平成 28 年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
情報工学部　平成 28 年 2 月 25 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 座標平面上の曲線 $C : y = \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$ と点 $\mathrm{P}(s,\ t)\ (s > 0,\ t > 0,\ st < 1)$ を考える．また，$u = st$ とする．点 P を通る曲線 C の 2 本の接線をそれぞれ l_1，l_2 とし，これらの接線と曲線 C との接点をそれぞれ $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$ とする．ただし，$a < b$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) a，b を s，t を用いて表せ．

(2) 2 点 $\mathrm{E}(a,\ 0)$，$\mathrm{F}(b,\ 0)$ を考える．台形 ABFE の面積を u を用いて表せ．

(3) $\triangle$PAB の面積を u を用いて表せ．

(4) (3) で求めた $\triangle$PAB の面積を $S(u)$ とする．$S(u)$ は区間 $0 < u < 1$ で減少することを示せ．

(5) 点 P が 2 点 $(3,\ 0)$，$(0,\ 1)$ を結ぶ線分上の端点以外にあるものとする．このとき，$\triangle$PAB の面積が最小となる点 P の座標を求めよ．また，そのときの面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 原点Oを中心とする半径1の円をC_1とする．円C_1に外接しながら，半径1の円C_2がすべることなく回転する．円C_2の中心をPとし，円C_2上の点Qは最初，x軸上の点A(3, 0)にあるものとする．半直線PQ上で点Pからの距離が2の点をRとし，OPがx軸の正の向きとなす角をθとする．C_2が回転してθが0から2πまで変化するとき，点Rが描く曲線をCとする．曲線Cの概形を図1に示す．以下の問いに答えよ．

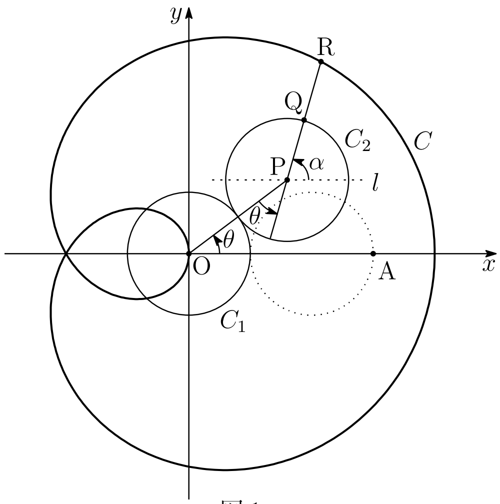


図1

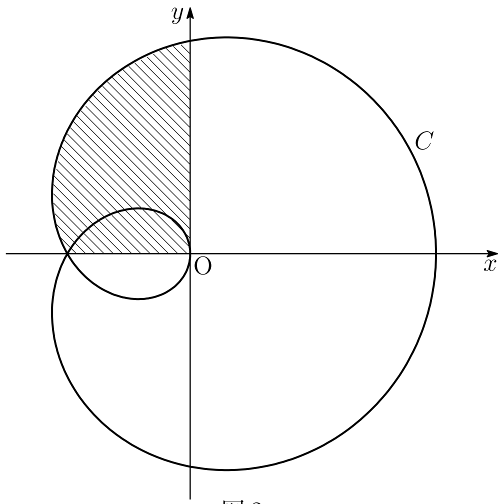


図2

(1) 点Pの座標をθを用いて表せ．

(2) 点Pを通りx軸と平行な直線をlとする．直線lと線分PRのなす角αを，θを用いて表せ．また，Rの座標をθを用いて表せ．

(3) 曲線Cとx軸の共有点の座標をすべて求めよ．

(4) 曲線Cとy軸の共有点の座標をすべて求めよ．

(5) 点Rのx座標が最小となるときの点Rの座標をすべて求めよ．

(6) 曲線Cとx軸，y軸に囲まれた図2の斜線部分の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 複素数 z_n を

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 1, \quad z_{n+2} = z_{n+1} + \alpha(z_{n+1} - z_n) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

により定める．ただし，i を虚数単位とし，$\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ とする．また，複数平面上で複素数 z_n を表す点を P_n とする．以下の問いに答えよ．

