

平成 28 年度 九州工業大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

数 I · II · III · A · B (120 分)

情報工学部 平成 28 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4

1 座標平面上の曲線 $C: y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) と点 $P(s, t)$ ($s > 0, t > 0, st < 1$) を考える. また, $u = st$ とする. 点 P を通る曲線 C の 2 本の接線をそれぞれ l_1, l_2 とし, これらの接線と曲線 C との接点をそれぞれ $A\left(a, \frac{1}{a}\right), B\left(b, \frac{1}{b}\right)$ とする. ただし, $a < b$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) a, b を s, t を用いて表せ.
- (2) 2 点 $E(a, 0), F(b, 0)$ を考える. 台形 $ABFE$ の面積を u を用いて表せ.
- (3) $\triangle PAB$ の面積を u を用いて表せ.
- (4) (3) で求めた $\triangle PAB$ の面積を $S(u)$ とする. $S(u)$ は区間 $0 < u < 1$ で減少することを示せ.
- (5) 点 P が 2 点 $(3, 0), (0, 1)$ を結ぶ線分上の端点以外にあるものとする. このとき, $\triangle PAB$ の面積が最小となる点 P の座標を求めよ. また, そのときの面積を求めよ.

- 2 原点 O を中心とする半径 1 の円を C_1 とする. 円 C_1 に外接しながら, 半径 1 の円 C_2 がすべることなく回転する. 円 C_2 の中心を P とし, 円 C_2 上の点 Q は最初, x 軸上の点 $A(3, 0)$ にあるものとする. 半直線 PQ 上で点 P からの距離が 2 の点を R とし, OP が x 軸の正の向きとなす角を θ とする. C_2 が回転して θ が 0 から 2π まで変化するとき, 点 R が描く曲線を C とする. 曲線 C の概形を図 1 に示す. 以下の問いに答えよ.

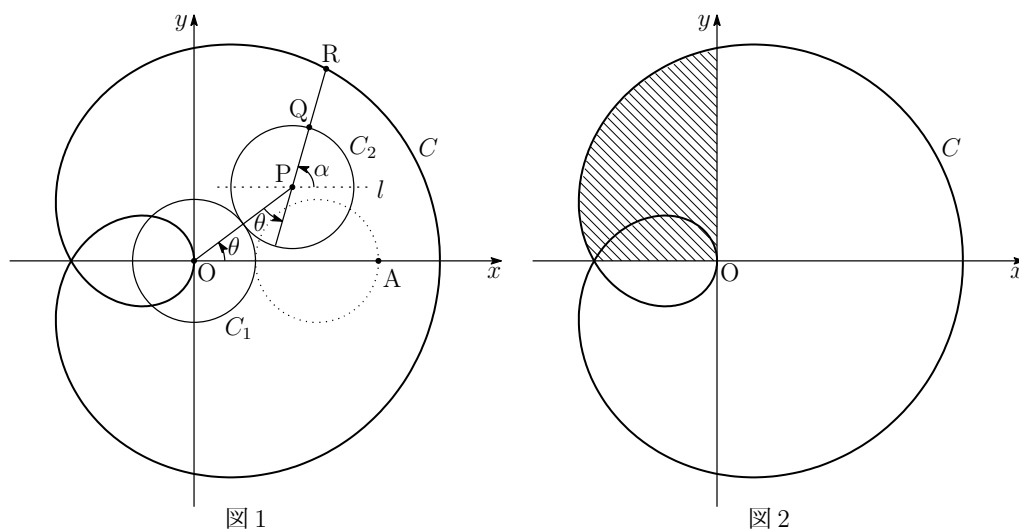


図 1

図 2

- (1) 点 P の座標を θ を用いて表せ.
- (2) 点 P を通り x 軸と平行な直線を l とする. 直線 l と線分 PR のなす角 α を, θ を用いて表せ. また, R の座標を θ を用いて表せ.
- (3) 曲線 C と x 軸の共有点の座標をすべて求めよ.
- (4) 曲線 C と y 軸の共有点の座標をすべて求めよ.
- (5) 点 R の x 座標が最小となるときの点 R の座標をすべて求めよ.
- (6) 曲線 C と x 軸, y 軸に囲まれた図 2 の斜線部分の面積を求めよ.

