

平成13年度 九州工業大学2次試験前期日程(数学問題)

数I・II・III・A・B・C(120分)

工学部 平成13年2月25日

問題 1 2 3 4 5

- 1 (1) 次の式をみたす整数の組 (x, y) をすべて求めよ.

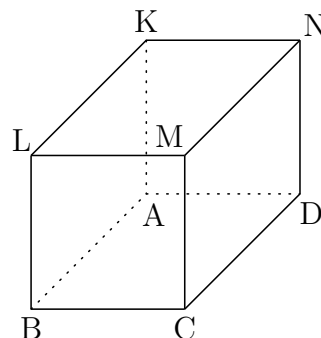
$$xy - 2y + x - 4 = 0$$

- (2) a を正の実数とする. (1) で求めた整数の組 (x, y) のすべてに対して

$$ax - \frac{y}{a} \geq 1$$

が成り立つとき, a の値の範囲を求めよ.

- 2 図の長方体 ABCD-KLMN において, 辺 AB の長さは 2, 辺 AD の長さは $\sqrt{2}$ である. 三角形 CLN の重心を G とし, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AK} = \vec{c}$ とおく. 次に答えよ.



- (1) \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AL} , \overrightarrow{AN} をそれぞれ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ.
- (2) \overrightarrow{AG} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ.
- (3) $\angle AGC$ が直角となるように辺 AK の長さを定めよ.
- (4) 辺 AK が (3) で定めた長さのとき, 三角形 CLN の面積を求めよ.

- 3 $P + Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をみたす 2 次の正方行列 P , Q に対して $A = 2P + 3Q$ とおく. 次に答えよ.

- (1) $A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $A \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ を求めよ.
- (2) A および P , Q を求めよ.
- (3) P^2 , Q^2 , PQ , QP を求めよ.
- (4) $X = sP + tQ$ ($s > 0$, $t > 0$) が $X^2 - X = A$ をみたすように, s と t の値を定めよ.

4 a を正の実数とし

$$f(x) = ax - \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x > 1)$$

とおく. ただし, 対数は自然対数である. 各 a に対して, $f(x)$ が最小となるときの x の値を $h(a)$ とする.

(1) $h(a)$ を求めよ.

(2) a の関数 $h(a)$ に対して, $F(a) = ah(a) - \log(h(a) + \sqrt{(h(a))^2 - 1})$ とおく. $F(a)$ が $h(a)$ の原始関数であることを示せ.

(3) $I_n = \int_n^{n+1} h(a) da$ ($n = 1, 2, \dots$) とおく. I_n を求めよ. さらに, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ を求めよ.

5 関数 $f(t) = \frac{2e}{t} + \frac{2t}{e} - 5$, $g(t) = 4 \log t$ ($\frac{e}{2} \leq t \leq 2e$) の定める曲線 $C: x = f(t)$, $y = g(t)$ について次に答えよ. ただし, 対数は自然対数で e は自然対数の底である.

(1) 関数 $f(t)$ と $g(t)$ の増減を調べよ.

(2) $f(\alpha) = f(\beta)$ が成り立つような α, β ($\alpha \neq \beta$) に対して $\alpha\beta$ の値を求めよ.

(3) 曲線 C は x 軸に平行なある直線に関して対称であることを示せ.

(4) 曲線 C と y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad xy - 2y + x - 4 = 0 \text{ より } (x-2)(y+1) = 2$$

$x-2, y+1$ は整数であるから

$$(x-2, y+1) = (-2, -1), (-1, -2), (1, 2), (2, 1)$$

$$\text{よって } (x, y) = (0, -2), (1, -3), (3, 1), (4, 0)$$

$$(2) \quad a > 0, \quad ax - \frac{y}{a} \geq 1 \text{ より } a^2x - a - y \geq 0 \quad \dots (*)$$

(1) で求めた結果をそれぞれ (*) に代入すると

$$(i) \quad (x, y) = (0, -2) \text{ のとき } -a + 2 \geq 0 \quad \text{ゆえに } 0 < a \leq 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(ii) \quad (x, y) = (1, -3) \text{ のとき } a^2 - a + 3 \geq 0 \text{ より}$$