(1) z_2，z_3，z_4 を求めよ．

(2) 点 P_0，P_1，P_2，P_3，P_4 を図示せよ．また，線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$，$\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$，$\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4$ の長さ，および $\angle\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1\mathrm{P}_0$，$\angle\mathrm{P}_3\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1$，$\angle\mathrm{P}_4\mathrm{P}_3\mathrm{P}_2$ の値も図中に示せ．

(3) $z_{n+1} - z_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を α と n を用いて表せ．

(4) z_n の実部，虚部をそれぞれ x_n，y_n とする．このとき，x_n，y_n をそれぞれ n を用いて表せ．

(5) (4) で求めた x_n，y_n について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n$ をそれぞれ求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ はじめに，4 枚の硬貨 A，B，C，D が，表が上の状態で置かれている．これらの硬貨に対して以下の試行を繰り返すものとする．

試行：4 枚の硬貨のうち，裏が上の硬貨はそのままにし，
表が上の硬貨はすべて拾って同時に投げる．

ただし，すべての硬貨が，裏が上の場合も，0 枚の硬貨を拾って投げるとみなして，試行を繰り返すものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 硬貨 A が 3 回目の試行の後に表が上である確率を求めよ．

(2) 3 回目の試行の後，硬貨 A と B は表が上で，かつ，硬貨 C と D は裏が上である確率を求めよ．

(3) 3 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚である確率を求めよ．

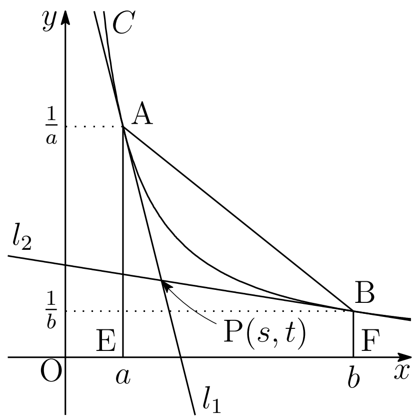
(4) 1 回目の試行の後に表が上の硬貨が 3 枚であった．このとき，3 回目の試行に後に表が上の硬貨が 2 枚である確率を求めよ．

(5) 1 回目の試行の後に表が上の硬貨が 3 枚で，かつ，3 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚である確率を求めよ．

(6) 3 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚であった．このとき，1 回目の試行の後に表が上の硬貨が 3 枚である確率を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y=\dfrac{1}{x}$ を微分すると　$y'=-\dfrac{1}{x^2}$



$\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ における接線 l_1 の方程式は

$$y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a)$$

ゆえに　$y=-\dfrac{1}{a^2}x+\dfrac{2}{a}$

これが，$\mathrm{P}(s,\ t)$ を通るから

$$t=-\frac{1}{a^2}s+\frac{2}{a}$$

上式を a について，整理すると　$ta^2-2a+s=0$

$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$ についても同様にして　$tb^2-2b+s=0$

上の 2 式から，a，b は λ に関する 2 次方程式

$$t\lambda^2-2\lambda+s=0 \quad \cdots(*)$$

の解であるから $(a<b)$，$t>0$，$st<1$ に注意して

$$\boldsymbol{a=\frac{1-\sqrt{1-st}}{t},\quad b=\frac{1+\sqrt{1-st}}{t}}$$

(2) 方程式 $(*)$ の解と係数の関係および (1) の結果から

$$a+b=\frac{2}{t},\quad ab=\frac{s}{t},\quad b-a=\frac{2\sqrt{1-st}}{t} \quad \cdots(**)$$

台形 ABFE の面積は，上式により

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\mathrm{AE}+\mathrm{BF})\cdot\mathrm{EF}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(b-a)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{ab}(b-a)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{t}\cdot\frac{t}{s}\cdot\frac{2\sqrt{1-st}}{t}\\&=\frac{2\sqrt{1-st}}{st}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{1-u}}{u}}\end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\left(a-s,\ \dfrac{1}{a}-t\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\left(b-s,\ \dfrac{1}{b}-t\right)$ であるから $(a<b)$，
$(**)$ および $u=st<1$ により

