平成 26 年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
情報工学部　平成 26 年 2 月 25 日

- 数 I・II・III・A・B・C (120 分)

1 放物線 $C : y = ax^2 + bx + c \ (a > 0)$ を考える．2 本の直線

$$\ell_1 : y = \frac{5}{2}x \quad \text{および} \quad \ell_2 : y = -\frac{1}{2}x$$

は C に接するものとする．C と ℓ_1 の接点を P，C と ℓ_2 の接点を Q とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha \neq 0)$ を定数とするとき，2 次方程式 $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ が重解をもつための条件を求めよ．

(2) b の値を求めよ．また，c を a を用いて表せ．

(3) P，Q の x 座標を a を用いて表せ．

(4) a の値にかかわらず C の頂点は直線 m 上にある．m の方程式を求めよ．

(5) C と ℓ_1，ℓ_2 で囲まれた部分の面積を a を用いて表せ．

2 $A + B = E$，$AB = O$ をみたす 2×2 行列 A，B を考える．ただし，E は単位行列，O は零行列である．以下の問いに答えよ．

(1) $A^2 = A$，$B^2 = B$，$BA = O$ となることを示せ．

(2) $(A + \alpha B)^n = A + k_n B$ をみたす実数 k_n を推測し，その推測が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ．ただし，α は実数であり，n は自然数である．

(3) $A + \alpha B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ であるとき，A，B と実数 α を求めよ．

3 $f(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\dfrac{2}{\pi} - \cos x}$，$g(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi}{4}$ とする．$\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ のとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) $f'(x) > 0$ を示せ．

(3) $\dfrac{\pi}{2} < f(x) < \pi$ を示せ．

(4) $f(x) < g(x)$ を示せ．

4 点 P は次の (i)，(ii)，(iii) の規則に従って数直線上を動く．

(i) 時刻 0 で，P は整数座標点 0 から 10 のいずれかの位置 i $(1 \leqq i \leqq 10)$ にある．

(ii) 時刻 t $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ に位置 i $(1 \leqq i \leqq 9)$ にある P は，$t+1$ には確率 p $\left(0 < p < \dfrac{1}{2}\right)$ で位置 $i+1$ に，確率 $1-p$ で位置 $i-1$ に移動する．

(iii) 時刻 t に位置 0 または 10 にある P は，$t+1$ にもその位置に留まる．

以下の問いに答えよ．

(1) P が時刻 0 で位置 2 にあるとき，時刻 3 で位置 0 にある確率を求めよ．

(2) P が時刻 0 で位置 1 にあるとき，時刻 3 で位置 0 にある確率を求めよ．

時刻 0 で位置 i にある P が，いずれかの時刻で位置 0 に到達する確率を q_i とする．ただし，$q_0 = 1$，$q_{10} = 0$ である．$1 \leqq i \leqq 9$ のとき，q_{i+1}，q_i，q_{i-1} の間には $q_i = pq_{i+1} + (1-p)q_{i-1}$ の関係が成り立つ．

(3) $q_{i+1} - q_i = \boxed{\text{(a)}}(q_i - q_{i-1})$ である．空欄の (a) に入る適切な数または式を求めよ．

(4) q_i を q_1 と p を用いて表せ．

(5) q_1 を求め，q_i を p を用いて表せ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 2次方程式 $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ が重解をもつ条件は，係数から

$$\boldsymbol{\beta^2-4\alpha\gamma=0}$$

(2) k を定数とする．直線 $y=kx$ と放物線 $y=ax^2+bx+c$ が接するとき，

$$ax^2+bx+c=kx \quad \text{すなわち} \quad ax^2+(b-k)x+c=0 \quad \cdots(*)$$

$(*)$ が重解をもつから　　$(b-k)^2-4ac=0$

k について整理すると　　$k^2-2bk+b^2-4ac=0$

この k の2次方程式の解が $\dfrac{5}{2}, -\dfrac{1}{2}$ であるから，解と係数の関係により

$$\frac{5}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=2b,\quad \frac{5}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=b^2-4ac$$

上の第1式から　$\boldsymbol{b=1}$　これを第2式に代入することにより

$$4ac=\frac{9}{4}\quad \text{このとき}, a\neq 0 \text{ であるから}\quad \boldsymbol{c=\frac{9}{16a}}$$

