

平成 25 年度 九州工業大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

情報工学部 平成 25 年 2 月 25 日

- 数 I・II・III・A・B・C (120 分)

1 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲において、曲線 $C_1 : y = \sin 2x$ と曲線 $C_2 : y = \cos x$ の交点の x 座標を a, b, c ($a < b < c$) とする。以下の問いに答えよ。

- (1) a, b, c の値を求めよ。
- (2) 交点 $(b, \sin 2b)$ における 2 つの曲線 C_1 と C_2 のそれぞれの接線は垂直ではないことを示せ。
- (3) $a \leq x \leq b$ の範囲で 2 つの曲線 C_1, C_2 によって囲まれた部分の面積を S_1 とし、 $b \leq x \leq c$ の範囲で 2 つの曲線 C_1, C_2 によって囲まれた部分の面積を S_2 とするとき、2 つの面積の比 $S_1 : S_2$ を求めよ。
- (4) 曲線 C_1 の $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の部分と x 軸で囲まれた部分を、 x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

2 関数 $f(x) = \log(x^2 - x + 2)$ ($0 \leq x \leq 1$) に対して、以下の問いに答えよ。ただし、対数は自然対数を表している。

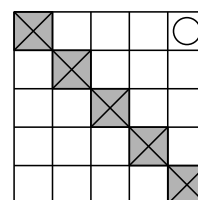
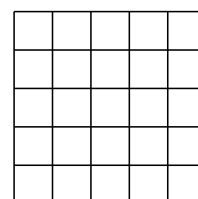
- (1) $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) の極値を求めよ。
- (2) x についての方程式 $\log(x^2 - x + 2) = x$ は $\frac{1}{2} < x < 1$ の範囲に実数解をただ 1 つもつことを示せ。必要であれば、 $\log 2 < 0.7$, $\log 7 > 1.9$ であることを用いてよい。
- (3) $y = f'(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) の最大値と最小値を求めよ。
- (4) 平均値の定理を用いることで、 $0 \leq a < b \leq 1$ となる実数 a, b に対して、 $|f(b) - f(a)| < \frac{1}{2}|b - a|$ となることを示せ。

3 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) 連立1次方程式 $\begin{cases} 3x + 4y = kx \\ x + 6y = ky \end{cases}$ が $x = y = 0$ 以外の解をもつような実数 k の値を2つ求めよ。
- (2) (1) で求めた k の値を a, b ($a < b$) とし、 $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ とする。実数 s, t に対し、行列 $P = \begin{pmatrix} s & t \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ が $AP = PB$ を満たすとき、実数 s, t の値を求めよ。
- (3) (2) で定めた行列 B について、 B^n (ただし、 n は自然数) を推測し、その推測が正しいことを数学的帰納法で証明せよ。
- (4) A^n を求めよ。ただし、 n は自然数とする。

4 右上の図のような、縦方向に5行、横方向に5列の合計25個のマス目から、異なる5個のマス目を選んでマス目に○をつける。以下の問いに答えよ。

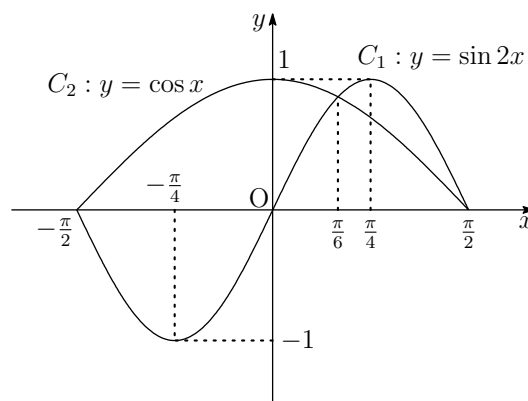
- (1) すべての列に○がついているようなマス目の選び方の総数を求めよ。
- (2) すべての行と列に○がついているようなマス目の選び方の総数を求めよ。
- (3) ○のついている列が2列、○のついていない列が3列になるようなマス目の選び方の総数を求めよ。
- (4) 右下の図のように、右上のマス目が選ばれて○がついており、かつ、×がついた対角線上のマス目を選んで○をつけることができないものとする。このとき、すべての行と列に○がついているようなマス目の選び方の総数を求めよ。



正解

1 (1) C_1 と C_2 の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} \sin 2x &= \cos x \\ 2 \sin x \cos x &= \cos x \\ \cos x(2 \sin x - 1) &= 0 \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ であるから} \\ x &= -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



$$a < b < c \text{ より } a = -\frac{\pi}{2}, b = \frac{\pi}{6}, c = \frac{\pi}{2}$$

(2) $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \cos x$ とおくと $f'(x) = 2 \cos 2x$, $g'(x) = -\sin x$

$$\text{ゆえに, } f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1, g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \text{ より } f'\left(\frac{\pi}{6}\right)g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \neq -1$$

よって, この点における C_1 と C_2 のそれぞれの接線は垂直ではない.

(3) 上のグラフから

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos x - \sin 2x) dx = \left[\sin x + \frac{1}{2} \cos 2x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{9}{4} \\ S_2 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - \cos x) dx = \left[-\frac{1}{2} \cos 2x - \sin x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{よって } S_1 : S_2 = \frac{9}{4} : \frac{1}{4} = \mathbf{9 : 1}$$

(4) 上のグラフから

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4x) dx = \pi \left[x - \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

- 2 (1) $f(x) = \log(x^2 - x + 2)$
 $(0 \leq x \leq 1)$ より

$$f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

x	0	...	$\frac{1}{2}$...	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$\log 2$	\searrow	極小 $\log \frac{7}{4}$	\nearrow	$\log 2$

$f(x)$ の増減表は右のようになる.

