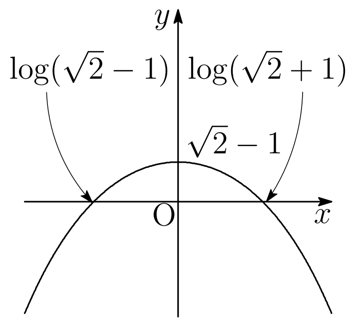
上の 2 式から　$r=\dfrac{e\lambda}{1-e\sin\theta}$

問題において，$z=\dfrac{1}{4}$ をみたすとあるので，$\theta=0$ のとき，$r=|z|=\dfrac{1}{4}$，すなわち，$\theta=0$ のとき，$r=\dfrac{1}{4}$ である．したがって，$e\lambda=\dfrac{1}{4}$ を得る．また，$e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，楕円の極形式は

$$r=\frac{1}{4\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)} \quad \text{ゆえに} \quad z=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{4\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)}$$

これに $\theta=60^\circ$ を代入することにより，α が求まる.
さらに，$\theta=240^\circ$ のときの $z=-\dfrac{1}{14}-\dfrac{\sqrt{3}}{14}i$ は，A(α) を通り，実軸に平行な直線に関して B(β) と対称であることにも注意したい.

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ を微分すると



$$f'(x)=-\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=-\frac{(e^x+1)(e^x-1)}{2e^x}$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\sqrt{2}-1$	$\searrow$

したがって，グラフの概形は右のようになる．

$f(x)=0$ とすると，$e^x+e^{-x}-2\sqrt{2}=0$ となるから

$$(e^x)^2-2\sqrt{2}e^x+1=0 \quad \text{ゆえに} \quad e^x=\sqrt{2}\pm 1$$

$y=f(x)$ のグラフと x 軸との交点の x 座標は　　$\boldsymbol{x=\log(\sqrt{2}\pm 1)}$

(2) $1+\{f'(x)\}^2=1+\dfrac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2=\dfrac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2$

$y=f(x)$ は y 軸に関して対称であるから，$\alpha=\log(1+\sqrt{2})$ とおくと

$$\begin{aligned}\ell&=2\int_0^{\alpha}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_0^{\alpha}(e^x+e^{-x})\,dx\\&=\Big[\,e^x-e^{-x}\,\Big]_0^{\alpha}=e^{\alpha}-e^{-\alpha}=(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)=\mathbf{2}\end{aligned}$$

(3) 求める立体の体積 V は

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=2\int_0^{\alpha}\{f(x)\}^2\,dx=2\int_0^{\alpha}\left\{2-\sqrt{2}(e^x+e^{-x})+\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2\right\}dx\\&=\int_0^{\alpha}\left\{\frac{1}{2}(e^{2x}+e^{-2x})-2\sqrt{2}(e^x+e^{-x})+5\right\}dx\\&=\left[\,\frac{1}{4}(e^{2x}-e^{2x})-2\sqrt{2}(e^x-e^{-x})+5x\,\right]_0^{\alpha}\\&=\frac{1}{4}(e^{2\alpha}-e^{-2\alpha})-2\sqrt{2}(e^{\alpha}-e^{-\alpha})+5\alpha\\&=\frac{1}{4}(e^{\alpha}+e^{-\alpha})(e^{\alpha}-e^{-\alpha})-2\sqrt{2}(e^{\alpha}-e^{-\alpha})+5\alpha\\&=\frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2-2\sqrt{2}\cdot 2+5\log(\sqrt{2}+1)=5\log(\sqrt{2}+1)-3\sqrt{2}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V=\{5\log(\sqrt{2}+1)-3\sqrt{2}\}\pi}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=ax^2-3b$ とおくと

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2},\quad g'(x)=2ax$$

P の x 座標を p とすると，$f(p)=g(p)$，$f'(p)=g'(p)$ であるから

$$\frac{1}{p}=ap^2-3b,\quad -\frac{1}{p^2}=2ap \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} ap^3-3bp=1 & \cdots ① \\ 2ap^3=-1 & \cdots ② \end{cases}$$

①，② より　$2bp=-1 \quad \cdots ③$

したがって　$\dfrac{2ap^3}{(2bp)^3}=\dfrac{-1}{(-1)^3}$　よって　$\boldsymbol{a=4b^3}$

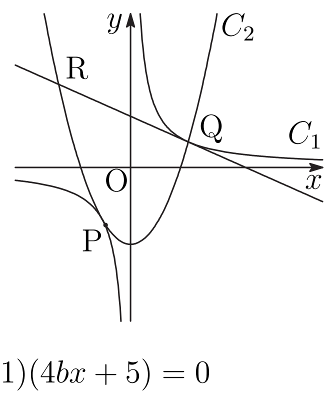
(2) (1) の結果から　$\begin{cases} y=\dfrac{1}{x} \\ y=4b^3x^2-3b \end{cases}$

上の 2 式から，y を消去して整理すると　$4b^3x^3-3bx-1=0$

③ から，$x=-\dfrac{1}{2b}$ を重解にもつことに注意して　$(2bx+1)^2(bx-1)=0$

よって　$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{-\dfrac{1}{2b},-2b}\right)$，$\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{b},\ b}\right)$

(3)　$f'\left(\dfrac{1}{b}\right)=-b^2$



Q における C_1 の接線の方程式は

$$y-b=-b^2\left(x-\frac{1}{b}\right)$$

すなわち　$y=-b^2x+2b$

これと $y=4b^3x^2-3b$ から y を消去すると

$$4b^2x^2+bx-5=0 \quad \text{ゆえに} \quad (bx-1)(4bx+5)=0$$

したがって　$x=-\dfrac{5}{4b}$，$y=-b^2\left(-\dfrac{5}{4b}\right)+2b=\dfrac{13}{4}b$

よって　$\mathbf{R}\left(\boldsymbol{-\dfrac{5}{4b},\ \dfrac{13}{4}b}\right)$

(4) $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{b},\ b\right)$, $\mathrm{R}\left(-\dfrac{5}{4b},\ \dfrac{13}{4}b\right)$ から

$$\ell=\mathrm{QR}=\sqrt{\left(-\frac{5}{4b}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{13}{4}b-b\right)^2}=\boldsymbol{\frac{9}{4}\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}}}$$

相加平均・相乗平均の関係により

$$b^2+\frac{1}{b^2}\geqq 2\sqrt{b^2\cdot\frac{1}{b^2}}=2$$

等号が成立するのは　$b^2=\dfrac{1}{b^2}$　すなわち $(b>0)$　$b=1$

よって，l は，$\boldsymbol{b=1}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{9\sqrt{2}}{4}}$ をとる．