平成 28 年度　九州工業大学２次試験後期日程 (数学問題)
情報工学部　平成 28 年 3 月 12 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

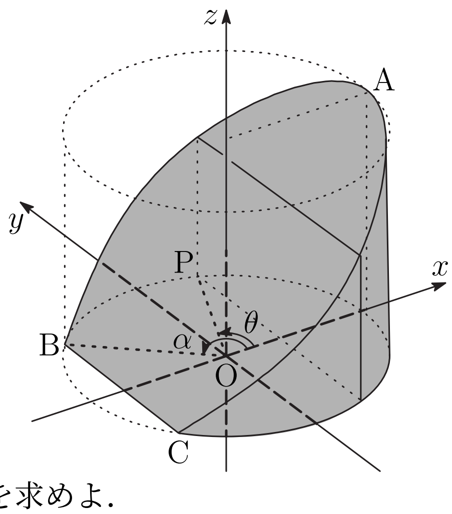
$\boxed{\mathbf{1}}$ 関数 $f(x)$ を $f(x) = x\{\log(x^2 + e^{-2}) + 1 - \log 2\}$ とする．ただし，対数は自然対数とし，e は自然対数の底とする．以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ は，$x = \pm e^{-1}$ で極値をとることを示せ．

(2) 関数 $f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸，変曲点，および x 軸との交点を求め，$y = f(x)$ のグラフの概形を描け．

(3) $x \geqq 0$ において，$y = f(x)$ のグラフと x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 座標空間内の原点を O とする．O を中心とする半径 1 の xy 平面上の円を底面とする高さ 2 の円柱を考え，この円柱から 3 点 A$(1,\ 0,\ 2)$，B$\left(-\frac{4}{5},\ \frac{3}{5},\ 0\right)$，C$\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5},\ 0\right)$ を通る平面で切り取った図の色のついた部分の立体を考える．底面の円周上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ を P とする．ただし，OB，OP が x 軸の正の向きとなす角をそれぞれ α，θ とし，$0 \leqq \theta \leqq \alpha < \pi$ をみたすものとする．点 P を通り x 軸に垂直な平面でこの立体を切ったときの断面積を S とする．以下の問いに答えよ．



(1) $\cos\alpha$，$\sin\alpha$ の値を求めよ．

(2) 断面積 S を θ を用いて表せ．

(3) (2) で求めた断面積 S の最大値と，そのときの $\cos\theta$ の値を求めよ．ただし，二重根号はできるだけはずすこと．

(4) 立体の体積を α を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を

$$\begin{array}{lll} a_1 = 1, & a_{n+1} = 4a_n + 3 & (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ b_1 = 1,\ b_2 = \alpha, & b_{n+2} = 7b_{n+1} - 12b_n & (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ c_1 = \beta, & c_{n+1} = \beta c_n & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{array}$$

により定める．ただし，α，β は実数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ の漸化式を $b_{n+2} - pb_{n+1} = q(b_{n+1} - pb_n)$ の形に変形することより，数列 $\{b_n\}$ の一般項を α を用いて表せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = -\frac{3}{4}$ のとき，α の値の求めよ．

(4) $\alpha = 1$ かつ $\beta \geqq 2$ のとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + b_k}{c_k}$ の収束，発散を調べ，収束する場合にはその和を β を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ x，y がともに整数である座標平面上の点 $(x,\ y)$ を格子点という．2 以上の整数 n に対して，x，y がそれぞれ $1 \leqq x \leqq n$ および $1 \leqq y \leqq n$ の範囲に含まれる n^2 個の格子点の集合を L_n とする．以下の問いに答えよ．

(1) L_4 に含まれ $(1,\ 1)$ とは異なる格子点のうち，その点と $(1,\ 1)$ との中点が格子点となる点は何個あるか．

(2) L_4 から異なる 2 個の格子点を選ぶとき，それらの中点が格子点となる確率を求めよ．

(3) 座標平面上の異なる 2 個の格子点 $(x,\ y)$ と $(x + a,\ y + b)$ の中点が格子点となるための a と b の条件を求めよ．

(4) L_{2k} $(k = 2, 3, 4, \cdots)$ から異なる 2 個の格子点を選ぶとき，それらの中点が格子点となる確率を p_k とする．このとき，p_k を k を用いて表せ．また，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} p_k$ を求めよ．

