

平成 27 年度 九州工業大学 2 次試験後期日程 (数学問題)

情報工学部 平成 27 年 3 月 12 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

1 座標平面上で原点 O と点 $A(0, 2)$ を結ぶ線分 OA を直径とする円を C とし、点 A から円 C の円周上を時計まわりに動く点 P を考える。ただし、 $\angle AOP = \theta$ とし、 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。直線 OP と直線 $y = 2$ の交点を Q とする。さらに、点 Q を通り y 軸に平行な直線と、点 P を通り x 軸に平行な直線の交点を R とする。このとき、点 R の軌跡について以下の問いに答えよ。

- (1) 点 R の座標を θ を用いて表せ。
- (2) $t = \tan \theta$ とおいて、点 R の座標を t を用いて表せ。
- (3) (2) で求めた点 R の座標から変数 t を消去し、点 R の軌跡の方程式 $y = f(x)$ を求めよ。
- (4) (3) で求めた曲線 $y = f(x)$ の変曲点を求めよ。
- (5) x 軸、 y 軸、(3) で求めた曲線 $y = f(x)$ 、および (4) で求めた変曲点を通り y 軸に平行な直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

2 a, b を実数とし、座標平面上の点 $A(a, b)$ および放物線 $C: y = x^2$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 放物線 C 上の点 $P(t, t^2)$ における法線が点 A を通るための条件を a, b, t を用いて表せ。
- (2) p, q を実数とする。3 次方程式 $x^3 - 3px + q = 0$ がちょうど 2 つの異なる実数解をもつための条件を p, q を用いて表せ。
- (3) 点 A が放物線 C 上にある場合を考える。放物線 C の法線で点 A を通るものがちょうど 2 本存在するような点 A があれば、すべて求めよ。

3 実数 c と自然対数の底 e に対して，関数 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x), \dots$ を

$$f_1(x) = (x^2 - 2cx + 5c)e^x \quad f_{n+1}(x) = f'_n(x)$$

と定める．さらに，数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を次の式で定める．

$$f_n(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

以下の問いに答えよ．

- (1) a_{n+1} を a_n を用いて表し， b_{n+1} を a_n, b_n を用いて表せ．
- (2) a_n と b_n をそれぞれ n, c を用いて表せ．
- (3) p, q を実数とする．曲線 $y = (x^2 + px + q)e^x$ が変曲点をもつための条件を p, q を用いて表せ．
- (4) c の値によらず曲線 $y = f_n(x)$ が変曲点をもつような最小の n を求めよ．

4 自然数 n に対して， n 個の 1 と n 個の -1 を $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n})$ と 1 列に並べるときの並べ方を考え， a_1 から a_k ($k \leq 2n$) までの和を $S(k)$ ，すなわち

$$S(k) = \sum_{i=1}^k a_i \text{ とするとき，次の条件 } (*) \text{ を定める．}$$

(*) すべての k ($k = 1, 2, 3, \dots, 2n$) に対して $S(k) \geq 0$ である．

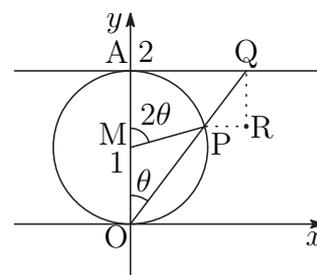
条件 (*) をみたす並べ方の総数を $f(n)$ とする．たとえば， $n = 1$ のとき，条件 (*) をみたす並べ方は $(1, -1)$ のみであるので， $f(1) = 1$ である．以下の問いに答えよ．

- (1) $f(2)$ を求めよ．
- (2) $n = 3$ のとき，条件 (*) をみたす並べ方のうち $S(k) = 0$ が成立する最小の k が 2 となる並べ方をすべて求め，さらに $f(3)$ を求めよ．
- (3) 条件 (*) をみたす並べ方のうち $S(k) = 0$ が成立する最小の k が $2n$ となる並べ方の総数を $g(n)$ とする．このとき， $g(4)$ と $g(5)$ を求めよ．
- (4) $f(6)$ を求めよ．