3 複素数 z_n を

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 1, \quad z_{n+2} = z_{n+1} + \alpha(z_{n+1} - z_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

により定める. ただし, i を虚数単位とし, $\alpha = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ とする. また, 複素平面上で複素数 z_n を表す点を P_n とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) z_2, z_3, z_4 を求めよ.
- (2) 点 P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 を図示せよ. また, 線分 $P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4$ の長さ, および $\angle P_2P_1P_0, \angle P_3P_2P_1, \angle P_4P_3P_2$ の値も図中に示せ.
- (3) $z_{n+1} - z_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を α と n を用いて表せ.
- (4) z_n の実部, 虚部をそれぞれ x_n, y_n とする. このとき, x_n, y_n をそれぞれ n を用いて表せ.
- (5) (4) で求めた x_n, y_n について, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ をそれぞれ求めよ.

4 はじめに, 4枚の硬貨 A, B, C, D が, 表が上の状態で置かれている. これらの硬貨に対して以下の試行を繰り返すものとする.

試行: 4枚の硬貨のうち, 裏が上の硬貨はそのままにし,
表が上の硬貨はすべて拾って同時に投げる.

ただし, すべての硬貨が, 裏が上の場合も, 0枚の硬貨を拾って投げるとみなして, 試行を繰り返すものとする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 硬貨 A が 3 回目の試行の後に表が上である確率を求めよ.
- (2) 3 回目の試行の後, 硬貨 A と B は表が上で, かつ, 硬貨 C と D は裏が上である確率を求めよ.
- (3) 3 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚である確率を求めよ.
- (4) 1 回目の試行の後に表が上の硬貨が 3 枚であった. このとき, 3 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚である確率を求めよ.
- (5) 1 回目の試行の後に表が上の硬貨が 3 枚で, かつ, 3 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚である確率を求めよ.
- (6) 3 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚であった. このとき, 1 回目の試行の後に表が上の硬貨が 3 枚である確率を求めよ.

解答例

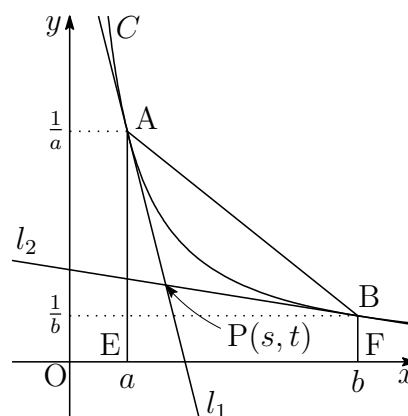
- 1 (1) $y = \frac{1}{x}$ を微分すると $y' = -\frac{1}{x^2}$
 $A\left(a, \frac{1}{a}\right)$ における接線 l_1 の方程式は

$$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a)$$

ゆえに $y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$

これが、 $P(s, t)$ を通るから

$$t = -\frac{1}{a^2}s + \frac{2}{a}$$



上式を a について、整理すると $ta^2 - 2a + s = 0$

$B\left(b, \frac{1}{b}\right)$ についても同様にして $tb^2 - 2b + s = 0$

上の2式から、 a, b は λ に関する2次方程式

$$t\lambda^2 - 2\lambda + s = 0 \quad \dots(*)$$

の解であるから ($a < b$), $t > 0$, $st < 1$ に注意して

$$a = \frac{1 - \sqrt{1 - st}}{t}, \quad b = \frac{1 + \sqrt{1 - st}}{t}$$

- (2) 方程式(*)の解と係数の関係および(1)の結果から

$$a + b = \frac{2}{t}, \quad ab = \frac{s}{t}, \quad b - a = \frac{2\sqrt{1 - st}}{t} \quad \dots(**)$$