(3) 接点の x 座標は，$(*)$ および $b=1$ から　$x=-\dfrac{b-k}{2a}=\dfrac{k-1}{2a}$

これにそれぞれ $k=\dfrac{5}{2}, -\dfrac{1}{2}$ を代入することにより

$$\text{P の } x \text{ 座標は}\quad \boldsymbol{x=\frac{3}{4a}},\qquad \text{Q の } x \text{ 座標は}\quad \boldsymbol{x=-\frac{3}{4a}}$$

(4) (2) の結果により，放物線 C の方程式は

$$y=ax^2+x+\frac{9}{16a}=a\left(x+\frac{1}{2a}\right)^2+\frac{5}{16a}$$

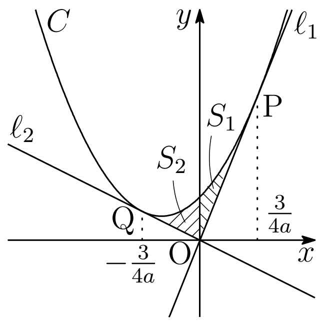
ゆえに，C の頂点を $(X,\ Y)$ とおくと

$$X=-\frac{1}{2a},\quad Y=\frac{5}{16a}$$

上の2式から a を消去すると　　$Y=-\dfrac{5}{8}X$

よって，求める m の方程式は　　$\boldsymbol{y=-\dfrac{5}{8}x}$

(5) (2)，(3) の結果から，C と y 軸，ℓ_1 で囲まれた部分の面積を S_1 とすると



$$
\begin{aligned}
S_1 &= \int_0^{\frac{3}{4a}} \left\{ \left(ax^2 + x + \frac{9}{16a} \right) - \frac{5}{2}x \right\} dx \\
&= a \int_0^{\frac{3}{4a}} \left(x - \frac{3}{4a} \right)^2 dx \\
&= a \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{3}{4a} \right)^3 \right]_0^{\frac{3}{4a}} = \frac{9}{64a^2}
\end{aligned}
$$

同様に，C と y 軸，ℓ_2 で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \int_{-\frac{3}{4a}}^{0} \left\{ \left(ax^2 + x + \frac{9}{16a} \right) - \left(-\frac{1}{2}x \right) \right\} dx \\
&= a \int_{-\frac{3}{4a}}^{0} \left(x + \frac{3}{4a} \right)^2 dx \\
&= a \left[\frac{1}{3} \left(x + \frac{3}{4a} \right)^3 \right]_{-\frac{3}{4a}}^{0} = \frac{9}{64a^2}
\end{aligned}
$$

よって，求める面積を S とすると

$$
S = S_1 + S_2 = \frac{9}{64a^2} + \frac{9}{64a^2} = \boldsymbol{\frac{9}{32a^2}}
$$

解説 一般に，放物線 C と 2 接線 ℓ_1，ℓ_2 について，次が成り立つ (九大 2009 年一般前期文系数学 $\boxed{\mathbf{4}}$ の補足[1] を参照．)．

1. 放物線 C 上の 2 点 P，Q におけるそれぞれの接線 ℓ_1，ℓ_2 の交点の x 座標は，2 点 P，Q の中点の x 座標である．
2. C と直線 PQ で囲まれた部分の面積を S_0，C と 2 接線 ℓ_1，ℓ_2 で囲まれた部分の面積を S とすると

$$
S = \frac{1}{2}S_0
$$

本題において，S_0 は，x^2 の係数および接点の x 座標から

$$
S_0 = \frac{a}{6}\left\{ \frac{3}{4a} - \left(-\frac{3}{4a} \right) \right\}^3 = \frac{9}{16a^2}
$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $A+B=E$ の両辺に，A を左から掛けると

$$A(A+B)=AE \quad \text{ゆえに} \quad A^2+AB=A \quad \cdots ①$$

$A+B=E$ の両辺に，B を右から掛けると

$$(A+B)B=EB \quad \text{ゆえに} \quad AB+B^2=B \quad \cdots ②$$

$A+B=E$ の両辺に，A を右から掛けると

$$(A+B)A=EA \quad \text{ゆえに} \quad A^2+BA=A \quad \cdots ③$$

$AB=O$ であるから，これを ①，② に代入すると

$$A^2=A, \quad B^2=B$$

上の第 1 式を ③ に代入すると

$$BA=O$$

(2) $(A+\alpha B)^n=A+k_nB$ をみたす実数 k_n を $k_n=\alpha^n$ と推測し，すなわち

$$(A+\alpha B)^n=A+\alpha^n B \quad \cdots (*)$$

とおく．

i) $n=1$ のとき，明らかに $(*)$ は成り立つ．

ii) $n=j$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると

$$(A+\alpha B)^j=A+\alpha^j B$$

上式の両辺に左から $A+\alpha B$ を掛けると，(1) の結果により

$$\begin{aligned}(A+\alpha B)^{j+1}&=(A+\alpha B)(A+\alpha^j B)\\&=A^2+\alpha^j AB+\alpha BA+\alpha^{j+1}B^2\\&=A+\alpha^{j+1}B\end{aligned}$$