(5) L_{2k} $(k = 2, 3, 4, \cdots)$ から異なる 3 個の格子点を選ぶとき，それらの中のどの 2 個の格子点の中点も格子点とはならない確率を q_k とする．このとき，q_k を k を用いて表せ．$\displaystyle\lim_{k\to\infty} q_k$ を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=x\log\dfrac{x^2+e^{-2}}{2}+x$ を微分すると

$$f'(x)=\log\frac{x^2+e^{-2}}{2}+x\cdot\frac{2x}{x^2+e^{-2}}+1$$
$$=\log\frac{x^2+e^{-2}}{2}-\frac{2e^{-2}}{x^2+e^{-2}}+3$$

ここで，$g(x)=\dfrac{x^2+e^{-2}}{2}$ とおくと　$g(x)>0$

$$f'(x)=\log g(x)-\frac{e^{-2}}{g(x)}+3,\quad f''(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}+\frac{e^{-2}g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$x>0$ のとき，$g'(x)>0$ であるから　　$f''(x)>0\quad(x>0)$
$g(e^{-1})=e^{-2}$ であるから，$f'(e^{-1})=0$ より

$$\text{極小値}\quad f(e^{-1})=-\frac{1}{e}$$

また $y=f(x)$ のグラフは原点に関して対称であるから

$$\text{極大値}\quad f(-e^{-1})=\frac{1}{e}$$

(2) グラフが原点に関して対称であから，$f(x)$ の増減は次のようになる．

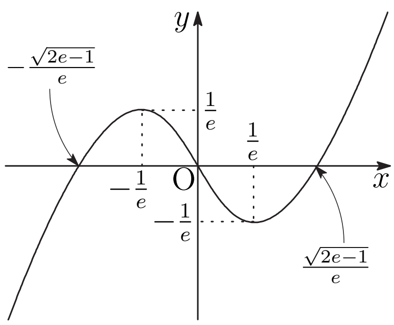
x	$\cdots$	$-\frac{1}{e}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	極大 $\frac{1}{e}$	↘	変曲点 0	↘	極小 $-\frac{1}{e}$	↗

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

極大値 $\boldsymbol{f\left(-\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}}$,

極小値 $\boldsymbol{f\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}}$

変曲点 $\mathbf{(0,\ 0)}$



$f(x)=0$ を解いて　$x=0,\ \pm\dfrac{\sqrt{2e-1}}{e}$

よって，x 軸との交点は　　$\mathbf{(0,\ 0)}$，$\boldsymbol{\left(\pm\dfrac{\sqrt{2e-1}}{e},\ 0\right)}$

(3) $\alpha = \dfrac{\sqrt{2e-1}}{e}$ とおくと　　$g(\alpha) = \dfrac{1}{e}$

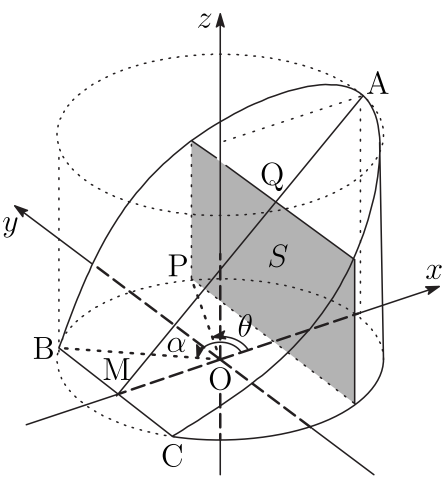
求める面積を S とすると，$x = g'(x)$ に注意して

$$\begin{aligned} S &= -\int_0^{\alpha} f(x)\,dx = -\int_0^{\alpha}\left(x\log\frac{x^2+e^{-2}}{2} + x\right)dx \\ &= -\int_0^{\alpha}\{g'(x)\log g(x) + g'(x)\}dx = -\Big[\ g(x)\log g(x)\ \Big]_0^{\alpha} \\ &= -g(\alpha)\log g(\alpha) + g(0)\log g(0) \\ &= -\frac{1}{e}\log\frac{1}{e} + \frac{e^{-2}}{2}\log\frac{e^{-2}}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{e} - \frac{2+\log 2}{2e^2}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 点 B の座標から　　$\boldsymbol{\cos\alpha = -\frac{4}{5},\ \sin\alpha = \frac{3}{5}}$

(2) 2 点 B，C の中点を M とすると

$$\mathrm{M}\left(-\frac{4}{5},\ 0,\ 0\right)$$



P を通り，x 軸に垂直な平面と直線 MA との交点を Q とすると，実数 t を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= t\overrightarrow{\mathrm{OM}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= t\left(-\frac{4}{5},\ 0,\ 0\right) \\ &\qquad + (1-t)(1,\ 0,\ 2) \\ &= \left(1-\frac{9}{5}t,\ 0,\ 2-2t\right) \end{aligned}$$

Q の x 座標は $\cos\theta$ であるから

$$1 - \frac{9}{5}t = \cos\theta \quad \text{すなわち} \quad t = \frac{5}{9}(1-\cos\theta)$$

