平成 27 年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
情報工学部　平成 27 年 2 月 25 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

1 関数 $f(x) = e^{-x}\cos\sqrt{3}\,x$ について以下の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ の範囲で $f(x) = 0$ をみたす x の値をすべて求めよ．

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ の範囲で $f(x)$ の増減を調べよ．ただし，凹凸は調べなくてよい．

(3) 部分積分を 2 回用いて $f(x)$ の不定積分を求めよ．

(4) $0 \leqq x \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ の範囲で 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = e^{-x}$ によって囲まれた部分の面積を求めよ．

2 座標平面上に原点を中心とする半径 1 の円 $C : x^2 + y^2 = 1$ と点 $\mathrm{A}(-1, -1)$, $\mathrm{B}(0, -1)$ があり，点 A を通る傾き k の直線 ℓ を考える．直線 ℓ は円 C と異なる 2 点で交わるものとし，点 A から遠い方の交点を P，近い方の交点を Q とする．以下の問いに答えよ．

(1) 直線 ℓ の方程式を k を用いて表せ．

(2) 点 P，Q の座標をそれぞれ k を用いて表せ．

(3) 三角形 BPQ の面積を k を用いて表せ．

(4) 三角形 BPQ の面積を最大にする k を求めよ．

3 n を自然数とし，関数 $f_m(x)$ $(m=0,1,2,\cdots,n)$ を次のように定める．

$$f_m(x)=\begin{cases}1 & (m=0)\\ x^m & (m\geqq 1)\end{cases}$$

さらに，a_k $(k=0,1,2,\cdots,n)$ を次のように定める．

$$a_k=\int_{-1}^{1} f_k(1-x)f_{n-k}(1+x)\,dx$$

以下の問いに答えよ．

(1) a_0 と a_1 をそれぞれ n を用いて表せ．

(2) $k\geqq 1$ のとき，a_k を n，k，a_{k-1} を用いて表せ．

(3) a_k を n，k を用いて表せ．

(4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{a_k}$ を n を用いて表せ．

4 1 から 9 までの数字が 1 つずつ書かれた 9 個の玉があり，これらのうち，1，2，3 が書かれた玉をそれぞれ玉 1，玉 2，玉 3 と呼ぶ．以下の問いに答えよ．

(1) 9 個の玉から 3 個を選んで 1 つの箱に入れる．この入れ方は何通りあるか．

(2) (1) の入れ方のうち，箱に，玉 1 と玉 2 がいっしょに含まれず，玉 1 と玉 3 もいっしょに含まれないものは何通りあるか．

(3) 9 個の玉を区別できない 3 つの箱に分けて入れる．ただし，各箱にはそれぞれ 3 個ずつの玉を入れるものとする．この入れ方は何通りあるか．

(4) (3) の入れ方のうち，どの箱にも，玉 1 と玉 2 がいっしょに含まれず，玉 1 と玉 3 もいっしょに含まれないものは何通りあるか．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ より　$0 \leqq \sqrt{3}x \leqq 2\pi$

したがって，$f(x)=0$ をみたす x の値は

$$\sqrt{3}x = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{2\sqrt{3}},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\pi}$$

(2) $f(x) = e^{-x}\cos\sqrt{3}x$ を微分すると

$$f'(x) = -e^{-x}(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x + \cos\sqrt{3}x) = -2e^{-x}\sin\left(\sqrt{3}x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$\dfrac{\pi}{6} \leqq \sqrt{3}x + \dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{13}{6}\pi$ であるから，$f'(x)=0$ をみたす x の値は

$$\sqrt{3}x + \frac{\pi}{6} = \pi,\ 2\pi \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{5\pi}{6\sqrt{3}},\ \frac{11\pi}{6\sqrt{3}}$$

したがって，$0 \leqq x \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ における $f(x)$ の増減は，次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{5\pi}{6\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{11\pi}{6\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	

(3) $e^{-x} = -(e^{-x})'$ であることに注意して，部分積分を行うと

$$\begin{aligned}
\int e^{-x}\cos\sqrt{3}x\,dx &= -\int (e^{-x})'\cos\sqrt{3}x\,dx \\
&= -e^{-x}\cos\sqrt{3}x + \int e^{-x}(-\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x)\,dx \\
&= -e^{-x}\cos\sqrt{3}x + \sqrt{3}\int (e^{-x})'\sin\sqrt{3}x\,dx \\
&= -e^{-x}\cos\sqrt{3}x + \sqrt{3}e^{-x}\sin\sqrt{3}x - 3\int e^{-x}\cos\sqrt{3}x\,dx
\end{aligned}$$

