平成24年度　九州工業大学2次試験前期日程(数学問題)
情報工学部　平成24年2月25日

- 数I・II・III・A・B・C (120分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 関数 $f(x) = kx^3 - 3kx$ $(k > 0)$ が表す座標平面上の曲線を $C : y = f(x)$ とする．曲線 C 上の2点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(ap,\ f(ap))$ における接線をそれぞれ l_1，l_2 とする．ただし，$p > 0$，$a \neq 1$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点Pにおける接線 l_1 の方程式を k，p を用いて表せ．

(2) 点Qにおける接線 l_2 が点Pを通るとき，a の値を求めよ．

(3) ある k に対して2つの接線 l_1，l_2 が点Pにおいて垂直に交わっているとき，k を p を用いて表せ．また，そのような k が存在する p の値の範囲を求めよ．

(4) ある k に対して2つの接線 l_1，l_2 が点Pにおいて垂直に交わっているとき，接線 l_2 と曲線 C によって囲まれた図形の面積 S を p を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ Oを原点とする座標平面上に点A(0, 1)があり，点Aからの距離が4である点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が $x > 0$，$y > 1$ をみたすように動く．直線APが x 軸の正の向きとなす角を θ，点Pから x 軸に垂線を下ろしたときの交点をQとする．以下の問いに答えよ．

(1) 点Pの座標を θ を用いて表せ．

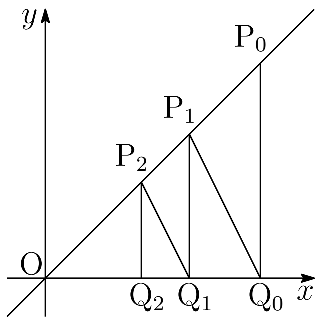
(2) 四角形OAPQの面積 S を θ を用いて表せ．

(3) (2)で求めた S が最大となるときの $\sin\theta$ の値を求めよ．

(4) 四角形OAPQを x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積 V を θ を用いて表せ．

(5) (4)で求めた V が $\sin\theta = \dfrac{3}{4}$ で最大となることを示せ．

3 O を原点とする座標平面上に点 $\mathrm{P}_0(1,\ 1)$，$\mathrm{Q}_0(1,\ 0)$ がある．ある $p\ (0<p<1)$ に対して，点 $\mathrm{P}_1(p,\ p)$，$\mathrm{Q}_1(p,\ 0)$ を定め，さらに，自然数 n について点 P_{n+1}，Q_{n+1} を次のように定める．



- 点 Q_n を通り直線 $\mathrm{Q}_0\mathrm{P}_1$ と平行な直線と，直線 OP_0 の交点を P_{n+1} とする．
- 点 P_{n+1} を通り y 軸と平行な直線と，x 軸の交点を Q_{n+1} とする．

また，$\triangle \mathrm{Q}_{n-1}\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ の面積を S_n とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) S_1 を p を用いて表せ．

(2) 点 Q_{n-1} の x 座標を q とするとき，点 Q_n の x 座標を p，q を用いて表せ．

(3) S_n を p，n を用いて表せ．

(4) n を定数として，p を $0<p<1$ の範囲で動かすとき，S_n を最大にする p とそのときの S_n をそれぞれ n を用いて表せ．

(5) (4) で求めた S_n に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nS_n$ を求めよ．必要であれば，自然対数の底 e について $\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ が成り立つことを用いてよい．

4 1 辺の長さが 1 の正三角形の頂点を時計回りに P，Q，R とする．これらの頂点のいずれかにある動点が，次のように辺上を移動することを 1 回の試行とする．さいころを 1 回投げて，1 の目が出れば反時計回りに長さ 1 だけ移動し，6 の目が出れば移動せず，それ以外の場合は時計回りに長さ 1 だけ移動する．動点は最初に点 P にあり，n 回の試行後に動点が点 P，Q，R にある確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n $(n=1,2,3,\cdots)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) p_1，p_2 をそれぞれ求めよ．