台形 ABFE の面積は、上式により

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(AE + BF) \cdot EF &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) (b - a) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a + b}{ab} (b - a) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{t} \cdot \frac{t}{s} \cdot \frac{2\sqrt{1 - st}}{t} \\ &= \frac{2\sqrt{1 - st}}{st} = \frac{2\sqrt{1 - u}}{u} \end{aligned}$$

- (3) $\overrightarrow{PA} = \left(a - s, \frac{1}{a} - t\right)$, $\overrightarrow{PB} = \left(b - s, \frac{1}{b} - t\right)$ であるから ($a < b$),
 (**) および $u = st < 1$ により

$$\begin{aligned} \Delta PAB &= \frac{1}{2} \left| (a - s) \left(\frac{1}{b} - t\right) - (b - s) \left(\frac{1}{a} - t\right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| s \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + t(b - a) - \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right) \right| \\ &= \frac{1}{2} (b - a) \left| \frac{s}{ab} + t - \frac{a + b}{ab} \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{1 - st}}{t} \left| s \cdot \frac{t}{s} + t - \frac{2}{t} \cdot \frac{t}{s} \right| \\ &= 2\sqrt{1 - st} \left| 1 - \frac{1}{st} \right| = 2\sqrt{1 - u} \left| 1 - \frac{1}{u} \right| \\ &= 2\sqrt{1 - u} \cdot \frac{|u - 1|}{u} = \frac{2(1 - u)^{\frac{3}{2}}}{u} \end{aligned}$$

- (4) (3) の結果から $S(u) = \frac{2(1 - u)^{\frac{3}{2}}}{u}$
 これを微分すると $S'(u) = -\frac{(u + 2)\sqrt{1 - u}}{u^2}$

したがって, $0 < u < 1$ において $S'(u) < 0$
 よって, $S(u)$ は区間 $0 < u < 1$ で減少する.

- (5) 条件から, $P(s, t)$ について $\frac{s}{3} + t = 1$ ($0 < t < 1$)

すなわち $s = 3 - 3t$ ($0 < t < 1$)

$$\text{ゆえに } u = st = (3 - 3t)t = -3 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

したがって, u は, $s = \frac{3}{2}$, $t = \frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{3}{4}$ をとる.

- (3), (4) の結果から, $P\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ で ΔPAB は最小となり, 最小値は

$$S\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{3}$$

補足 $s > 0$, $t > 0$ であるから相加平均・相乗平均の関係により

$$1 = \frac{s}{3} + t \geq 2\sqrt{\frac{s}{3} \cdot t} = 2\sqrt{\frac{u}{3}} \quad \text{よって } u \leq \frac{3}{4}$$

等号が成立するのは $\frac{s}{3} = t$ すなわち $s = \frac{3}{2}$, $t = \frac{1}{2}$ ■

- 2** (1) $OP = 2$, OP と x 軸の正の向きとなす角が θ であるから

$$\mathbf{P}(2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$$

- (2) 線分 OP の P の延長と C_2 の交点を Q' とすると, 直線 l と PQ' のなす角は θ であり, $\angle Q'OQ = \theta$ であるから

$$\alpha = \theta + \angle Q'OQ = \theta + \theta = 2\theta$$

$$PR = 2 \text{ であるから } \overrightarrow{PR} = (2 \cos 2\theta, 2 \sin 2\theta)$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } \overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} \\ &= (2 \cos \theta, 2 \sin \theta) + (2 \cos 2\theta, 2 \sin 2\theta) \\ &= (2 \cos \theta + 2 \cos 2\theta, 2 \sin \theta + 2 \sin 2\theta) \end{aligned}$$

$$\text{よって } \mathbf{R}(2 \cos \theta + 2 \cos 2\theta, 2 \sin \theta + 2 \sin 2\theta)$$

- (3) $R(x, y)$ とすると, (2) の結果から

$$y = 2 \sin \theta + 2 \sin 2\theta = 4 \sin \frac{3\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ において, } y = 0 \text{ を解くと } \theta = 0, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi$$

