平成 27 年度　九州工業大学２次試験後期日程 (数学問題)
数 I・II・III・A・B (120 分)
情報工学部　平成 27 年 3 月 12 日

問題 1 2 3 4

1 座標平面上で原点 O と点 A(0, 2) を結ぶ線分 OA を直径とする円を C とし，点 A から円 C の円周上を時計まわりに動く点 P を考える．ただし，$\angle\mathrm{AOP} = \theta$ とし，$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．直線 OP と直線 $y = 2$ の交点を Q とする．さらに，点 Q を通り y 軸に平行な直線と，点 P を通り x 軸に平行な直線の交点を R とする．このとき，点 R の軌跡について以下の問いに答えよ．

(1) 点 R の座標を θ を用いて表せ．

(2) $t = \tan\theta$ とおいて，点 R の座標を t を用いて表せ．

(3) (2) で求めた点 R の座標から変数 t を消去し，点 R の軌跡の方程式 $y = f(x)$ を求めよ．

(4) (3) で求めた曲線 $y = f(x)$ の変曲点を求めよ．

(5) x 軸，y 軸，(3) で求めた曲線 $y = f(x)$，および (4) で求めた変曲点を通り y 軸に平行な直線で囲まれた部分の面積を求めよ．

2 a，b を実数とし，座標平面上の点 A$(a,\ b)$ および放物線 $C : y = x^2$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 放物線 C 上の点 P$(t,\ t^2)$ における法線が点 A を通るための条件を a，b，t を用いて表せ．

(2) p，q を実数とする．3 次方程式 $x^3 - 3px + q = 0$ がちょうど 2 つの異なる実数解をもつための条件を p，q を用いて表せ．

(3) 点 A が放物線 C 上にある場合を考える．放物線 C の法線で点 A を通るものがちょうど 2 本存在するような点 A があれば，すべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 実数 c と自然対数の底 e に対して，関数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ を

$$f_1(x) = (x^2 - 2cx + 5c)e^x \quad f_{n+1}(x) = f_n'(x)$$

と定める．さらに，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を次の式で定める．

$$f_n(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

以下の問いに答えよ．

(1) a_{n+1} を a_n を用いて表し，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ．

(2) a_n と b_n をそれぞれ n，c を用いて表せ．

(3) p，q を実数とする．曲線 $y = (x^2 + px + q)e^x$ が変曲点をもつための条件を p，q を用いて表せ．

(4) c の値によらず曲線 $y = f_n(x)$ が変曲点をもつような最小の n を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 自然数 n に対して，n 個の 1 と n 個の -1 を $(a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots, a_{2n})$ と 1 列に並べるときの並べ方を考え，a_1 から a_k $(k \leqq 2n)$ までの和を $S(k)$，すなわち $S(k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i$ とするとき，次の条件 $(*)$ を定める．

$(*)$　すべての k $(k = 1, 2, 3, \cdots,\ 2n)$ に対して $S(k) \geqq 0$ である．

条件 $(*)$ をみたす並べ方の総数を $f(n)$ とする．たとえば，$n = 1$ のとき，条件 $(*)$ をみたす並べ方は $(1, -1)$ のみであるので，$f(1) = 1$ である．以下の問いに答えよ．

(1) $f(2)$ を求めよ．

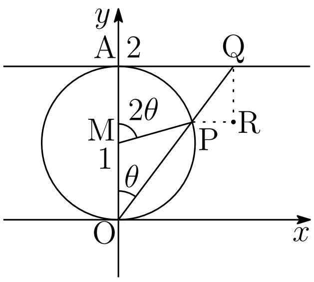
(2) $n = 3$ のとき，条件 $(*)$ をみたす並べ方のうち $S(k) = 0$ が成立する最小の k が 2 となる並べ方をすべて求め，さらに $f(3)$ を求めよ．

(3) 条件 $(*)$ をみたす並べ方のうち $S(k) = 0$ が成立する最小の k が $2n$ となる並べ方の総数を $g(n)$ とする．このとき，$g(4)$ と $g(5)$ を求めよ．