よって，$n=j+1$ のときも，$(*)$ が成り立つ．

i)，ii) より，すべての自然数 n について，$(*)$ が成り立つ．

よって，すべての自然数 n に対して，$k_n=\alpha^n$ が成り立つ．

(3) $A+\alpha B=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\cdots$①，$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdots$② とおく.

① から ② の辺々を引くと

$$(\alpha-1)B=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \cdots ③$$

③ の両辺を平方すると，$B^2=B$ により

$$(\alpha-1)^2B^2=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha-1)\cdot(\alpha-1)B=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

上式の左辺に ③ を代入すると

$$(\alpha-1)\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ゆえに　$\alpha-1=1$　よって　$\boldsymbol{\alpha=2}$

$\alpha=2$ を ③ に代入して　　$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

これを ② に代入すると

$$A+\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

別解 $X=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ とおくと，ハミルトン・ケリーの定理により

$$X^2-3X+2E=O$$

$A+B=E$，$A+\alpha B=X$，$A+\alpha^2B=X^2$ であるから

$$(\alpha-1)B=X-E, \quad \alpha(\alpha-1)B=X^2-X=2(X-E)$$

上の第 1 式を第 2 式に代入すると　$\alpha(X-E)=2(X-E)$　ゆえに　$\alpha=2$

$A+B=E$，$A+2B=X$ を解いて $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=\dfrac{\sin x - x\cos x}{\dfrac{2}{\pi}-x}$ を微分すると

$$f'(x)=\frac{(\sin x - x\cos x)'\left(\dfrac{2}{\pi}-\cos x\right)-(\sin x - x\cos x)\left(\dfrac{2}{\pi}-\cos x\right)'}{\left(\dfrac{2}{\pi}-\cos x\right)^2}$$

$$=\frac{x\sin x\left(\dfrac{2}{\pi}-\cos x\right)-(\sin x - x\cos x)\sin x}{\left(\dfrac{2}{\pi}-\cos x\right)^2}=\boldsymbol{\frac{\left(\dfrac{2}{\pi}x-\sin x\right)\sin x}{\left(\dfrac{2}{\pi}-\cos x\right)^2}}$$

(2) $\alpha(x)=\dfrac{2}{\pi}x-\sin x$ とおくと $\alpha\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

$\alpha'(x)=\dfrac{2}{\pi}-\cos x$ であるから，$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ のとき $\alpha'(x)>0$

したがって，$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ のとき $\alpha(x)>0$

上式および (1) の結果から，$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ のとき $f'(x)>0$

(3) (2) の結果から，$f'(x)$ は，$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ において，単調増加であるから

$$\frac{\pi}{2}<x<\pi \text{ のとき } f\left(\frac{\pi}{2}\right)<f(x)<f(\pi)$$

ここで $$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2},\quad f(\pi)=\frac{\pi}{\dfrac{\pi}{2}+1}<\frac{\pi}{1}=\pi$$

よって $$\frac{\pi}{2}<x<\pi \text{ のとき } \frac{\pi}{2}<f(x)<\pi$$

(4) $\beta(x)=\left(\dfrac{2}{\pi}-\cos x\right)\{g(x)-f(x)\}$ とおくと

$$\begin{aligned}\beta(x)&=\left(\frac{2}{\pi}-\cos x\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)-(\sin x-x\cos x)\\&=\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x-\sin x+\frac{1}{2}\\\beta'(x)&=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{\pi}\\\beta''(x)&=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x\end{aligned}$$

また　$\beta\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，$\beta'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{\pi}$，$\beta''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

上の結果から，$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ において

$\beta''(x)>0$ により　　$\beta'(x)>\beta'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{\pi}>0$

$\beta'(x)>0$ により　　$\beta(x)>\beta\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

したがって，$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ のとき，$\beta(x)>0$ より

$$\left(\frac{2}{\pi}-\cos x\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)-(\sin x-x\cos x)>0$$