これらの θ の値を順次, (2) の結果に代入すると

$$(4, 0), (-2, 0), (0, 0), (-2, 0), (4, 0)$$

よって, 求める x 軸との共有点の座標は

$$(4, 0), (-2, 0), (0, 0)$$

- (4) (3) と同様に, (2) の結果から

$$x = 2 \cos \theta + 2 \cos 2\theta = 4 \cos \frac{3\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ において, } x = 0 \text{ を解くと } \theta = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$$

よって, これらの θ の値を順次, (2) の結果に代入すると

$$(0, 2\sqrt{3}), (0, 0), (0, -2\sqrt{3})$$

(5) (2) の結果から

$$\begin{aligned} x &= 2 \cos \theta + 2 \cos 2\theta \\ &= 2 \cos \theta + 2(2 \cos^2 \theta - 1) \\ &= 4 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta - 2 \\ &= 4 \left(\cos \theta + \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{9}{4} \end{aligned}$$

点 R の x 座標が最小となるとき

$$\cos \theta = -\frac{1}{4}$$

このとき $\sin \theta = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\cos 2\theta = -\frac{7}{8}$, $\sin 2\theta = \mp \frac{\sqrt{15}}{8}$ (複号同順)

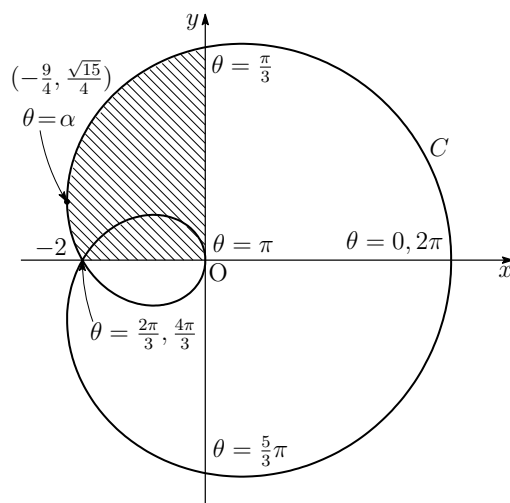
よって, 求める座標は $\left(-\frac{9}{4}, \pm \frac{\sqrt{15}}{4} \right)$

(6) よって, 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 y dx = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} y \frac{dx}{d\theta} d\theta \\ &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (2 \sin \theta + 2 \sin 2\theta)(2 \cos \theta + 2 \cos 2\theta)' d\theta \\ &= 4 \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin \theta + \sin 2\theta)(\sin \theta + 2 \sin 2\theta) d\theta \\ &= 4 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (\sin^2 \theta + 3 \sin \theta \sin 2\theta + 2 \sin^2 2\theta) d\theta \\ &= 4 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} + 3 \times \frac{\cos \theta - \cos 3\theta}{2} + 2 \times \frac{1 - \cos 4\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (6 + 6 \cos \theta - 2 \cos 2\theta - 6 \cos 3\theta - 4 \cos 4\theta) d\theta \\ &= \left[6\theta + 6 \sin \theta - \sin 2\theta - 2 \sin 3\theta - \sin 4\theta \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = 2\pi \end{aligned}$$

補足 $S = \int_{-\frac{9}{4}}^0 y dx - \int_{-\frac{9}{4}}^{-2} y dx = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{3}} y \frac{dx}{d\theta} d\theta - \int_{\alpha}^{\frac{2\pi}{3}} y \frac{dx}{d\theta} d\theta = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} y \frac{dx}{d\theta} d\theta$

類題 長崎大学 (2009 年 [7])¹



¹http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki_2009.pdf

3 (1) 与えられた漸化式より

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \alpha(z_{n+1} - z_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad \dots (*)$$

であるから

$$z_2 - z_1 = \alpha(z_1 - z_0) = \alpha = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \quad \dots \textcircled{1}$$

$$z_3 - z_2 = \alpha(z_2 - z_1) = \alpha^2 = \frac{1}{4} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}i$$

$$z_4 - z_3 = \alpha(z_3 - z_2) = \alpha^3 = \frac{1}{8} (\cos \pi + i \sin \pi) = -\frac{1}{8}$$