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq 0 \quad \text{ゆえに } a \text{ はすべての正の実数 } \quad \dots \textcircled{2}$$

$$(iii) \quad (x, y) = (3, 1) \text{ のとき}$$

$$3a^2 - a - 1 \geq 0 \quad \text{ゆえに } \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \leq a \quad \dots \textcircled{3}$$

$$(iv) \quad (x, y) = (4, 0) \text{ のとき}$$

$$4a^2 - a \geq 0 \quad \text{ゆえに } \frac{1}{4} \leq a \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} \sim \textcircled{4} \text{ より } \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \leq a \leq 2$$



2 (1) $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{AL} = \vec{c} + \vec{a}$, $\overrightarrow{AN} = \vec{b} + \vec{c}$

(2)
$$\overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AN}}{3} = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{c} + \vec{a}) + (\vec{b} + \vec{c})}{3}$$

$$= \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

(3) (1), (2) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CG} &= \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{3}(-\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c})\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{CG}$ より, $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$ であるから, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ に注意して

$$\frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \frac{1}{3}(-\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad -|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 + 2|\vec{c}|^2 = 0$$

これに $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ を代入すると

$$-2^2 - (\sqrt{2})^2 + 2|\vec{c}|^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{c}|^2 = 3 \quad \text{よって} \quad AK = |\vec{c}| = \sqrt{3}$$

(4) $\overrightarrow{CL} = -\vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{CN} = -\vec{a} + \vec{c}$ であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{CL}|^2 &= |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = 2 + 3 = 5 \\ |\overrightarrow{CN}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 = 4 + 3 = 7 \\ \overrightarrow{CL} \cdot \overrightarrow{CN} &= |\vec{c}|^2 = 3\end{aligned}$$

よって
$$\begin{aligned}\Delta_{CLN} &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{CL}|^2 |\overrightarrow{CN}|^2 - (\overrightarrow{CL} \cdot \overrightarrow{CN})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{5 \cdot 7 - 3^2} = \frac{1}{2} \sqrt{26}\end{aligned}$$



3 (1) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく.

$$P + Q = E \text{ より, } Q = E - P \text{ を } Q \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ に代入すると}$$

$$(E - P) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad P \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{同様に, } P = E - Q \text{ を } P \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ に代入すると}$$

$$(E - Q) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad Q \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} &= (2P + 3Q) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2P \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 3Q \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{-3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} &= (2P + 3Q) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 2P \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 3Q \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) (1)の結果から $A \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

$$\text{よって} \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

$P + Q = E$, $2P + 3Q = A$ より, $P = -A + 3E$, $Q = A - 2E$ であるから

$$P = - \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

(3) (2)の結果から

$$\begin{aligned} P^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ Q^2 &= \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ PQ &= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ QP &= \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

別解 (1)の結果から

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ P^2 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} &= P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

上の2式から $P^2 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ は正則であるから $P^2 = P$

同様にして, $Q^2 = Q$ を得る.

また $PQ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ よって $PQ = O$

同様にして, $QP = O$ を得る.

(4) (3)の結果から, $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, $PQ = QP = O$ であるから

$$X^2 = (sP + tQ)(sP + tQ) = s^2P^2 + st(PQ + QP) + t^2Q^2 = s^2P + t^2Q$$

したがって, $X^2 - X = A$ は

$$(s^2P + t^2Q) - (sP + tQ) = 2P + 3Q \quad \text{ゆえに} \quad (s^2 - s - 2)P + (t^2 - t - 3)Q = O$$

$P \neq kQ$ (k は実数) であるから $s^2 - s - 2 = 0$, $t^2 - t - 3 = 0$

$s > 0$, $t > 0$ に注意して $s = 2$, $t = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ ■

4 (1) $f(x) = ax - \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= a - \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = a - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{a\sqrt{x^2 - 1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \frac{a^2x^2 - (a^2 + 1)}{\sqrt{x^2 - 1}(a\sqrt{x^2 - 1} + 1)} \end{aligned}$$

したがって、 $f(x)$ の増減表は、次のようになる。

x	(1)	...	$\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}$...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\searrow	極小	\nearrow

