平成13年度　九州工業大学２次試験前期日程(数学問題)
工学部　平成13年2月25日

- 数I・II・III・A・B・C (120分)

1 (1) 次の式をみたす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

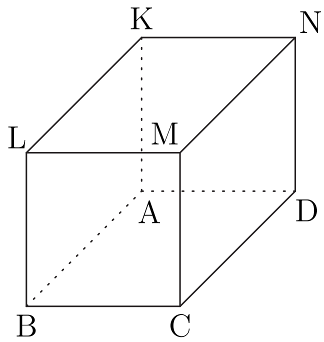
$$xy - 2y + x - 4 = 0$$

(2) a を正の実数とする．(1) で求めた整数の組 $(x,\ y)$ のすべてに対して

$$ax - \frac{y}{a} \geqq 1$$

が成り立つとき，a の値の範囲を求めよ．

2 図の長方体 ABCD-KLMN において，辺 AB の長さは 2，辺 AD の長さは $\sqrt{2}$ である．三角形 CLN の重心を G とし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \vec{c}$ とおく．次に答えよ．



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AL}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) $\angle\mathrm{AGC}$ が直角となるように辺 AK の長さを定めよ．

(4) 辺 AK が (3) で定めた長さのとき，三角形 CLN の面積を求めよ．

3 $P + Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$P\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$Q\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をみたす 2 次の正方行列 P，Q に対して $A = 2P + 3Q$ とおく．次に答えよ．

(1) $A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $A\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ を求めよ．

(2) A および P，Q を求めよ．

(3) P^2，Q^2，PQ，QP を求めよ．

(4) $X = sP + tQ\ (s > 0,\ t > 0)$ が $X^2 - X = A$ をみたすように，s と t の値を定めよ．

$\boxed{4}$ a を正の実数とし

$$f(x) = ax - \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x > 1)$$

とおく．ただし，対数は自然対数である．各 a に対して，$f(x)$ が最小となるときの x の値を $h(a)$ とする．

(1) $h(a)$ を求めよ．

(2) a の関数 $h(a)$ に対して，$F(a) = ah(a) - \log(h(a) + \log\sqrt{(h(a))^2 - 1}\,)$ とおく．$F(a)$ が $h(a)$ の原始関数であることを示せ．

(3) $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} h(a)\,da$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおく．I_n を求めよ．さらに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．

$\boxed{5}$ 関数 $f(t) = \dfrac{2e}{t} + \dfrac{2t}{e} - 5$，$g(t) = 4\log t$ $\left(\dfrac{e}{2} \leqq t \leqq 2e\right)$ の定める曲線 $C : x = f(t),\ y = g(t)$ について次に答えよ．ただし，対数は自然対数で e は自然対数の底である．

(1) 関数 $f(t)$ と $g(t)$ の増減を調べよ．

(2) $f(\alpha) = f(\beta)$ が成り立つような $\alpha,\ \beta$ $(\alpha \neq \beta)$ に対して $\alpha\beta$ の値を求めよ．

(3) 曲線 C は x 軸に平行なある直線に関して対称であることを示せ．

(4) 曲線 C と y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $xy-2y+x-4=0$ より　$(x-2)(y+1)=2$

$x-2,\ y+1$ は整数であるから

$$(x-2,\ y+1)=(-2,-1),\ (-1,-2),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$$

よって　$\boldsymbol{(x,\ y)=(0,-2),\ (1,-3),\ (3,\ 1),\ (4,\ 0)}$

(2) $a>0,\ ax-\dfrac{y}{a}\geqq 1$ より　$a^2x-a-y\geqq 0 \quad \cdots(*)$

(1) で求めた結果をそれぞれ $(*)$ に代入すると

(i) $(x,\ y)=(0,-2)$ のとき　$-a+2\geqq 0$　ゆえに　$0<a\leqq 2 \quad \cdots①$

(ii) $(x,\ y)=(1,-3)$ のとき　$a^2-a+3\geqq 0$ より

$$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\geqq 0$$　ゆえに　a はすべての正の実数　$\cdots②$

(iii) $(x,\ y)=(3,\ 1)$ のとき

$$3a^2-a-1\geqq 0$$　ゆえに　$\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}\leqq a \quad \cdots③$

(iv) $(x,\ y)=(4,\ 0)$ のとき

$$4a^2-a\geqq 0$$　ゆえに　$\dfrac{1}{4}\leqq a \quad \cdots④$

①〜④ より　$\boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}\leqq a\leqq 2}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{a} + \vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{AL}} = \vec{c} + \vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{AN}} = \vec{b} + \vec{c}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AL}} + \overrightarrow{\mathrm{AN}}}{3} = \dfrac{(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{c} + \vec{a}) + (\vec{b} + \vec{c})}{3}$

