平成 25 年度　九州工業大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

数 I・II・III・A・B・C (120 分)

情報工学部　平成 25 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4

1 $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，曲線 $C_1 : y = \sin 2x$ と曲線 $C_2 : y = \cos x$ の交点の x 座標を a，b，c $(a < b < c)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) a，b，c の値を求めよ．

(2) 交点 $(b,\ \sin 2b)$ における 2 つの曲線 C_1 と C_2 のそれぞれの接線は垂直ではないことを示せ．

(3) $a \leqq x \leqq b$ の範囲で 2 つの曲線 C_1，C_2 によって囲まれた部分の面積を S_1 とし，$b \leqq x \leqq c$ の範囲で 2 つの曲線 C_1，C_2 によって囲まれた部分の面積を S_2 とするとき，2 つの面積の比 $S_1 : S_2$ を求めよ．

(4) 曲線 C_1 の $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分と x 軸で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ．

2 関数 $f(x) = \log(x^2 - x + 2)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ に対して，以下の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数を表している．

(1) $y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の極値を求めよ．

(2) x についての方程式 $\log(x^2 - x + 2) = x$ は $\dfrac{1}{2} < x < 1$ の範囲に実数解をただ 1 つもつことを示せ．必要であれば，$\log 2 < 0.7$，$\log 7 > 1.9$ であることを用いてよい．

(3) $y = f'(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の最大値と最小値を求めよ．

(4) 平均値の定理を用いることで，$0 \leqq a < b \leqq 1$ となる実数 a，b に対して，$|f(b) - f(a)| < \dfrac{1}{2}|b - a|$ となることを示せ．

3 行列 $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

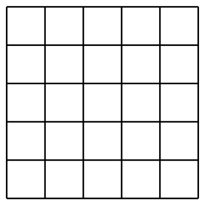
(1) 連立 1 次方程式 $\begin{cases} 3x+4y=kx \\ x+6y=ky \end{cases}$ が $x=y=0$ 以外の解をもつような実数 k の値を 2 つ求めよ．

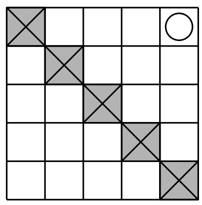
(2) (1) で求めた k の値を a, b $(a<b)$ とし，$B=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ とする．実数 s，t に対し，行列 $P=\begin{pmatrix} s & t \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ が $AP=PB$ を満たすとき，実数 s，t の値を求めよ．

(3) (2) で定めた行列 B について，B^n (ただし, n は自然数) を推測し，その推測が正しいことを数学的帰納法で証明せよ．

(4) A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする．

4 右上の図のような，縦方向に 5 行，横方向に 5 列の合計 25 個のマス目から，異なる 5 個のマス目を選んでマス目に○をつける．以下の問いに答えよ．





(1) すべての列に○がついているようなマス目の選び方の総数を求めよ．

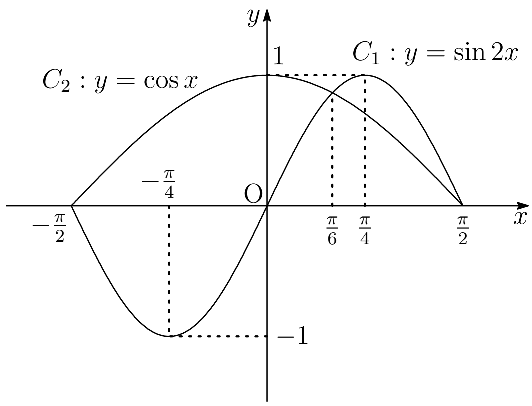
(2) すべての行と列に○がついているようなマス目の選び方の総数を求めよ，

(3) ○のついている列が 2 列，○のついていない列が 3 列になるようなマス目の選び方の総数を求めよ．

(4) 右下の図のように，右上のマス目が選ばれて○がついており，かつ，×がついた対角線上のマス目を選んで○をつけることができないものとする．このとき，すべての行と列に○がついているようなマス目の選び方の総数を求めよ．

解答例

1 (1) C_1 と C_2 の交点の x 座標は



$$\sin 2x = \cos x$$
$$2\sin x\cos x = \cos x$$
$$\cos x(2\sin x - 1) = 0$$

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$x = -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}$$

$a < b < c$ より　$\boldsymbol{a = -\dfrac{\pi}{2},\ b = \dfrac{\pi}{6},\ c = \dfrac{\pi}{2}}$

(2) $f(x) = \sin 2x$，$g(x) = \cos x$ とおくと　$f'(x) = 2\cos 2x,\quad g'(x) = -\sin x$

ゆえに，$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1$，$g'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$ より　$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)g'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2} \neq -1$

よって，この点における C_1 と C_2 のそれぞれの接線は垂直ではない．

(3) 上のグラフから

$$S_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos x - \sin 2x)dx = \left[\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{9}{4}$$
$$S_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - \cos x)dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x - \sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$$

よって　$S_1 : S_2 = \dfrac{9}{4} : \dfrac{1}{4} = \mathbf{9 : 1}$

(4) 上のグラフから

$$V = \pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x\,dx$$
$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4x)\,dx = \pi\left[x - \frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{\pi^2}{2}}$$

■

2 (1) $f(x) = \log(x^2 - x + 2)$
$(0 \leqq x \leqq 1)$ より

$$f'(x) = \frac{2x-1}{x^2 - x + 2} \quad \cdots ①$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\log 2$	$\searrow$	極小 $\log\frac{7}{4}$	$\nearrow$	$\log 2$