したがって

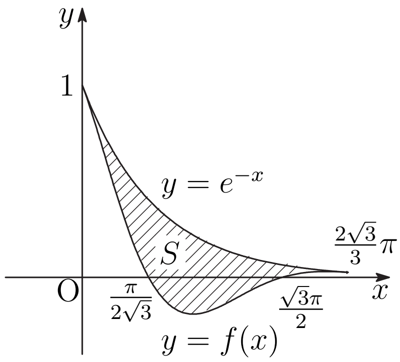
$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int e^{-x}\cos\sqrt{3}x\,dx \\
&= \frac{1}{4}e^{-x}(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x - \cos\sqrt{3}x) + C \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}e^{-x}\sin\left(\sqrt{3}x - \frac{\pi}{6}\right) + C} \quad (\boldsymbol{C}\ \textbf{は積分定数})
\end{aligned}$$

(4) $e^{-x}-f(x)=e^{-x}-e^{-x}\cos\sqrt{3}x$

$$=e^{-x}(1-\cos\sqrt{3}x)\geqq 0$$

したがって，求める面積を S とすると，

(3) の結果を用いると



$$S=\int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\{e^{-x}-f(x)\}\,dx$$

$$=\left[-e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-x}\sin\left(\sqrt{3}x-\frac{\pi}{6}\right)\right]_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi}$$

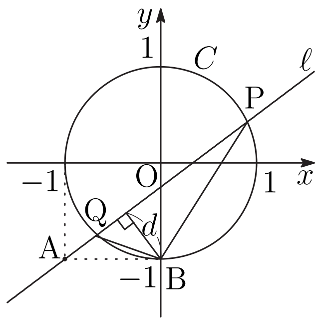
$$=\boldsymbol{\frac{3}{4}\left(1-e^{-\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi}\right)}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) ℓ は，点 A$(-1,-1)$ を通り，傾き k の直線であるから

$$y+1=k(x+1)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=kx+k-1}$$

(2) (1) の結果から，P，Q は連立方程式

$$\begin{cases} kx-y=1-k & \cdots ① \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$



の解である．上の 2 式を等式

$$(kx-y)^2+(x+ky)^2=(k^2+1)(x^2+y^2)$$

に代入すると

$$(1-k)^2+(x+ky)^2=k^2+1\quad \text{ゆえに}\quad (x+ky)^2=2k$$

ℓ と C が異なる 2 点で交わるとき，右上の図より $k>0$ であるから

$$x+ky=\pm\sqrt{2k}\quad \cdots ②$$

①，② を解いて　$x=\dfrac{k(1-k)\pm\sqrt{2k}}{k^2+1}$，$y=\dfrac{k-1\pm k\sqrt{2k}}{k^2+1}$　(複号同順)

P，Q の位置関係に注意して

$$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\frac{k(1-k)+\sqrt{2k}}{k^2+1},\ \frac{k-1+k\sqrt{2k}}{k^2+1}}\right),$$

$$\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\frac{k(1-k)-\sqrt{2k}}{k^2+1},\ \frac{k-1-k\sqrt{2k}}{k^2+1}}\right)$$

(3) (2) の結果から $\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \dfrac{2\sqrt{2k}}{k^2+1}(1,\ k)$

したがって $|\overrightarrow{\mathrm{QP}}| = \dfrac{2\sqrt{2k}}{k^2+1}\sqrt{1+k^2} = \dfrac{2\sqrt{2k}}{\sqrt{k^2+1}}$

点 $\mathrm{B}(0, -1)$ と直線 $\ell : kx - y + k - 1 = 0$ の距離 d は，$k > 0$ に注意して

$$d = \frac{|k\cdot 0 - 1 + k - 1|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$$

$\triangle\mathrm{BPQ}$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{QP}}| \times d = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{2k}}{\sqrt{k^2+1}} \times \frac{k}{\sqrt{k^2+1}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}k^{\frac{3}{2}}}{k^2+1}}$$

(4) (3) の結果から $\dfrac{dS}{dk} = -\dfrac{\sqrt{k}(k^2-3)}{\sqrt{2}(k^2+1)^2}$

したがって，$k > 0$ における S の増減表は，次のようになる．

k	(0)	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$\frac{dS}{dk}$		$+$	0	$-$
S		↗	極大	↘

よって，求める k の値は $\boldsymbol{k = \sqrt{3}}$

3 (1) $f_m(x) = \begin{cases} 1 & (m = 0) \\ x^m & (m \geqq 1) \end{cases}$ より $(m = 0, 1, 2, \cdots, n)$

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-1}^{1} f_0(1-x)f_n(1+x)\,dx = \int_{-1}^{1} 1\cdot(1+x)^n\,dx \\ &= \left[\,\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\,\right]_{-1}^{1} = \boldsymbol{\frac{2^{n+1}}{n+1}} \\ a_1 &= \int_{-1}^{1} f_1(1-x)f_{n-1}(1+x)\,dx = \int_{-1}^{1}(1-x)(1+x)^{n-1}\,dx \\ &= \int_{-1}^{1}\{2-(1+x)\}(1+x)^{n-1}\,dx = \int_{-1}^{1}\{2(1+x)^{n-1} - (1+x)^n\}\,dx \\ &= \left[\,\frac{2}{n}(1+x)^n - \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\,\right]_{-1}^{1} = \frac{2^{n+1}}{n} - \frac{2^{n+1}}{n+1} = \boldsymbol{\frac{2^{n+1}}{n(n+1)}} \end{aligned}$$