(4) $f(6)$ を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) M(0, 1) とおくと



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{MP}} &= (\sin 2\theta,\ \cos 2\theta),\\
\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{MP}} = (0,\ 1) + (\sin 2\theta,\ \cos 2\theta)\\
&= (\sin 2\theta,\ 1 + \cos 2\theta),\\
\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= (2\tan\theta,\ 2)
\end{aligned}
$$

Q の x 座標，P の y 座標がそれぞれ R の x 座標，y 座標であるから

$$\mathbf{R}(\mathbf{2}\tan\boldsymbol{\theta},\ \mathbf{1} + \cos \mathbf{2}\boldsymbol{\theta})$$

(2) $\cos 2\theta = \dfrac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \dfrac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta}$ より

$$1 + \cos 2\theta = 1 + \frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta} = \frac{2}{1 + \tan^2\theta}$$

$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より，$t = \tan\theta$ とおくと $(t \geqq 0)$　　$\mathbf{R}\left(\mathbf{2}\boldsymbol{t},\ \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}}\right)$

(3) $t \geqq 0$ より，$x = 2t,\ y = \dfrac{2}{1 + t^2}$ とおくと $(x \geqq 0)$，$t = \dfrac{x}{2}$ より

$$y = \frac{2}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{8}{x^2 + 4}$$

よって，求める軌跡の方程式は　$\boldsymbol{y = \dfrac{8}{x^2 + 4}}$　$(\boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0})$

(4) (3) の結果から，$y = 8(x^2 + 4)^{-1}$ を微分すると

$$
\begin{aligned}
y' &= -8(x^2 + 4)^{-2}\cdot 2x = -16x(x^2 + 4)^{-2},\\
y'' &= -16\{(x^2 + 4)^{-2} + x\cdot(-2)(x^2 + 4)^{-3}\cdot 2x\}\\
&= -16(x^2 + 4)^{-3}\{(x^2 + 4) - 4x^2\} = 16(3x^2 - 4)(x^2 + 4)^{-3}
\end{aligned}
$$

したがって，$0 < x < \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ のとき $y'' < 0$，$\dfrac{2}{\sqrt{3}} < x$ のとき $y'' > 0$

よって，変曲点は　$\left(\dfrac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{3}}},\ \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)$

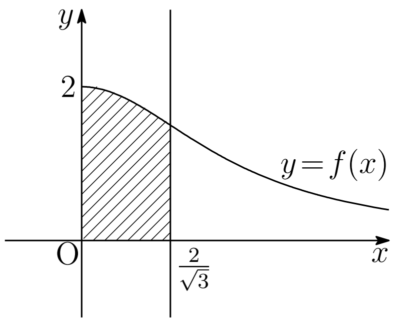
注意 $y' = 0$ は極値をとる点であるための必要条件であるように (前後で y' の符号が変化しなければならない)，$y'' = 0$ は変曲点であるための必要条件である．変曲点ではその前後で y'' の符号が変化しなければならない．

(5) $x=2t$，$t=\tan\theta$ より，$x=2\tan\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{2}{\cos^2\theta}$$

x	$0 \longrightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{6}$

求める面積を S とすると



$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{8}{x^2+4}dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{8}{4\tan^2\theta+4}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi} \end{aligned}$$

■

2 (1) $y=x^2$ を微分すると　　$y'=2x$

C 上の点 $\mathrm{P}(t,t^2)$ における接ベクトルを $\vec{v}=(1,\ 2t)$，法線上の任意の点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおく．$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$ より，法線の方程式は

$$1(x-t)+2t(y-t^2)=0 \quad \text{ゆえに} \quad x+2ty-2t^3-t=0$$

この法線上に $\mathrm{A}(a,\ b)$ があるから　　$\boldsymbol{a+2tb-2t^3-t=0}$

(2) $f(x)=x^3-3px+q=0$ とおくと，3 次方程式 $f(x)=0$ がちょうど 2 つの異なる実数解をもつことと 3 次関数 $y=f(x)$ の極値が 0 であることは同値である．

$$f'(x)=3x^2-3p=3(x^2-p)$$

$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつから，$p>0$ に注意して

$$f(\pm\sqrt{p})=\mp 2p\sqrt{p}+q=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{q^2=4p^3\ \ (p>0)}$$