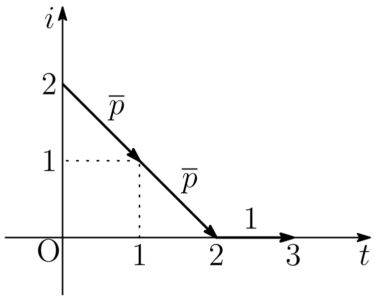
このとき，$\dfrac{2}{\pi}-\cos x>0$ であるから

$$\frac{\sin x-x\cos x}{\dfrac{2}{\pi}-\cos x}<\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}$$

よって，$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ のとき　$f(x)<g(x)$

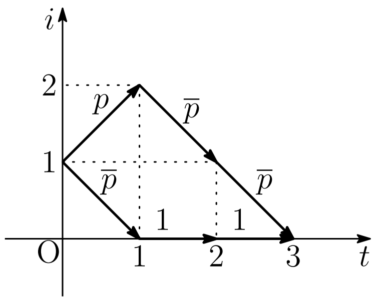
$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\overline{p} = 1 - p$ とする．時刻と位置の変化は右図のようになる．求める確率は

$$\overline{p} \cdot \overline{p} \cdot 1 = \overline{p}^2 = \boldsymbol{(1-p)^2}$$



(2) $\overline{p} = 1 - p$ とする．時刻と位置の変化は右図のようになる．求める確率は

$$\begin{aligned}\overline{p} \cdot 1 \cdot 1 + p \cdot \overline{p} \cdot \overline{p} &= \overline{p}(1 + p\overline{p}) \\ &= \boldsymbol{(1-p)(1+p-p^2)}\end{aligned}$$



(3) $q_i = pq_{i+1} + (1-p)q_{i-1}$ より

$$pq_{i+1} - q_i + (1-p)q_{i-1} = 0$$

この確率漸化式の特性方程式は

$$pt^2 - t + 1 - p = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = 1,\ \frac{1-p}{p}$$

したがって，次の 2 式が成り立つ．

$$q_{i+1} - \frac{1-p}{p}q_i = q_i - \frac{1-p}{p}q_{i-1} \qquad \cdots ①$$

$$q_{i+1} - q_i = \frac{1-p}{p}(q_i - q_{i-1}) \qquad \cdots ②$$

よって，求める空欄 (a) は $\boldsymbol{\dfrac{1-p}{p}}$

補足 確率漸化式 $q_{i+1} - (\alpha + \beta)q_i + \alpha\beta q_{i-1} = 0$ から，次の 2 式が成り立つ．

$$q_{i+1} - \beta q_i = \alpha(q_i - \beta q_i), \quad q_{i+1} - \alpha q_i = \beta(q_i - \alpha q_i)$$

(4) $\alpha = \dfrac{1-p}{p}$ とおくと，①，② より

$$q_{i+1} - \alpha q_i = q_1 - \alpha q_0, \quad q_{i+1} - q_i = \alpha^i (q_1 - q_0)$$

$q_0 = 1$ をこれに代入すると

$$q_{i+1} - \alpha q_i = q_1 - \alpha, \quad q_{i+1} - q_i = \alpha^i (q_1 - 1)$$

上の 2 式の辺々を引いて

$$(\alpha - 1) q_i = q_1(\alpha^i - 1) - (\alpha^i - \alpha)$$

ここで，$0 < p < \dfrac{1}{2}$ より

$$\alpha - 1 = \frac{1-p}{p} - 1 = \frac{1-2p}{p} > 0$$

したがって $$q_i = \frac{q_1(\alpha^i - 1) - (\alpha^i - \alpha)}{\alpha - 1}$$

よって $$\boldsymbol{q_i = \frac{p}{1-2p}\left[q_1\left\{\left(\tfrac{1-p}{p}\right)^i - 1\right\} - \left\{\left(\tfrac{1-p}{p}\right)^i - \tfrac{1-p}{p}\right\}\right]}$$

(5) $q_{10} = 0$ を (4) の結果に代入すると

$$q_1\left\{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10} - 1\right\} - \left\{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10} - \frac{1-p}{p}\right\} = 0$$

ゆえに $$\boldsymbol{q_1 = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10} - \frac{1-p}{p}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10} - 1}}$$