したがって　　$\mathrm{Q}\left(\cos\theta,\ 0,\ \dfrac{10\cos\theta + 8}{9}\right)$

P の y 座標および Q の z 座標より

$$\begin{aligned} S &= 2\times\sin\theta\times\frac{10\cos\theta+8}{9} = \frac{4}{9}\sin\theta(5\cos\theta+4) \\ &= \frac{10}{9}\sin 2\theta + \frac{16}{9}\sin\theta = \boldsymbol{\frac{2}{9}(5\sin 2\theta + 8\sin\theta)} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\frac{dS}{d\theta}=\frac{4}{9}(5\cos 2\theta+4\cos\theta)=\frac{4}{9}(10\cos^2\theta+4\cos\theta-5)$$

$\dfrac{dS}{d\theta}=0$ とすると，$0\leqq\theta\leqq\alpha$ より，$-\dfrac{4}{5}\leqq\cos\theta\leqq 1$ に注意して

$$\cos\theta=\frac{3\sqrt{6}-2}{10}$$

この θ を θ_0 とすると，S の増減表は

θ	0	$\cdots$	θ_0	$\cdots$	α
$\frac{dS}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

このとき　$\sin\theta_0=\sqrt{1-\left(\dfrac{3\sqrt{6}-2}{10}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{42+12\sqrt{6}}}{10}$

$$=\frac{\sqrt{6(7+2\sqrt{6})}}{10}=\frac{\sqrt{6}(\sqrt{6}+1)}{10}=\frac{6+\sqrt{6}}{10}$$

最大値は　$S=\dfrac{4}{9}\sin\theta_0(5\cos\theta_0+4)$

$$=\frac{4}{9}\times\frac{6+\sqrt{6}}{10}\left(5\times\frac{3\sqrt{6}-2}{10}+4\right)=\boldsymbol{\frac{18+8\sqrt{6}}{15}}$$

(4) 求める立体の体積を V とすると　$V=\displaystyle\int_{-\frac{4}{5}}^{1}S\,dx$

$x=\cos\theta$ とおくと　$\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta$

x	$-\frac{4}{5}\longrightarrow 1$
θ	$\alpha\longrightarrow 0$

$$V=\int_{\alpha}^{0}S(-\sin\theta)\,d\theta=\frac{4}{9}\int_0^{\alpha}\sin^2\theta(5\cos\theta+4)\,d\theta$$
$$=\frac{4}{9}\int_0^{\alpha}(5\sin^2\theta\cos\theta+2-2\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$=\frac{4}{9}\left[\frac{5}{3}\sin^3\theta+2\theta-\sin 2\theta\right]_0^{\alpha}=\frac{4}{9}\left(\frac{5}{3}\sin^3\alpha+2\alpha-\sin 2\alpha\right)$$

ここで　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{24}{25}$

よって　$V=\dfrac{4}{9}\left\{\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{3}{5}\right)^3+2\alpha-\left(-\dfrac{24}{25}\right)\right\}=\boldsymbol{\dfrac{8}{9}\alpha+\dfrac{44}{75}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $a_{n+1}=4a_n+3$ より　　$a_{n+1}+1=4(a_n+1)$

数列 $\{a_n+1\}$ は，初項 a_1+1，公比 4 の等比数列であるから

$$a_n+1=(a_1+1)\cdot4^{n-1}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{a_n=2\cdot4^{n-1}-1}$$

(2) 漸化式から　　$b_{n+2}-3b_{n+1}=4(b_{n+1}-3b_n)$

数列 $\{b_{n+1}-3b_n\}$ は，初項 b_2-3b_1，公比 4 の等比数列であるから

$$\begin{aligned} b_{n+1}-3b_n &= (b_2-3b_1)\cdot4^{n-1} \\ &= (\alpha-3)\cdot4^{n-1} \quad \cdots ① \end{aligned}$$

同様に　　$b_{n+2}-4b_{n+1}=3(b_{n+1}-4b_n)$

数列 $\{b_{n+1}-4b_n\}$ は，初項 b_2-4b_1，公比 3 の等比数列であるから

$$\begin{aligned} b_{n+1}-4b_n &= (b_2-4b_1)\cdot3^{n-1} \\ &= (\alpha-4)\cdot3^{n-1} \quad \cdots ② \end{aligned}$$

① − ② より　　$\boldsymbol{b_n=(\alpha-3)\cdot4^{n-1}-(\alpha-4)\cdot3^{n-1}}$

(3) (1),(2) の結果から

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(\alpha-3)\cdot4^{n-1}-(\alpha-4)\cdot3^{n-1}}{2\cdot4^{n-1}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\alpha-3}{2}-\frac{\alpha-4}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}=\frac{\alpha-3}{2} \end{aligned}$$