(3) (1) の結果から　　$t^3-\left(b-\dfrac{1}{2}\right)t-\dfrac{1}{2}a=0$

この t に関する 3 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつから

$$3p=b-\frac{1}{2},\quad q=-\frac{1}{2}a$$

とおくと，(2) の結果から

$$\left(-\frac{1}{2}a\right)^2=4\left(\frac{2b-1}{6}\right)^3 \quad \left(b>\frac{1}{2}\right)$$

A は C 上にあるから，$b=a^2\cdots$① より

$$\frac{1}{4}b=4\left(\frac{2b-1}{6}\right)^3 \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{2b-1}{3}\right)^3-\frac{b}{2}=0$$

ここで，$u=\dfrac{2b-1}{3}\cdots$② とおくと $(u>0)$

$$u^3-\frac{3u+1}{4}=0 \quad \text{ゆえに} \quad (u-1)(2u+1)^2=0$$

$u>0$ より　$u=1$　①，② より　点 A の座標は　$(\pm\sqrt{2},\ 2)$ ■

3 (1) $f_n(x)=(x^2+a_nx+b_n)e^x$ を微分すると

$$\begin{aligned}f_n'(x)&=(2x+a_n)e^x+(x^2+a_nx+b_n)e^x\\&=\{x^2+(a_n+2)x+a_n+b_n\}e^x\end{aligned}$$

$f_{n+1}(x)=f_n'(x)$ であるから　$\boldsymbol{a_{n+1}=a_n+2,\quad b_{n+1}=a_n+b_n}$

(2) $f_1(x)=(x^2-2cx+5c)e^x$ より　$a_1=-2c,\ b_1=5c$

(1) の結果から，$\{a_n\}$ は初項 $-2c$，公差 2 の等差数列であるから

$$a_n=-2c+(n-1)\cdot 2=\boldsymbol{2n-2c-2}$$

また，$b_{n+1}-b_n=2n-2(c+1)$ であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}b_n&=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\{2k-2(c+1)\}\\&=5c+n(n-1)-2(c+1)(n-1)\\&=n^2-(2c+3)n+7c+2\end{aligned}$$

これは，$n=1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{b_n=n^2-(2c+3)n+7c+2}$

別解　ライプニッツの公式を $f_1(x)=(x^2-2cx+5c)e^x$ に適用すると $(n\geqq 3)$

$$\begin{aligned}f_n(x)=f_1^{(n-1)}(x)&=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_k(x^2-2cx+5c)^{(n-1-k)}(e^x)^{(k)}\\&={}_{n-1}\mathrm{C}_{n-3}(x^2-2cx+5c)''(e^x)^{(n-3)}\\&\qquad+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-2}(x^2-2cx+5c)'(e^x)^{(n-2)}\\&\qquad\qquad+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}(x^2-2cx+5c)(e^x)^{(n-1)}\\&=(n-1)(n-2)e^x+(n-1)(2x-2c)e^x+(x^2-2cx+5c)e^x\\&=\{x^2+(2n-2c-2)x+n^2-(2c+3)n+7c+2\}e^x\end{aligned}$$

$f_2(x)=f_1'(x)=\{x^2+(2-2c)x+3c\}e^x$ より，上式は，$n=1,\ 2$ のときも成立するから　$\boldsymbol{a_n=2n-2c-2,\ b_n=n^2-(2c+3)n+7c+2}$

(3) $y=(x^2+px+q)e^x$ より

$$
\begin{aligned}
y' &= (2x+p)e^x+(x^2+px+q)e^x=\{x^2+(p+2)x+(p+q)\}e^x,\\
y'' &= \{2x+(p+2)\}e^x+\{x^2+(p+2)x+(p+q)\}e^x\\
&= \{x^2+(p+4)x+(2p+q+2)\}e^x
\end{aligned}
$$

変曲点をもつための条件は，2 次方程式 $x^2+(p+4)x+(2p+q+2)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことであるから，係数について

$$(p+4)^2-4\cdot 1\cdot(2p+q+2)>0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{4q<p^2+8}$$