よって
$$h(a) = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a}$$

(2)
$$\frac{d}{dx} \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$\sqrt{(h(a))^2 - 1} = \sqrt{\frac{a^2 + 1}{a^2} - 1} = \frac{1}{a}$$

$F(a) = ah(a) - \log\{h(a) + \sqrt{(h(a))^2 - 1}\}$ を微分すると

$$\begin{aligned} F'(a) &= h(a) + ah'(a) - \frac{1}{\sqrt{(h(a))^2 - 1}} \cdot h'(a) \\ &= h(a) + ah'(a) - ah'(a) = h(a) \end{aligned}$$

よって、 $F(a)$ は $h(a)$ の原始関数である。

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_n^{n+1} h(a) da = \left[F(a) \right]_n^{n+1} = F(n+1) - F(n) \\
 &= (n+1)h(n+1) - \log(h(n+1) + \sqrt{(h(n+1))^2 - 1}) \\
 &\quad - nh(n) + \log(h(n) + \sqrt{(h(n))^2 - 1}) \\
 &= (n+1) \cdot \frac{\sqrt{(n+1)^2 - 1}}{n+1} - \log \left(\frac{\sqrt{(n+1)^2 + 1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} \right) \\
 &\quad - n \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n} + \log \left(\frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n} + \frac{1}{n} \right) \\
 &= \sqrt{(n+1)^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 1} \\
 &\quad - \log \frac{\sqrt{(n+1)^2 + 1} + 1}{n+1} + \log \frac{\sqrt{n^2 + 1} + 1}{n}
 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 \sqrt{(n+1)^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 1} &= \frac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 1}} \\
 &= \frac{2 + \frac{1}{n}}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}
 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
 I_n &= \frac{2 + \frac{1}{n}}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \\
 &\quad - \log \left(\sqrt{1 + \frac{1}{(n+1)^2}} + \frac{1}{n+1} \right) + \log \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{n} \right)
 \end{aligned}$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{2}{1+1} - \log 1 + \log 1 = 1$ ■

5 (1) $f(t) = \frac{2e}{t} + \frac{2t}{e} - 5$ を微分すると $\left(\frac{e}{2} \leq t \leq 2e\right)$

$$f'(t) = -\frac{2e}{t^2} + \frac{2}{e} = \frac{2(t^2 - e^2)}{et^2} = \frac{2(t+e)(t-e)}{et^2}$$

したがって、 $f(t)$ の増減は次のようになる。

t	$\frac{e}{2}$	\cdots	e	\cdots	$2e$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	\searrow	-1	\nearrow	0

$g(t) = 4 \log t$ は単調増加.

(2) $f(\alpha) = f(\beta)$ より

$$\frac{2e}{\alpha} + \frac{2\alpha}{e} - 5 = \frac{2e}{\beta} + \frac{2\beta}{e} - 5 \quad \text{ゆえに} \quad (\alpha - \beta)(\alpha\beta - e^2) = 0$$

$\alpha \neq \beta$ より $\alpha\beta = e^2$

(3) (2) の α, β について

$$\frac{g(\alpha) + g(\beta)}{2} = \frac{4 \log \alpha + 4 \log \beta}{2} = 2 \log \alpha\beta = 2 \log e^2 = 4$$

また、 $f(\alpha) = f(\beta)$ より 曲線 C は直線 $y = 4$ に関して対称.

(4) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \int_{-1}^0 (y - 4) dx = \int_e^{2e} \{g(t) - 4\} f'(t) dt \\ &= \left[\{g(t) - 4\} f(t) \right]_e^{2e} - \int_e^{2e} g'(t) f(t) dt \\ &= - \int_e^{2e} \frac{4}{t} \left(\frac{2e}{t} + \frac{2t}{e} - 5 \right) dt \\ &= -4 \int_e^{2e} \left(\frac{2e}{t^2} + \frac{2}{e} - \frac{5}{t} \right) dt \\ &= -4 \left[-\frac{2e}{t} + \frac{2t}{e} - 5 \log t \right]_e^{2e} = 20 \log 2 - 12 \end{aligned}$$

よって $S = 40 \log 2 - 24$

補足 $\frac{S}{2} = - \int_4^{4 \log 2e} x dy = - \int_e^{2e} f(t) g'(t) dt$ としてもよい. ■