$= \boldsymbol{\dfrac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})}$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{CG}} &= \overrightarrow{\mathrm{AG}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{3}(-\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}) \end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CG}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CG}} = 0$ であるから，$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ に注意して

$$\frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \frac{1}{3}(-\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad -|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 + 2|\vec{c}|^2 = 0$$

これに $|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = \sqrt{2}$ を代入すると

$$-2^2 - (\sqrt{2})^2 + 2|\vec{c}|^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{c}|^2 = 3 \quad \text{よって} \quad \mathrm{AK} = |\vec{c}| = \boldsymbol{\sqrt{3}}$$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{CL}} = -\vec{b} + \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{CN}} = -\vec{a} + \vec{c}$ であるから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{CL}}|^2 &= |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = 2 + 3 = 5 \\ |\overrightarrow{\mathrm{CN}}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 = 4 + 3 = 7 \\ \overrightarrow{\mathrm{CL}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CN}} &= |\vec{c}|^2 = 3 \end{aligned}$$

よって
$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{CLN} &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{CL}}|^2 |\overrightarrow{\mathrm{CN}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{CL}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CN}})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{5 \cdot 7 - 3^2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{26}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ とおく.

$P+Q=E$ より，$Q=E-P$ を $Q\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ に代入すると

$$(E-P)\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad \text{ゆえに}\quad P\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$$

同様に，$P=E-Q$ を $P\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ に代入すると

$$(E-Q)\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad \text{ゆえに}\quad Q\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{aligned}A\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}&=(2P+3Q)\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=2P\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+3Q\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\\&=2\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{6}\\\mathbf{-3}\end{pmatrix}\\A\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}&=(2P+3Q)\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=2P\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}+3Q\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\\&=2\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{6}\\\mathbf{-2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から　$A\begin{pmatrix}2&3\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&6\\-3&-2\end{pmatrix}$

よって　　$A=\begin{pmatrix}6&6\\-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\-1&-1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{-6}\\\mathbf{1}&\mathbf{5}\end{pmatrix}$

$P+Q=E$，$2P+3Q=A$ より，$P=-A+3E$，$Q=A-2E$ であるから

$$P=-\begin{pmatrix}0&-6\\1&5\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{3}&\mathbf{6}\\\mathbf{-1}&\mathbf{-2}\end{pmatrix}$$

$$Q=\begin{pmatrix}0&-6\\1&5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-2}&\mathbf{-6}\\\mathbf{1}&\mathbf{3}\end{pmatrix}$$

(3) (2) の結果から

$$P^2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

$$Q^2 = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

$$PQ = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$QP = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

別解 (1) の結果から

$$P\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P^2\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

上の 2 式から　$P^2\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ は正則であるから　$P^2 = P$

同様にして，$Q^2 = Q$ を得る．

また　$PQ\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ よって　$PQ = O$

同様にして，$QP = O$ を得る．

(4) (3) の結果から，$P^2 = P$，$Q^2 = Q$，$PQ = QP = O$ であるから

$$X^2 = (sP + tQ)(sP + tQ) = s^2P^2 + st(PQ + QP) + t^2Q^2 = s^2P + t^2Q$$

したがって，$X^2 - X = A$ は

$(s^2P+t^2Q)-(sP+tQ) = 2P+3Q$　ゆえに　$(s^2-s-2)P+(t^2-t-3)Q = O$

$P \neq kQ$ (k は実数) であるから　$s^2 - s - 2 = 0,\ t^2 - t - 3 = 0$

$s > 0$，$t > 0$ に注意して　$\boldsymbol{s = 2,\ t = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=ax-\log(x+\sqrt{x^2-1})$ を微分すると

$$f'(x)=a-\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=a-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{a\sqrt{x^2-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$=\frac{a^2x^2-(a^2+1)}{\sqrt{x^2-1}(a\sqrt{x^2-1}+1)}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	(1)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって　$\boldsymbol{h(a)=\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}}$

(2) $$\frac{d}{dx}\log(x+\sqrt{x^2-1})=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$
$$\sqrt{(h(a))^2-1}=\sqrt{\frac{a^2+1}{a^2}-1}=\frac{1}{a}$$