正解

1 (1) $M(0, 1)$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP} &= (\sin 2\theta, \cos 2\theta), \\ \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = (0, 1) + (\sin 2\theta, \cos 2\theta) \\ &= (\sin 2\theta, 1 + \cos 2\theta), \\ \overrightarrow{OQ} &= (2 \tan \theta, 2)\end{aligned}$$



Q の x 座標, P の y 座標がそれぞれ R の x 座標, y 座標であるから

$$\mathbf{R}(2 \tan \theta, 1 + \cos 2\theta)$$

$$(2) \cos 2\theta = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \text{ より}$$

$$1 + \cos 2\theta = 1 + \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{2}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ より, } t = \tan \theta \text{ とおくと } (t \geq 0) \quad \mathbf{R} \left(2t, \frac{2}{1 + t^2} \right)$$

$$(3) t \geq 0 \text{ より, } x = 2t, y = \frac{2}{1 + t^2} \text{ とおくと } (x \geq 0), t = \frac{x}{2} \text{ より}$$

$$y = \frac{2}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{8}{x^2 + 4}$$

$$\text{よって, 求める軌跡の方程式は } \mathbf{y = \frac{8}{x^2 + 4} \quad (x \geq 0)}$$

(4) (3) の結果から, $y = 8(x^2 + 4)^{-1}$ を微分すると

$$\begin{aligned}y' &= -8(x^2 + 4)^{-2} \cdot 2x = -16x(x^2 + 4)^{-2}, \\ y'' &= -16\{(x^2 + 4)^{-2} + x \cdot (-2)(x^2 + 4)^{-3} \cdot 2x\} \\ &= -16(x^2 + 4)^{-3}\{(x^2 + 4) - 4x^2\} = 16(3x^2 - 4)(x^2 + 4)^{-3}\end{aligned}$$

したがって, $0 < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$ のとき $y'' < 0$, $\frac{2}{\sqrt{3}} < x$ のとき $y'' > 0$

よって, 変曲点は $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2} \right)$

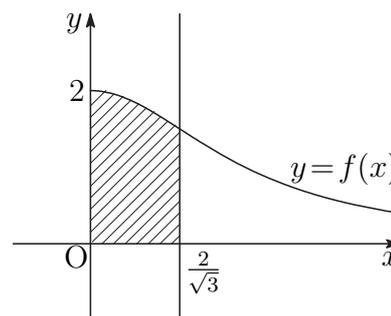
注意 $y' = 0$ は極値をとる点であるための必要条件であるように(前後で y' の符号が変化しなければならない), $y'' = 0$ は変曲点であるための必要条件である. 変曲点ではその前後で y'' の符号が変化しなければならない.

(5) $x = 2t$, $t = \tan \theta$ より, $x = 2 \tan \theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{2}{\cos^2 \theta} \quad \begin{array}{|l|l|} \hline x & 0 \longrightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \hline \theta & 0 \longrightarrow \frac{\pi}{6} \\ \hline \end{array}$$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{8}{x^2 + 4} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{8}{4 \tan^2 \theta + 4} \cdot \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = \frac{2}{3} \pi \end{aligned}$$



2 (1) $y = x^2$ を微分すると $y' = 2x$

C 上の点 $P(t, t^2)$ における接ベクトルを $\vec{v} = (1, 2t)$, 法線上の任意の点を $Q(x, y)$ とおく. $\vec{v} \cdot \vec{PQ} = 0$ より, 法線の方程式は

$$1(x - t) + 2t(y - t^2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x + 2ty - 2t^3 - t = 0$$

この法線上に $A(a, b)$ があるから $a + 2tb - 2t^3 - t = 0$

(2) $f(x) = x^3 - 3px + q = 0$ とおくと, 3次方程式 $f(x) = 0$ がちょうど2つの異なる実数解をもつことと3次関数 $y = f(x)$ の極値が0であることは同値である.

$$f'(x) = 3x^2 - 3p = 3(x^2 - p)$$

$f'(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもつから, $p > 0$ に注意して

$$f(\pm\sqrt{p}) = \mp 2p\sqrt{p} + q = 0 \quad \text{よって} \quad q^2 = 4p^3 \quad (p > 0)$$