補足 ライプニッツの公式を $y=(x^2+px+q)e^x$ に適用すると

$$
\begin{aligned}
y'' &= (x^2+px+q)''e^x+2(x^2+px+q)'(e^x)'+(x^2+px+q)(e^x)''\\
&= 2e^x+2(2x+p)e^x+(x^2+px+q)e^x\\
&= \{x^2+(p+4)x+(2p+q+2)\}e^x
\end{aligned}
$$

$y''=0$ は変曲点であるための必要条件であり，変曲点であるためには，その前後で y'' の符号が変化しなければならない．したがって，2 次方程式

$$x^2+(p+4)x+(2p+q+2)=0$$

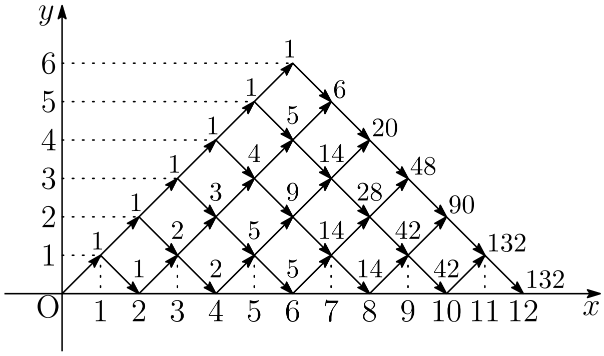
は，異なる 2 つの実数解をもたなければならない．実数解であっても，重解であれば，その前後で $y''>0$ となり，不適．

(4) $y=f_n(x)$ が変曲点をもつとき，(3) の結果から　$4b_n<{a_n}^2+8$
これに (2) の結果を代入すると

$$
\begin{gathered}
4\{n^2-(2c+3)n+7c+2\}<(2n-2c-2)^2+8\\
n^2-(2c+3)n+7c<(n-c-1)^2\\
c^2-5c+n+1>0\\
\left(c-\frac{5}{2}\right)^2+n-\frac{21}{4}>0
\end{gathered}
$$

任意の c に対して，これを満たす最小の自然数 n は　$\boldsymbol{n=6}$ ■

4 (1) n 個の 1 と n 個の -1 の並びに対して，座標平面上を原点から点 $(2n,\ 0)$ まで，最も近い格子点上をそれぞれ右斜め 45°，右斜め -45° の方向に移動する折れ線グラフを考える．



条件 $(*)$ にしたがって，x 軸より下側に移動することなく，上の図のように，$f(2)$ は原点から点 $(4,\ 0)$ まで移動する折れ線グラフの総数であるから

$$\boldsymbol{f(2) = 2}$$

(2) 求める並べ方に相当する折れ線グラフは，原点 $\to$ 点 $(2,\ 2)$ $\to$ 点 $(4,\ 0)$ $\to$ $(6,\ 0)$ を通るものであるから

$$\boldsymbol{(1,\ 1, -1, -1,\ 1, -1)}$$

また，$f(3)$ は原点から点 $(6,\ 0)$ までの折れ線グラフの総数であるから

$$\boldsymbol{f(3) = 5}$$

(3) $g(4)$ は原点から点 $(8,\ 0)$ までの折れ線グラフで，点 $(2,\ 0)$，$(4,\ 0)$，$(6,\ 0)$ を通らないものの総数である．したがって，点 $(1,\ 1)$ から点 $(7,\ 1)$ までの折れ線グラフで x 軸を通らないものであるから

$$g(4) = f(3) = \mathbf{5}$$

同様に，$g(5)$ は原点から点 $(10,\ 0)$ までの折れ線グラフで，点 $(2,\ 0)$，$(4,\ 0)$，$(6,\ 0)$，$(8,\ 0)$ を通らないものの総数である．したがって，点 $(1,\ 1)$ から点 $(9,\ 1)$ までの折れ線グラフで x 軸を通らないものであるから

$$g(5) = f(4) = \mathbf{14}$$

(4) (1) と同様に，$f(6)$ は原点から点 $(12,\ 0)$ まで移動する折れ線グラフの総数であるから

$$\boldsymbol{f(6) = 132}$$

■