よって $x = \frac{1}{2}$ で極小値 $\log \frac{7}{4}$

- (2) $g(x) = \log(x^2 - x + 2) - x$ とおくと

$$g'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+2} - 1 = \frac{-x^2+3x-3}{x^2-x+2} = \frac{-(x-\frac{3}{2})^2 - \frac{3}{4}}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} < 0$$

ゆえに, $g(x)$ は単調に減少する.

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \log \frac{7}{4} - \frac{1}{2} = \log 7 - 2 \log 2 - \frac{1}{2}, \quad g(1) = \log 2 - 1 < 0$$

$$> 1.9 - 2 \times 0.7 - 0.5 = 0$$

したがって, $g(x) = 0$ となる $\frac{1}{2} < x < 1$ がただ1つ存在する. すなわち,
 方程式 $\log(x^2 - x + 2) = x$ は $\frac{1}{2} < x < 1$ の範囲に実数解をただ1つもつ.

- (3) ① を微分して

$$f''(x) = \frac{(2x-1)'(x^2-x+2) - (2x-1)(x^2-x+2)'}{(x^2-x+2)^2}$$

$$= \frac{-2x^2+2x+3}{(x^2-x+2)^2} = \frac{2x(1-x)+3}{(x^2-x+2)^2}$$

ゆえに, $0 \leq x \leq 1$ において $f''(x) > 0$

したがって, $f'(x)$ はこの区間で単調増加である.

よって, 最大値は $f'(1) = \frac{1}{2}$, 最小値は $f'(0) = -\frac{1}{2}$ である.

- (4) 平均値の定理により

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

となる c が $a < c < b$ に存在する. また, (3) の結果から

$$-\frac{1}{2} < f'(c) < \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad |f'(c)| < \frac{1}{2}$$

したがって $\left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| = f'(c) < \frac{1}{2}$ よって $|f(b) - f(a)| < \frac{1}{2}|b - a|$

$$\boxed{3} \quad (1) \quad \begin{cases} 3x + 4y = kx \\ x + 6y = ky \end{cases} \text{ より } A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \dots (*)$$

$$\text{ゆえに } (A - kE) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この方程式が $x = y = 0$ 以外の解をもつとき,

$$A - kE = \begin{pmatrix} 3 - k & 4 \\ 1 & 6 - k \end{pmatrix}$$

は正則ではないので, $\det(A - kE) = 0$ より

$$(3 - k)(6 - k) - 4 \cdot 1 = 0 \quad \text{これを解いて } \mathbf{k = 2, 7}$$

(2) $a < b$ および (1) の結果から, $a = 2, b = 7$

(*) に, $k = 2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix}$ を代入すると

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1} \quad \text{ゆえに } s = -4$$

(*) に, $k = 7, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ を代入すると

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{2} \quad \text{ゆえに } t = 1$$

①, ② から

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & t \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & t \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

上式は, $AP = PB$ を満たす. よって $\mathbf{s = -4, t = 1}$

(3) 自然数 n に対して

$$B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 7^n \end{pmatrix} \cdots (**)$$

とおく.

i) $n = 1$ のとき, (*) は成り立つ.

ii) $n = k$ のとき

$$B^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 7^k \end{pmatrix}$$

であると仮定すると

$$\begin{aligned} B^{k+1} &= B^k B \\ &= \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 7^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k+1} & 0 \\ 0 & 7^{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって, $n = k + 1$ のときも, (**) が成り立つ.

i), ii) より, すべての自然数 n に対して, (**) は成り立つ.

$$(4) P = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ より } P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

また, $AP = PB$ より, $A = PBP^{-1}$ であるから, (3) の結果により

$$\begin{aligned} A^n &= (PBP^{-1})^n \\ &= (PBP^{-1})(PBP^{-1}) \cdots (PBP^{-1}) \\ &= PB^n P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 7^n \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \cdot 2^n + 7^n & -4 \cdot 2^n + 4 \cdot 7^n \\ -2^n + 7^n & 2^n + 4 \cdot 7^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 4 (1) 1列目の○のつけ方は5通り. 2~5列目の○のつけ方も同様に5通り.
したがって $5^5 = 3125$ (通り)
- (2) 1行目にはa列目に○をつけ, 2~5行目には, それぞれb列目, c列目, d列目, e列目に○をつけるとする. 求める選び方の総数は, a, b, c, d, eに1から5の数字を並べる順列の総数に等しい. よって $5! = 120$ (通り)
- (3) ○のついている2列の選び方は ${}_5P_2$ (通り)
- のついている2列が, 4個と1個の場合は ${}_5C_4 \cdot {}_5C_1$ (通り)
- のついている2列が, 3個と2個の場合は ${}_5C_3 \cdot {}_5C_2$ (通り)
- よって, 求める選び方の総数は
- $${}_5P_2({}_5C_4 \cdot {}_5C_1 + {}_5C_3 \cdot {}_5C_2) = 20(5 \times 5 + 10 \times 10) = 2500 \text{ (通り)}$$
- (4) 2行から5行までの列の番号を樹形図で示すと次のようになる.
よって 11 (通り)