(3) (1) の結果から $t^3 - \left(b - \frac{1}{2}\right)t - \frac{1}{2}a = 0$

この t に関する3次方程式が異なる2つの実数解をもつから

$$3p = b - \frac{1}{2}, \quad q = -\frac{1}{2}a$$

とおくと, (2) の結果から

$$\left(-\frac{1}{2}a\right)^2 = 4\left(\frac{2b-1}{6}\right)^3 \quad \left(b > \frac{1}{2}\right)$$

A は C 上にあるから, $b = a^2 \dots$ ① より

$$\frac{1}{4}a^2 = 4\left(\frac{2a^2-1}{6}\right)^3 \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{2a^2-1}{3}\right)^3 - \frac{a^2}{2} = 0$$

ここで, $u = \frac{2b-1}{3} \dots \textcircled{2}$ とおくと ($u > 0$)

$$u^3 - \frac{3u+1}{4} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (u-1)(2u+1)^2 = 0$$

$u > 0$ より $u = 1$ ①, ② より 点 A の座標は $(\pm\sqrt{2}, 2)$

3 (1) $f_n(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= (2x + a_n)e^x + (x^2 + a_n x + b_n)e^x \\ &= \{x^2 + (a_n + 2)x + a_n + b_n\}e^x \end{aligned}$$

$f_{n+1}(x) = f'_n(x)$ であるから $a_{n+1} = a_n + 2, b_{n+1} = a_n + b_n$

(2) $f_1(x) = (x^2 - 2cx + 5c)e^x$ より $a_1 = -2c, b_1 = 5c$

(1) の結果から, $\{a_n\}$ は初項 $-2c$, 公差 2 の等差数列であるから

$$a_n = -2c + (n-1) \cdot 2 = 2n - 2c - 2$$

また, $b_{n+1} - b_n = 2n - 2(c+1)$ であるから, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \{2k - 2(c+1)\} \\ &= 5c + n(n-1) - 2(c+1)(n-1) \\ &= n^2 - (2c+3)n + 7c + 2 \end{aligned}$$

これは, $n = 1$ のときも成立するから $b_n = n^2 - (2c+3)n + 7c + 2$

別解 ライプニッツの公式を $f_1(x) = (x^2 - 2cx + 5c)e^x$ に適用すると ($n \geq 3$)

$$\begin{aligned} f_n(x) &= f_1^{(n-1)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k (x^2 - 2cx + 5c)^{(n-1-k)} (e^x)^{(k)} \\ &= {}_{n-1}C_{n-3} (x^2 - 2cx + 5c)'' (e^x)^{(n-3)} \\ &\quad + {}_{n-1}C_{n-2} (x^2 - 2cx + 5c)' (e^x)^{(n-2)} \\ &\quad + {}_{n-1}C_{n-1} (x^2 - 2cx + 5c) (e^x)^{(n-1)} \\ &= (n-1)(n-2)e^x + (n-1)(2x-2c)e^x + (x^2 - 2cx + 5c)e^x \\ &= \{x^2 + (2n-2c-2)x + n^2 - (2c+3)n + 7c + 2\}e^x \end{aligned}$$

$f_2(x) = f'_1(x) = \{x^2 + (2-2c)x + 3c\}e^x$ より, 上式は, $n = 1, 2$ のときも成立するから $a_n = 2n - 2c - 2, b_n = n^2 - (2c+3)n + 7c + 2$

(3) $y = (x^2 + px + q)e^x$ より

$$\begin{aligned} y' &= (2x + p)e^x + (x^2 + px + q)e^x = \{x^2 + (p + 2)x + (p + q)\}e^x, \\ y'' &= \{2x + (p + 2)\}e^x + \{x^2 + (p + 2)x + (p + q)\}e^x \\ &= \{x^2 + (p + 4)x + (2p + q + 2)\}e^x \end{aligned}$$

変曲点をもつための条件は、2次方程式 $x^2 + (p + 4)x + (2p + q + 2) = 0$ が異なる2つの実数解をもつことであるから、係数について

$$(p + 4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2p + q + 2) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad 4q < p^2 + 8$$