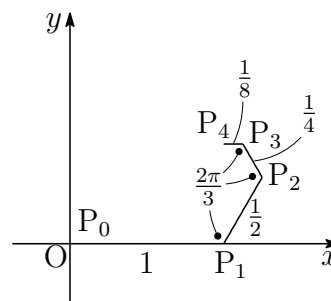
上の第1式と第2式, および上の3式の辺々を加えると

$$z_3 - z_1 = \frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i, \quad z_4 - z_1 = \frac{3\sqrt{3}}{8}i$$

$z_1 = 1$ であるから, ①および上の2式から

$$z_2 = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i, \quad z_3 = \frac{9}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i, \quad z_4 = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{8}i$$

(2) α は大きさが $\frac{1}{2}$, 偏角が $\frac{\pi}{3}$ であるから, (*) より, $P_{n+1}P_{n+2}$ は P_nP_{n+1} を $\frac{1}{2}$ に縮小し, $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させたものである. $P_0(0)$, $P_1(1)$ であるから, P_2, P_3, P_4 を複素数平面上にとると, 右の図のようになる.



(3) $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, および(*)より

$$z_{n+1} - z_n = \alpha^n(z_1 - z_0) = \alpha^n$$

(4) (3)の結果から, $n \geq 1$ のとき

$$\sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k \quad \text{ゆえに} \quad z_n = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} \quad \dots (**)$$

(**) は $n = 0$ についても成り立つ. ここで

$$\begin{aligned} \alpha^n &= \frac{1}{2^n} \left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} \right) \\ \alpha - 1 &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) - 1 = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{\frac{1}{2^n} \left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} \right) - 1}{\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right)} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}} \left(\cos \frac{2n-5}{6}\pi + i \sin \frac{2n-5}{6}\pi \right) \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\cos \frac{5}{6}\pi - i \sin \frac{5}{6}\pi \right) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}} \left(\cos \frac{2n-5}{6}\pi + i \sin \frac{2n-5}{6}\pi \right) + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i \\ &= \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}} \cos \frac{2n-5}{6}\pi + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2^{n-1}} \sin \frac{2n-5}{6}\pi + 1 \right) i \end{aligned}$$

$z_n = x_n + y_n i$ であるから

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}} \cos \frac{2n-5}{6}\pi + 1 \\ y_n &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2^{n-1}} \sin \frac{2n-5}{6}\pi + 1 \right) \end{aligned}$$

(5) (4)の結果から $|x_n - 1| \leq \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}, \quad \left| y_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \right| \leq \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}} = 0$ であるから, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

■

4 (1) 硬貨 A が 3 回続けて表が上の確率であるから $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

(2) それぞれの硬貨は 3 回目の試行の後、表が上である確率が $\frac{1}{8}$ であるから、それぞれの硬貨が 3 回目の試行の後、裏である確率は

$$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

よって、求める確率は $\left(\frac{1}{8}\right)^2 \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{4096}$

(3) 3 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚の場合の総数は ${}_4C_2$ (通り)

よって、(2) の結果により ${}_4C_2 \left(\frac{1}{8}\right)^2 \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{147}{2048}$

(4) 1 枚の硬貨が 2 回連続して表が上である確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

3 枚の硬貨について、2 枚が 2 回連続して表が上で、残りの 1 枚が裏が上の確率であるから

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{64}$$

(5) 1 回目の試行の後に表が上の硬貨が 3 枚である確率は

$${}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

これと (4) の結果により $\frac{1}{4} \times \frac{9}{64} = \frac{9}{256}$

(6) 1 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚で、かつ、3 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚である確率は

$${}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{128}$$

1 回目の試行の後に表が上の硬貨が 4 枚で、かつ、3 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚である確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{27}{2048}$$

(5) と以上の結果により、求める確率は $\frac{\frac{9}{256}}{\frac{3}{128} + \frac{9}{256} + \frac{27}{2048}} = \frac{24}{49}$

別解 (3), (5) より $\frac{9}{256} \div \frac{147}{2048} = \frac{24}{49}$