$f(x)$ の増減表は右のようになる．

よって　$x = \dfrac{1}{2}$ で**極小値** $\boldsymbol{\log\dfrac{7}{4}}$

(2) $g(x) = \log(x^2 - x + 2) - x$ とおくと

$$g'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+2} - 1 = \frac{-x^2+3x-3}{x^2-x+2} = \frac{-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} < 0$$

ゆえに，$g(x)$ は単調に減少する．

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \log\frac{7}{4} - \frac{1}{2} = \log 7 - 2\log 2 - \frac{1}{2}, \qquad g(1) = \log 2 - 1 < 0$$
$$> 1.9 - 2\times 0.7 - 0.5 = 0$$

したがって，$g(x) = 0$ となる $\dfrac{1}{2} < x < 1$ がただ1つ存在する．すなわち，方程式 $\log(x^2 - x + 2) = x$ は $\dfrac{1}{2} < x < 1$ の範囲に実数解をただ1つもつ．

(3) ① を微分して

$$f''(x) = \frac{(2x-1)'(x^2-x+2) - (2x-1)(x^2-x+2)'}{(x^2-x+2)^2}$$
$$= \frac{-2x^2+2x+3}{(x^2-x+2)^2} = \frac{2x(1-x)+3}{(x^2-x+2)^2}$$

ゆえに，$0 \leqq x \leqq 1$ において　　$f''(x) > 0$
したがって，$f'(x)$ はこの区間で単調増加である．
よって，最大値は $\boldsymbol{f'(1) = \dfrac{1}{2}}$，最小値は $\boldsymbol{f'(0) = -\dfrac{1}{2}}$ である．

(4) 平均値の定理により

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

となる c が $a < c < b$ に存在する．また，(3) の結果から

$$-\frac{1}{2} < f'(c) < \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad |f'(c)| < \frac{1}{2}$$

これから　$\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| = |f'(c)| < \dfrac{1}{2}$　　よって　$|f(b)-f(a)| < \dfrac{1}{2}|b-a|$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\begin{cases} 3x+4y=kx \\ x+6y=ky \end{cases}$ より $\quad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \cdots (*)$

ゆえに $\quad (A-kE)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

この方程式が $x=y=0$ 以外の解をもつとき，

$$A-kE = \begin{pmatrix} 3-k & 4 \\ 1 & 6-k \end{pmatrix}$$

は正則ではないので，$\det(A-kE)=0$ より

$$(3-k)(6-k)-4\cdot 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k=2,\ 7}$$

(2) $a<b$ および (1) の結果から，$a=2$，$b=7$

$(*)$ に，$k=2$，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix}$ を代入すると

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} \quad \cdots ① \quad \text{ゆえに} \quad s=-4$$

$(*)$ に，$k=7$，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ を代入すると

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \quad \cdots ② \quad \text{ゆえに} \quad t=1$$

①，② から

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & t \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & t \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

上式は，$AP=PB$ を満たす．よって $\quad \boldsymbol{s=-4,\ t=1}$

(3) 自然数 n に対して

$$B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 7^n \end{pmatrix} \quad \cdots (**)$$

とおく.

i) $n = 1$ のとき，$(*)$ は成り立つ.

ii) $n = k$ のとき

$$B^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 7^k \end{pmatrix}$$

であると仮定すると

$$\begin{aligned} B^{k+1} &= B^k B \\ &= \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 7^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k+1} & 0 \\ 0 & 7^{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって，$n = k + 1$ のときも，$(**)$ が成り立つ.

i)，ii) より，すべての自然数 n に対して，$(**)$ は成り立つ.

(4) $P = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ より　$P^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

また，$AP = PB$ より，$A = PBP^{-1}$ であるから，(3) の結果により

$$\begin{aligned} A^n &= (PBP^{-1})^n \\ &= (PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1}) \\ &= PB^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 7^n \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \cdot 2^n + 7^n & -4 \cdot 2^n + 4 \cdot 7^n \\ -2^n + 7^n & 2^n + 4 \cdot 7^n \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

■

4 (1) 1 列目の〇のつけ方は 5 通り．2〜5 列目の〇のつけ方も同様に 5 通り．
したがって　$5^5 = \mathbf{3125}$ (通り)

(2) 1 行目には a 列目に〇をつけ，2〜5 行目には，それぞれ b 列目，c 列目，d 列目，e 列目に〇をつけるとする．求める選び方の総数は，a，b，c，d，e に 1 から 5 の数字を並べる順列の総数に等しい．よって　$5! = \mathbf{120}$ (通り)

(3) 〇のついている 2 列の選び方は　${}_5\mathrm{P}_2$ (通り)

〇のついている 2 列が，4 個と 1 個の場合は　${}_5\mathrm{C}_4 \cdot {}_5\mathrm{C}_1$ (通り)
〇のついている 2 列が，3 個と 2 個の場合は　${}_5\mathrm{C}_3 \cdot {}_5\mathrm{C}_2$ (通り)

よって，求める選び方の総数は

$$ {}_5\mathrm{P}_2({}_5\mathrm{C}_4 \cdot {}_5\mathrm{C}_1 + {}_5\mathrm{C}_3 \cdot {}_5\mathrm{C}_2) = 20(5 \times 5 + 10 \times 10) = \mathbf{2500} \text{ (通り)} $$

(4) 2 行から 5 行までの列の番号を樹形図で示すと次のようになる．
よって　**11** (通り)

2 行	3 行	4 行	5 行
1	2	3	4
	4	2	3
		3	2
	1	2	4
3	2	1	4
	4	1	2
		2	1
		2	3
4	1	3	2
	2	1	3
		3	1