(2) $f_m(x) = \begin{cases} 1 & (m=0) \\ x^m & (m \geqq 1) \end{cases}$ より $(m=0,1,2,\cdots,n)$

(i) $1 \leqq k < n$ のとき

$$\begin{aligned}
a_k &= \int_{-1}^{1} f_k(1-x)f_{n-k}(1+x)\,dx = \int_{-1}^{1}(1-x)^k(1+x)^{n-k} \\
&= \int_{-1}^{1}(1-x)^k\left\{\frac{(1+x)^{n-k+1}}{n-k+1}\right\}' dx \\
&= \left[(1-x)^k\frac{(1+x)^{n-k+1}}{n-k+1}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\{(1-x)^k\}'\frac{(1+x)^{n-k+1}}{n-k+1}dx \\
&= \frac{k}{n-k+1}\int_{-1}^{1}(1-x)^{k-1}(1+x)^{n-(k-1)}dx \\
&= \frac{k}{n-k+1}\int_{-1}^{1} f_{k-1}(1-x)f_{n-(k-1)}(1+x)\,dx \\
&= \frac{k}{n-k+1}a_{k-1} \quad \cdots(*)
\end{aligned}$$

(ii) $k=n$ のとき

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_{-1}^{1} f_n(1-x)f_0(1+x) = \int_{-1}^{1}(1-x)^n \cdot 1\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}(1-x)^n(1+x)'\,dx \\
&= \Big[\ (1-x)^n(1+x)\ \Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\{(1-x)^n\}'(1+x)\,dx \\
&= n\int_{-1}^{1}(1-x)^{n-1}(1+x)\,dx \\
&= n\int_{-1}^{1} f_{n-1}(1-x)f_1(1+x)\,dx \\
&= na_{n-1}
\end{aligned}$$

上式より，$(*)$ は，$k=n$ のときも成り立つ.

よって，$k \geqq 1$ のとき

$$\boldsymbol{a_k = \frac{k}{n-k+1}a_{k-1}}$$

(3) (1)，(2) の結果から，$k \geqq 0$ のとき $a_k > 0$ であるから

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{k}{n-k+1}$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{a_k}{a_{k-1}} &= \frac{k}{n-k+1} \\ \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} &= \frac{k-1}{n-k+2} \\ &\vdots \\ \frac{a_2}{a_1} &= \frac{2}{n-1} \\ \frac{a_1}{a_0} &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

上の諸式の辺々を掛け合わせると $\quad \dfrac{a_k}{a_0} = \dfrac{k!}{{}_n\mathrm{P}_k}$

ここで，${}_n\mathrm{C}_k = \dfrac{{}_n\mathrm{P}_k}{k!}$ であるから $\quad \dfrac{a_k}{a_0} = \dfrac{1}{{}_n\mathrm{C}_k}$

上式に (1) の結果を代入すると $\quad a_k = \dfrac{a_0}{{}_n\mathrm{C}_k} = \boldsymbol{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1){}_n\mathrm{C}_k}}$

(4) (3) の結果より，$\dfrac{1}{a_k} = \dfrac{(n+1){}_n\mathrm{C}_k}{2^{n+1}}$ であるから

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k = \frac{n+1}{2^{n+1}} \times 2^n = \boldsymbol{\frac{n+1}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) ${}_9\mathrm{C}_3 = \dfrac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1} = \mathbf{84}$ (通り)

(2) 玉 1 と玉 2 がいっしょに含まれる場合の数は　7 (通り)

玉 1 と玉 3 がいっしょに含まれる場合の数は　7 (通り)

玉 1，玉 2，玉 3 の 3 個がいっしょに含まれる場合が 1 通りある．

よって，求める場合の数は

$$84 - (7 + 7 - 1) = \mathbf{71} \ \ (\text{通り})$$

(3) 9 個の玉を A，B，C の 3 つの箱に 3 個ずつ入れる場合の数は

$${}_9\mathrm{C}_3 \times {}_6\mathrm{C}_3 = 84 \times 20 \ (\text{通り})$$

求める場合の数は，A，B，C の区別をなくせばよいので

$$\frac{84 \times 20}{3!} = \mathbf{280} \ (\text{通り})$$

(4) 玉 1 と玉 2 がいっしょに含まれる場合の数は

$$7 \times \frac{{}_6\mathrm{C}_3}{2!} = 70 \ (\text{通り})$$

玉 1 と玉 3 がいっしょに含まれる場合の数は

$$7 \times \frac{{}_6\mathrm{C}_3}{2!} = 70 \ (\text{通り})$$

玉 1，玉 2，玉 3 がいっしょに含まれる場合の数は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{2!} = 10 \ (\text{通り})$$

よって，求める場合の数は

$$280 - (70 + 70 - 10) = \mathbf{150} \ (\text{通り})$$