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PAB}&=\frac{1}{2}\left|(a-s)\left(\frac{1}{b}-t\right)-(b-s)\left(\frac{1}{a}-t\right)\right|\\&=\frac{1}{2}\left|s\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+t(b-a)-\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)\right|\\&=\frac{1}{2}(b-a)\left|\frac{s}{ab}+t-\frac{a+b}{ab}\right|\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{1-st}}{t}\left|s\cdot\frac{t}{s}+t-\frac{2}{t}\cdot\frac{t}{s}\right|\\&=2\sqrt{1-st}\left|1-\frac{1}{st}\right|=2\sqrt{1-u}\left|1-\frac{1}{u}\right|\\&=2\sqrt{1-u}\cdot\frac{|u-1|}{u}=\boldsymbol{\frac{2(1-u)^{\frac{3}{2}}}{u}}\end{aligned}$$

(4) (3) の結果から　　$S(u)=\dfrac{2(1-u)^{\frac{3}{2}}}{u}$
これを微分すると　$S'(u)=-\dfrac{(u+2)\sqrt{1-u}}{u^2}$
したがって，$0<u<1$ において　$S'(u)<0$
よって，$S(u)$ は区間 $0<u<1$ で減少する．

(5) 条件から，$\mathrm{P}(s,\ t)$ について　$\dfrac{s}{3}+t=1\ \ (0<t<1)$
すなわち　　$s=3-3t\ (0<t<1)$
ゆえに　$u=st=(3-3t)t=-3\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$
したがって，u は，$s=\dfrac{3}{2}$，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{3}{4}$ をとる．
(3)，(4) の結果から，$\mathrm{P}\boldsymbol{\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)}$ で $\triangle\mathrm{PAB}$ は最小となり，最小値は

$$S\left(\frac{3}{4}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

補足 $s>0$，$t>0$ であるから相加平均・相乗平均の関係により

$$1=\frac{s}{3}+t\geqq 2\sqrt{\frac{s}{3}\cdot t}=2\sqrt{\frac{u}{3}}\quad よって\quad u\leqq\frac{3}{4}$$

等号が成立するのは　$\dfrac{s}{3}=t$　すなわち　$s=\dfrac{3}{2}$，$t=\dfrac{1}{2}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\mathrm{OP}=2$，OP と x 軸の正の向きとなす角が θ であるから

$$\mathbf{P}(2\cos\boldsymbol{\theta},\ 2\sin\boldsymbol{\theta})$$

(2) 線分 OP の P の延長と C_2 の交点を Q' とすると，直線 l と PQ' のなす角は θ であり，$\angle\mathrm{Q}'\mathrm{OQ}=\theta$ であるから

$$\alpha=\theta+\angle\mathrm{Q}'\mathrm{OQ}=\theta+\theta=\mathbf{2}\boldsymbol{\theta}$$

$\mathrm{PR}=2$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(2\cos 2\theta,\ 2\sin 2\theta)$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PR}}\\&=(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)+(2\cos 2\theta,\ 2\sin 2\theta)\\&=(2\cos\theta+2\cos 2\theta,\ 2\sin\theta+2\sin 2\theta)\end{aligned}$$

よって　$\mathbf{R}(2\cos\boldsymbol{\theta}+2\cos 2\boldsymbol{\theta},\ 2\sin\boldsymbol{\theta}+2\sin 2\boldsymbol{\theta})$

(3) $\mathrm{R}(x,\ y)$ とすると，(2) の結果から

$$y=2\sin\theta+2\sin 2\theta=4\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ において，$y=0$ を解くと　$\theta=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ 2\pi$

これらの θ の値を順次，(2) の結果に代入すると

$$(4,\ 0),\ (-2,\ 0),\ (0,\ 0),\ (-2,\ 0),\ (4,\ 0)$$

よって，求める x 軸との共有点の座標は

$$\mathbf{(4,\ 0),\ (-2,\ 0),\ (0,\ 0)}$$

(4) (3) と同様に，(2) の結果から

$$x=2\cos\theta+2\cos 2\theta=4\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