上式および (4) の結果から

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{(q_1 - 1)\alpha^i - q_1 + \alpha}{\alpha - 1} \\ &= \frac{1}{\alpha - 1}\left\{\left(\frac{\alpha^{10} - \alpha}{\alpha^{10} - 1} - 1\right)\alpha^i - \frac{\alpha^{10} - \alpha}{\alpha^{10} - 1} + \alpha\right\} \\ &= \frac{1}{\alpha - 1}\left\{\frac{(1-\alpha)\alpha^i}{\alpha^{10} - 1} + \frac{\alpha^{10}(\alpha - 1)}{\alpha^{10} - 1}\right\} \\ &= \frac{\alpha^{10} - \alpha^i}{\alpha^{10} - 1} = \boldsymbol{\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^i}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10} - 1}} \end{aligned}$$

補足 $\alpha,\ \beta \neq 0$ とする．漸化式 $q_{i+1} - (\alpha+\beta)q_i + \alpha\beta q_{i-1} = 0 \cdots (*)$ から

$$q_{i+1} - \beta q_i = \alpha(q_i - \beta q_i), \quad q_{i+1} - \alpha q_i = \beta(q_i - \alpha q_i)$$

さらに

$$q_{i+1} - \beta q_i = \alpha^i(q_1 - \beta q_0), \quad q_{i+1} - \alpha q_i = \beta^i(q_1 - \alpha q_0)$$

上の 2 式の辺々を引くと

$$(\alpha - \beta)q_i = \alpha^i(q_1 - \beta q_0) - \beta^i(q_1 - \alpha q_0)$$

i) $\alpha \neq \beta$ のとき $\quad q_i = \dfrac{(q_1 - \beta q_0)\alpha^i - (q_1 - \alpha q_0)\beta^i}{\alpha - \beta}$

ii) $\alpha = \beta$ のとき

$$q_{i+1} - \alpha q_i = \alpha^i(q_1 - \alpha q_0) \quad \text{ゆえに} \quad \frac{q_{i+1}}{\alpha^{i+1}} - \frac{q_i}{\alpha^i} = \frac{q_1 - \alpha q_0}{\alpha}$$

$i > 0$ のとき
$$\sum_{j=0}^{i-1}\left(\frac{q_{i+1}}{\alpha^{i+1}} - \frac{q_i}{\alpha^i}\right) = \sum_{j=0}^{i-1}\frac{q_1 - \alpha q_0}{\alpha}$$
$$\frac{q_i}{\alpha^i} - q_0 = \frac{(q_1 - \alpha q_0)i}{\alpha}$$
$$q_i = \left\{\frac{(q_1 - \alpha q_0)i}{\alpha} + q_0\right\}\alpha^i$$

上式は，$i = 0$ のときも成り立つ．

i)，ii) より，$(*)$ は，次の形で表すことができる．

$\alpha \neq \beta$ のとき $\quad q_i = a\alpha^i + b\beta^i \quad$ ($a,\ b$ は定数)

$\alpha = \beta$ のとき $\quad q_i = (ci + d)\alpha^i \quad$ ($c,\ d$ は定数)

本題の確率漸化式の特性方程式の 2 解が α，1 であるから

$$0 < p < \frac{1}{2} \text{より} \qquad \alpha = \frac{1-p}{p} \neq 1$$

ゆえに，$q_i = a\alpha^i + b$ とおくと，$q_0 = 1$，$q_{10} = 0$ より

$$a + b = 1, \quad a\alpha^{10} + b = 0$$

これを解いて $\quad a = -\dfrac{1}{\alpha^{10} - 1}, \quad b = \dfrac{\alpha^{10}}{\alpha^{10} - 1}$

よって $\quad q_i = \dfrac{\alpha^{10} - \alpha^i}{\alpha^{10} - 1}$

2002 東京大学 (理系) 後期

ランダムウォークの応用として，ギャンブラーの破産問題と呼ばれているものを考える．あるギャンブラーの最初の所持金を 2 ドルとする．1 回賭けを行うごとに，勝てば所持金が 1 ドル増え，負ければ 1 ドル失うものとする．所持金がなくなればギャンブラーは破産しそこで賭けは終わり，また，所持金が 5 ドルになれば賭けは終了する．1 回の賭けで勝つ確率を $\dfrac{2}{3}$，負ける確率を $\dfrac{1}{3}$ としたとき，このギャンブラーが破産して終了する確率はいくらとなるかを考えてみよう．この問題を数直線上で考えると，数直線上の位置 2 からスタートし，0 と 5 の間で $+$ 方向へ移動する確率が $\dfrac{2}{3}$，$-$ 方向へ移動する確率が $\dfrac{1}{3}$ のランダムウォークとなる．0 から 5 の間で $+$ 方向へ移動する確率が $\dfrac{2}{3}$，$-$ 方向へ移動する確率が $\dfrac{1}{3}$ のランダムウォークとなる．0 または 5 に達したときに賭けは終了する．
さて，ランダムウォークでは，状態の変化は確率的に定まり，その確率は一定である．すなわち，ある状態にある場合，それ以降の過程は時刻や履歴によらず確率的に定まる．したがって，ギャンブラーの破産確率は，単にそのときの所持金の額で決まる．これを $r(i)$ $(i = 0, 1, \cdots, 5)$ としよう．$r(i)$ は所持金が i であるときに，破産して終了する確率である．