補足 ライブニッツの公式を $y = (x^2 + px + q)e^x$ に適用すると

$$\begin{aligned} y'' &= (x^2 + px + q)''e^x + 2(x^2 + px + q)'(e^x)' + (x^2 + px + q)(e^x)'' \\ &= 2e^x + 2(2x + p)e^x + (x^2 + px + q)e^x \\ &= \{x^2 + (p + 4)x + (2p + q + 2)\}e^x \end{aligned}$$

$y'' = 0$ は変曲点であるための必要条件であり、変曲点であるためには、その前後で y'' の符号が変化しなければならない。したがって、2次方程式

$$x^2 + (p + 4)x + (2p + q + 2) = 0$$

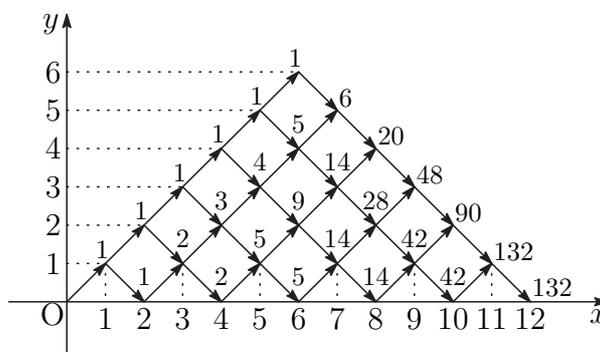
は、異なる2つの実数解をもたなければならない。実数解であっても、重解であれば、その前後で $y'' > 0$ となり、不適。

(4) $y = f_n(x)$ が変曲点をもつとき、(3)の結果から $4b_n < a_n^2 + 8$ これに(2)の結果を代入すると

$$\begin{aligned} 4\{n^2 - (2c + 3)n + 7c + 2\} &< (2n - 2c - 2)^2 + 8 \\ n^2 - (2c + 3)n + 7c &< (n - c - 1)^2 \\ c^2 - 5c + n + 1 &> 0 \\ \left(c - \frac{5}{2}\right)^2 + n - \frac{21}{4} &> 0 \end{aligned}$$

任意の c に対して、これを満たす最小の自然数 n は $n = 6$

- 4 (1) n 個の 1 と n 個の -1 の並びに対して、座標平面上を原点から点 $(2n, 0)$ まで、最も近い格子点上をそれぞれ右斜め 45° 、右斜め -45° の方向に移動する折れ線グラフを考える。



条件(*)にしたがって、 x 軸より下側に移動することなく、上の図のように、 $f(2)$ は原点から点 $(4, 0)$ まで移動する折れ線グラフの総数であるから

$$f(2) = 2$$

- (2) 求める並べ方に相当する折れ線グラフは、原点 \rightarrow 点 $(2, 2) \rightarrow$ 点 $(4, 0) \rightarrow$ 点 $(6, 0)$ を通るものであるから

$$(1, 1, -1, -1, 1, -1)$$

また、 $f(3)$ は原点から点 $(6, 0)$ までの折れ線グラフの総数であるから

$$f(3) = 5$$

- (3) $g(4)$ は原点から点 $(8, 0)$ までの折れ線グラフで、点 $(2, 0)$ 、 $(4, 0)$ 、 $(6, 0)$ を通らないものの総数である。したがって、点 $(1, 1)$ から点 $(7, 1)$ までの折れ線グラフで x 軸を通らないものであるから

$$g(4) = f(3) = 5$$

同様に、 $g(5)$ は原点から点 $(10, 0)$ までの折れ線グラフで、点 $(2, 0)$ 、 $(4, 0)$ 、 $(6, 0)$ 、 $(8, 0)$ を通らないものの総数である。したがって、点 $(1, 1)$ から点 $(9, 1)$ までの折れ線グラフで x 軸を通らないものであるから

$$g(5) = f(4) = 14$$

- (4) (1) と同様に、 $f(6)$ は原点から点 $(12, 0)$ まで移動する折れ線グラフの総数であるから

$$f(6) = 132$$