ゆえに　$\dfrac{\alpha-3}{2}=-\dfrac{3}{4}$　これを解いて　$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{3}{2}}$

(4) $\alpha=1$ を (2) の結果に代入すると　　$b_n=-2\cdot4^{n-1}+3^n$

$\{c_n\}$ は初項 β，公比 β の等比数列であるから　　$c_n=\beta^n$

したがって　$\dfrac{a_k+b_k}{c_k}=\dfrac{(2\cdot4^{k-1}-1)+(-2\cdot4^{k-1}+3^k)}{\beta^k}=\left(\dfrac{3}{\beta}\right)^k-\left(\dfrac{1}{\beta}\right)^k$

$\beta \geqq 2$ より $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\beta}\left\{1-\left(\frac{1}{\beta}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{\beta}} = \frac{1}{\beta-1}$

$2 \leqq \beta \leqq 3$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{\beta}\right)^k = \infty$

$\beta > 3$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{\beta}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{\beta}\left\{1-\left(\frac{3}{\beta}\right)^n\right\}}{1-\frac{3}{\beta}} = \frac{3}{\beta-3}$

よって，$2 \leqq \beta \leqq 3$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k+b_k}{c_k} = \boldsymbol{\infty}$

$\beta > 3$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k+b_k}{c_k} = \frac{3}{\beta-3} - \frac{1}{\beta-1}$

$$= \boldsymbol{\frac{2\beta}{(\beta-1)(\beta-3)}}$$

$\boxed{4}$ (1) (1, 3)，(3, 1), (3, 3) の **3 個**

(2) 格子点 $(x,\ y)$ に対して

$$x \equiv i, \quad y \equiv j \pmod 2$$

となる L_n の部分集合を $A_{i,j}$ とする $(0 \leqq i,\ j \leqq 1)$.
異なる 2 個の格子点の中点が格子点となるのは，同じ $A_{i,j}$ の 2 個の格子点を選ぶときである．L_4 の格子点は 16 個あり，L_4 の 4 つの部分集合 $A_{i,j}$ にある格子点の個数はそれぞれ 4 個であるから，求める確率は

$$\frac{4 \times {}_4\mathrm{C}_2}{{}_{16}\mathrm{C}_2} = \boldsymbol{\frac{1}{5}}$$

(3) 2 個の格子点 $(x,\ y)$ と $(x+a,\ y+b)$ の中点は $\left(x+\dfrac{a}{2},\ y+\dfrac{b}{2}\right)$
これが格子点である条件は,「$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ **がともに偶数**」である.

(4) L_{2k} の格子点の個数は $4k^2$ であり，L_{2k} の 4 つの部分集合 $A_{i,j}$ の格子点の個数はそれぞれ k^2 である．

(2) と同様に，異なる 2 個の格子点の中点が格子点となるのは，同じ $A_{i,j}$ の 2 個の格子点を選ぶときであるから，求める確率 p_k は

$$p_k = \frac{4 \times {}_{k^2}\mathrm{C}_2}{{}_{4k^2}\mathrm{C}_2} = \frac{2k^2(k^2-1)}{2k^2(4k^2-1)} = \boldsymbol{\frac{k^2-1}{4k^2-1}}$$

よって $$\lim_{k\to\infty} p_k = \lim_{k\to\infty}\frac{k^2-1}{4k^2-1} = \lim_{k\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{k^2}}{4-\dfrac{1}{k^2}} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(5) L_{2k} の $4k^2$ 個の格子点から 3 個選ぶ場合の総数は

$${}_{4k^2}\mathrm{C}_3 = \frac{4k^2(4k^2-1)(4k^2-2)}{3\cdot2\cdot1} = \frac{4}{3}k^2(4k^2-1)(2k^2-1)$$

このとき，どの 2 個の格子点の中点も格子点とならないのは，選んだ 3 個の格子点が 3 個とも異なる $A_{i,j}$ にある場合で，その総数は

$${}_4\mathrm{C}_3(k^2)^3 = 4k^6$$

したがって，求める確率 q_k は

$$q_k = \frac{4k^6}{\dfrac{4}{3}k^2(4k^2-1)(2k^2-1)} = \boldsymbol{\frac{3k^4}{(4k^2-1)(2k^2-1)}}$$

よって $$\lim_{k\to\infty} q_k = \lim_{k\to\infty}\frac{3}{\left(4-\dfrac{1}{k^2}\right)\left(2-\dfrac{1}{k^2}\right)} = \boldsymbol{\frac{3}{8}}$$