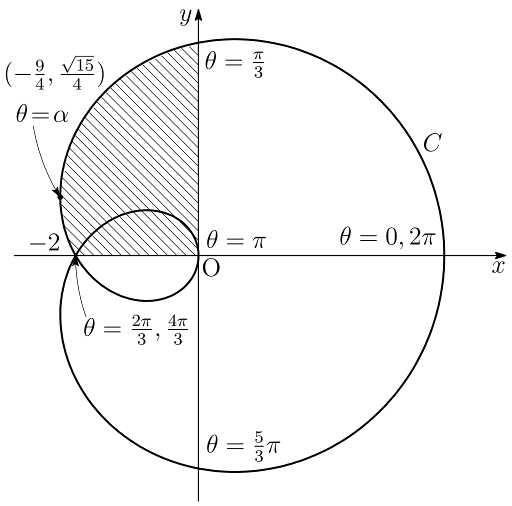
$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ において，$y=0$ を解くと　$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって，これらの θ の値を順次，(2) の結果に代入すると

$$\mathbf{(0,\ 2\sqrt{3}),\ (0,\ 0),\ (0,-2\sqrt{3})}$$

(5) (2) の結果から

$$\begin{aligned} x &= 2\cos\theta + 2\cos 2\theta \\ &= 2\cos\theta + 2(2\cos^2\theta - 1) \\ &= 4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 2 \\ &= 4\left(\cos\theta + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{4} \end{aligned}$$



点 R の x 座標が最小となるとき

$$\cos\theta = -\frac{1}{4}$$

このとき　$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$，$\cos 2\theta = -\frac{7}{8}$，$\sin 2\theta = \mp\frac{\sqrt{15}}{8}$　(複号同順)

よって，求める座標は　$\boldsymbol{\left(-\frac{9}{4},\ \pm\frac{\sqrt{15}}{4}\right)}$

(6) よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{0} y\,dx = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \\ &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (2\sin\theta + 2\sin 2\theta)(2\cos\theta + 2\cos 2\theta)'\,d\theta \\ &= 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (\sin\theta + \sin 2\theta)(\sin\theta + 2\sin 2\theta)\,d\theta \\ &= 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (\sin^2\theta + 3\sin\theta\sin 2\theta + 2\sin^2 2\theta)\,d\theta \\ &= 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2} + 3\times\frac{\cos\theta - \cos 3\theta}{2} + 2\times\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right)d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (6 + 6\cos\theta - 2\cos 2\theta - 6\cos 3\theta - 4\cos 4\theta)\,d\theta \\ &= \Big[\,6\theta + 6\sin\theta - \sin 2\theta - 2\sin 3\theta - \sin 4\theta\,\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \boldsymbol{2\pi} \end{aligned}$$

補足 $S = \int_{-\frac{9}{4}}^{0} y\,dx - \int_{-\frac{9}{4}}^{-2} y\,dx = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{3}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta - \int_{\alpha}^{\frac{2\pi}{3}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$

類題 長崎大学 (2009 年 $\boxed{7}$)[1]

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki_2009.pdf

$\boxed{\textbf{3}}$ (1) 与えられた漸化式より

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \alpha(z_{n+1} - z_n)\ (n = 0, 1, 2, \cdots) \quad \cdots (*)$$

であるから

$$z_2 - z_1 = \alpha(z_1 - z_0) = \alpha = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \quad \cdots ①$$
$$z_3 - z_2 = \alpha(z_2 - z_1) = \alpha^2 = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}i$$
$$z_4 - z_3 = \alpha(z_3 - z_2) = \alpha^3 = \frac{1}{8}(\cos\pi + i\sin\pi) = -\frac{1}{8}$$

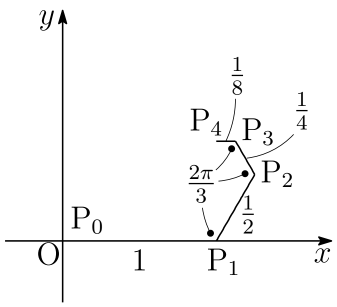
上の第1式と第2式，および上の3式の辺々を加えると

$$z_3 - z_1 = \frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i, \quad z_4 - z_1 = \frac{3\sqrt{3}}{8}i$$