(1) $r(2)$ を $r(1)$，$r(3)$ で表せ．

(2) このような関係式を各状態について表し，それらを用いて最初の所持金が 2 ドルのギャンブラーが破産して終了する確率を求めよ．

解答　(1) $\boldsymbol{r(2) = \dfrac{2}{3}r(3) + \dfrac{1}{3}r(1)}$

(2) (1) と同様に　$r(1) = \dfrac{2}{3}r(2) + \dfrac{1}{3}r(0),\quad r(0) = 1$

$r(2) = x$ とおいて上式に代入すると　$r(1) = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}$

(1) の結果から，さらに

$$r(3) = \frac{3}{2}r(2) - \frac{1}{2}r(1) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{6}x - \frac{1}{6}$$

$$r(4) = \frac{3}{2}r(3) - \frac{1}{2}r(2) = \frac{3}{2}\left(\frac{7}{6}x - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{2}x = \frac{5}{4}x - \frac{1}{4}$$

$$r(5) = \frac{3}{2}r(4) - \frac{1}{2}r(3) = \frac{3}{2}\left(\frac{5}{4}x - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{7}{6}x - \frac{1}{6}\right) = \frac{31}{24}x - \frac{7}{24}$$

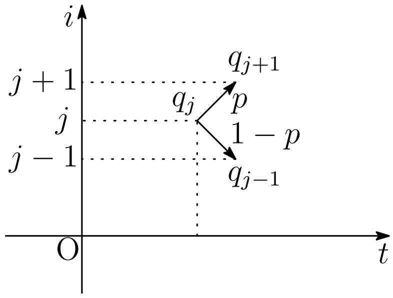
$r(5) = 0$ であるから　$x = \dfrac{7}{31}$　よって　$\boldsymbol{r(2) = \dfrac{7}{31}}$

補足 確率漸化式の特性方程式の解が $\dfrac{1}{2}$，1 から　$r(i) = \dfrac{32}{31}\left(\dfrac{1}{2}\right)^i - \dfrac{1}{31}$

破産問題 (Ruin problem)

P は所持金 i 万円で $(1 \leqq i \leqq 9)$，1 回のゲームで勝てば 1 万円だけ増え，負ければ 1 万円だけ減るゲームに参加する．P は所持金が 10 万円 (目標金額) になるか，所持金がなくなったときにゲームは終了する．1 回のゲームで P が勝つ確率を p $(0 < p < \frac{1}{2})$ とし，P の所持金がなくなる確率を q_i とする．ある時点で，P の所持金が j 万円であるとき $(1 \leqq j \leqq 9)$，その次には，確率 p で所持金 $j+1$ 万円，確率 $1-p$ で所持金 $j-1$ 万円の状態になるから，次の確率漸化式が成り立つ．

$$q_0 = 1, \quad q_{10} = 0$$
$$q_j = pq_{j+1} + (1-p)q_{j-1}$$



本題の結果から，$\alpha = \dfrac{1-p}{p}$ とおくと

$$q_i = \frac{\alpha^{10} - \alpha^i}{\alpha^{10} - 1}$$

したがって，このゲームの期待値 E_i は

$$E_i = 10^5(1 - q_i) = \frac{10^5(\alpha^i - 1)}{\alpha^{10} - 1}$$

例えば，P の所持金が 5 万円のとき，破産する確率 q_5 および期待値 E_5 は (E_5 の 1 円未満は切り捨て)

p	q_5	E_5
0.40	0.88364	11636
0.41	0.86055	13945
0.42	0.83395	16605
0.43	0.80365	19635
0.44	0.76956	23044
0.45	0.73172	26828
0.46	0.69035	30965
0.47	0.64583	35417
0.48	0.59874	40126
0.49	0.54985	45015

このような不利なゲーム $(0 < p < \frac{1}{2})$ に時間をかけて参加するより，1 回勝負で 5 万円をかけることができるならば，1 回勝負の期待値の方が大きい．