$F(a)=ah(a)-\log\{h(a)+\sqrt{(h(a))^2-1}\}$ を微分すると

$$F'(a)=h(a)+ah'(a)-\frac{1}{\sqrt{(h(a))^2-1}}\cdot h'(a)$$
$$=h(a)+ah'(a)-ah'(a)=h(a)$$

よって，$F(a)$ は $h(a)$ の原始関数である．

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} I_n &= \int_n^{n+1} h(a)\,da = \Big[\ F(a)\ \Big]_n^{n+1} = F(n+1) - F(n) \\ &= (n+1)h(n+1) - \log(h(n+1) + \sqrt{(h(n+1))^2 - 1}) \\ &\qquad - nh(n) + \log(h(n) + \sqrt{(h(n))^2 - 1}) \\ &= (n+1)\cdot\frac{\sqrt{(n+1)^2-1}}{n+1} - \log\left(\frac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) \\ &\qquad - n\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}}{n} + \log\left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{n} + \frac{1}{n}\right) \\ &= \boldsymbol{\sqrt{(n+1)^2+1} - \sqrt{n^2+1}} \\ &\qquad \boldsymbol{- \log\frac{\sqrt{(n+1)^2+1}+1}{n+1} + \log\frac{\sqrt{n^2+1}+1}{n}} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \sqrt{(n+1)^2+1} - \sqrt{n^2+1} &= \frac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^2+1} + \sqrt{n^2+1}} \\ &= \frac{2 + \dfrac{1}{n}}{\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 + \dfrac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}}} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} I_n = &\frac{2 + \dfrac{1}{n}}{\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 + \dfrac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}}} \\ &- \log\left(\sqrt{1 + \frac{1}{(n+1)^2}} + \frac{1}{n+1}\right) + \log\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

よって $\displaystyle \lim_{n\to\infty} I_n = \frac{2}{1+1} - \log 1 + \log 1 = \mathbf{1}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $f(t)=\dfrac{2e}{t}+\dfrac{2t}{e}-5$ を微分すると $\left(\dfrac{e}{2}\leqq t\leqq 2e\right)$

$$f'(t)=-\frac{2e}{t^2}+\frac{2}{e}=\frac{2(t^2-e^2)}{et^2}=\frac{2(t+e)(t-e)}{et^2}$$

したがって，$f(t)$ の増減は次のようになる．

t	$\frac{e}{2}$	$\cdots$	e	$\cdots$	$2e$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

$g(t)=4\log t$ **は単調増加．**

(2) $f(\alpha)=f(\beta)$ より

$$\frac{2e}{\alpha}+\frac{2\alpha}{e}-5=\frac{2e}{\beta}+\frac{2\beta}{e}-5 \quad \text{ゆえに} \quad (\alpha-\beta)(\alpha\beta-e^2)=0$$

$\alpha\neq\beta$ より　$\boldsymbol{\alpha\beta=e^2}$

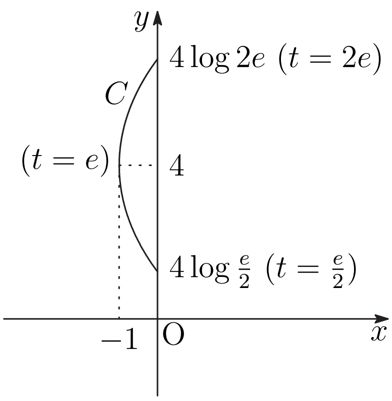
(3) (2) の α，β について

$$\frac{g(\alpha)+g(\beta)}{2}=\frac{4\log\alpha+4\log\beta}{2}=2\log\alpha\beta=2\log e^2=4$$

よって　**曲線 C は直線 $y=4$ に関して対称．**

(4) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}\frac{S}{2}&=\int_{-1}^{0}(y-4)\,dx=\int_{e}^{2e}\{g(t)-4\}f'(t)\,dt\\&=\Big[\,\{g(t)-4\}f(t)\,\Big]_e^{2e}-\int_e^{2e}g'(t)f(t)\,dt\\&=-\int_e^{2e}\frac{4}{t}\left(\frac{2e}{t}+\frac{2t}{e}-5\right)dt\\&=-4\int_e^{2e}\left(\frac{2e}{t^2}+\frac{2}{e}-\frac{5}{t}\right)dt\\&=-4\left[-\frac{2e}{t}+\frac{2t}{e}-5\log t\right]_e^{2e}=20\log 2-12\end{aligned}$$



よって　$\boldsymbol{S=40\log 2-24}$

補足 $\dfrac{S}{2}=-\displaystyle\int_4^{4\log 2e}x\,dy=-\int_e^{2e}f(t)g'(t)\,dt$ としてもよい．