$z_1 = 1$ であるから，① および上の2式から

$$\boldsymbol{z_2 = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i, \quad z_3 = \frac{9}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i, \quad z_4 = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{8}i}$$

(2) α は大きさが $\frac{1}{2}$，偏角が $\frac{\pi}{3}$ であるから，$(*)$ より，$\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$ は $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ を $\frac{1}{2}$ に縮小し，$\frac{\pi}{3}$ だけ回転させたものである．$\mathrm{P}_0(0)$，$\mathrm{P}_1(1)$ であるから，P_2，P_3，P_4 を複素数平面上にとると，右の図のようになる．



(3) $z_0 = 0$，$z_1 = 1$，および $(*)$ より

$$z_{n+1} - z_n = \alpha^n(z_1 - z_0) = \boldsymbol{\alpha^n}$$

(4) (3) の結果から，$n \geqq 1$ のとき

$$\sum_{k=0}^{n-1}(z_{k+1}-z_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k \quad ゆえに \quad z_n=\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1} \qquad \cdots(**)$$

$(**)$ は $n=0$ についても成り立つ．ここで

$$\alpha^n=\frac{1}{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$
$$\alpha-1=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)-1=-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$$

したがって

$$z_n=\frac{\frac{1}{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)-1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)}$$
$$=\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}\left(\cos\frac{2n-5}{6}\pi+i\sin\frac{2n-5}{6}i\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{5}{6}\pi-i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$$
$$=\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}\left(\cos\frac{2n-5}{6}\pi+i\sin\frac{2n-5}{6}i\right)+1+\frac{1}{\sqrt{3}}i$$
$$=\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}\cos\frac{2n-5}{6}\pi+1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{2n-5}{6}\pi+1\right)i$$

$z_n=x_n+y_ni$ であるから

$$\boldsymbol{x_n=\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}\cos\frac{2n-5}{6}\pi+1}$$
$$\boldsymbol{y_n=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{2n-5}{6}\pi+1\right)}$$

(5) (4) の結果から $\quad |x_n-1| \leqq \dfrac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}, \quad \left|y_n-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right| \leqq \dfrac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}x_n=1,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 硬貨 A が 3 回続けて表が上の確率であるから $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$

(2) それぞれの硬貨は 3 回目の試行の後，表が上である確率が $\dfrac{1}{8}$ であるから，それぞれの硬貨が 3 回目の試行の後，裏である確率は

$$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

よって，求める確率は $\left(\dfrac{1}{8}\right)^2\left(\dfrac{7}{8}\right)^2 = \dfrac{\mathbf{49}}{\mathbf{4096}}$

(3) 3 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚の場合の総数は ${}_4\mathrm{C}_2$ (通り)

よって，(2) の結果により ${}_4\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{8}\right)^2\left(\dfrac{7}{8}\right)^2 = \dfrac{\mathbf{147}}{\mathbf{2048}}$

(4) 1 枚の硬貨が 2 回連続して表が上である確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

3 枚の硬貨について，2 枚が 2 回連続して表が上で，残りの 1 枚が裏が上の確率であるから

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{64}}$$

(5) 1 回目の試行の後に表が上の硬貨が 3 枚である確率は

$${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

これと (4) の結果により $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{9}{64} = \dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{256}}$

(6) 1 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚で，かつ，3 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚である確率は

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{128}$$

1 回目の試行の後に表が上の硬貨が 4 枚で，かつ，3 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚である確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{27}{2048}$$

(5) と以上の結果により，求める確率は $\dfrac{\dfrac{9}{256}}{\dfrac{3}{128} + \dfrac{9}{256} + \dfrac{27}{2048}} = \dfrac{\mathbf{24}}{\mathbf{49}}$

別解 (3)，(5) より $\dfrac{9}{256} \div \dfrac{147}{2048} = \dfrac{24}{49}$