(2) q_2，r_2 をそれぞれ求め，さらに p_3 を求めよ．

(3) p_{n+1} を r_n を用いて表せ．

(4) p_{n+3} を p_n を用いて表せ．

(5) p_{3n} を n を用いて表せ．

正解

$\boxed{\textbf{1}}$ (1) $f(x)=kx^3-3kx$ より　$f'(x)=3kx^2-3k$

$\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線 l_1 の方程式は

$$y-(kp^3-3kp)=(3kp^2-3k)(x-p)$$

ゆえに　$\boldsymbol{y=(3kp^2-3k)x-2kp^3}$

(2) $\mathrm{Q}(ap,\ f(ap))$ における接線 l_2 の方程式は，(1) の結果から $(p\to ap)$

$$y=(3ka^2p^2-3k)x-2ka^3p^3$$

これが $\mathrm{P}(p,\ kp^3-3kp)$ を通るから

$$kp^3-3kp=(3ka^2p^2-3k)p-2ka^3p^3$$

整理すると　$kp^3(a-1)^2(2a+1)=0$

$k>0$，$p>0$，$a\neq 1$ であるから　$\boldsymbol{a=-\dfrac{1}{2}}$

(3) l_2 が P を通るから，(2) の結果から　$a=-\dfrac{1}{2}$

また $l_1\perp l_2$ より，$f'(p)f'\left(-\dfrac{1}{2}p\right)=-1$ であるから

$$(3kp^2-3k)\cdot\left\{3k\left(-\frac{1}{2}p\right)^2-3k\right\}=-1$$

ゆえに　$\dfrac{9}{4}k^2(p^2-1)(p^2-4)=-1\quad\cdots①$

① をみたす $k>0$ が存在するとき

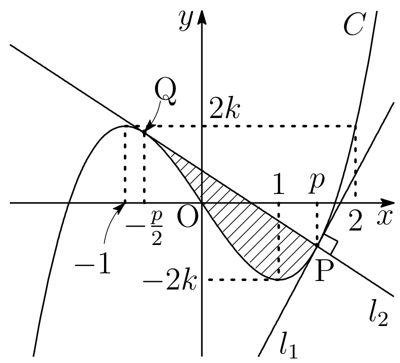
$$(p^2-1)(p^2-4)<0\quad \text{ゆえに}\quad 1<p^2<4$$

$p>0$ であるから　$\boldsymbol{1<p<2}$

① より　$\boldsymbol{k=\dfrac{2}{3\sqrt{(p^2-1)(4-p^2)}}}$

(4) (2) の結果から，l_2 の方程式は　$y=3k\left(\dfrac{p^2}{4}-1\right)x+\dfrac{k}{4}p^3$

$g(x)=3k\left(\dfrac{p^2}{4}-1\right)x+\dfrac{k}{4}p^3$ とおくと



$$\begin{aligned}g(x)-f(x)&=3k\left(\frac{p^2}{4}-1\right)x+\frac{k}{4}p^3\\&\qquad-(kx^3-3kx)\\&=-kx^3+\frac{3}{4}kp^2x+\frac{k}{4}p^3\\&=-k(x-p)\left(x+\frac{p}{2}\right)^2\end{aligned}$$

$-\dfrac{p}{2}\leqq x\leqq p$ において，$k>0$ より，$g(x)-f(x)\geqq 0$ であるから

$$\begin{aligned}S&=\int_{-\frac{p}{2}}^{p}\{g(x)-f(x)\}dx\\&=-k\int_{-\frac{p}{2}}^{p}(x-p)\left(x+\frac{p}{2}\right)^2dx\\&=-k\int_{-\frac{p}{2}}^{p}\left\{\left(x+\frac{p}{2}\right)-\frac{3}{2}p\right\}\left(x+\frac{p}{2}\right)^2dx\\&=-k\int_{-\frac{p}{2}}^{p}\left\{\left(x+\frac{p}{2}\right)^3-\frac{3}{2}p\left(x+\frac{p}{2}\right)^2\right\}dx\\&=-k\left[\frac{1}{4}\left(x+\frac{p}{2}\right)^4-\frac{p}{2}\left(x+\frac{p}{2}\right)^3\right]_{-\frac{p}{2}}^{p}=\frac{27}{64}p^4k\end{aligned}$$

このとき，(3) の結果から

$$S=\frac{27}{64}p^4\times\frac{2}{3\sqrt{(p^2-1)(4-p^2)}}=\boldsymbol{\frac{9p^4}{32\sqrt{(p^2-1)(4-p^2)}}}$$

補足　積分公式[1]

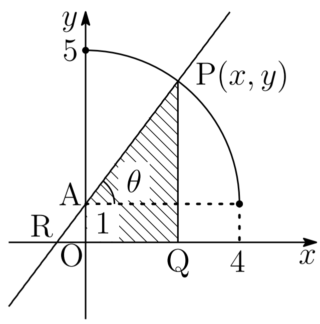
$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$$

を利用すると

$$S=k\int_{-\frac{p}{2}}^{p}\left(x+\frac{p}{2}\right)^2(p-x)dx=k\cdot\frac{2!1!}{(2+1+1)!}\left(p+\frac{p}{2}\right)^4=\frac{27}{64}p^4k$$

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf $\boxed{1}$ (p.4) を参照.

$\boxed{2}$ (1) $\boldsymbol{\mathrm{P}(4\cos\theta,\ 4\sin\theta+1)}$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$



(2) $S=\dfrac{1}{2}(\mathrm{OA}+\mathrm{PQ})\times\mathrm{OQ}$

$=\dfrac{1}{2}\{1+(4\sin\theta+1)\}\times 4\cos\theta$

$=\boldsymbol{4\cos\theta(2\sin\theta+1)}$

(3) $\dfrac{dS}{d\theta}=-4\sin\theta(2\sin\theta+1)+4\cos\theta\cdot 2\cos\theta$

$=-8\sin^2\theta-4\sin\theta+8(1-\sin^2\theta)$

$=-4(4\sin^2\theta+\sin\theta-2)$

$\dfrac{d^2S}{d\theta^2}=-4(4\sin 2\theta+\cos\theta)$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，$\dfrac{d^2S}{d\theta^2}<0$ であるから

$$\frac{dS}{d\theta}=0\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{\sin\theta=\frac{-1+\sqrt{33}}{8}}$$

をみたす θ のとき S は最大となる．

(4) 直線 AP と x 軸との交点を R とすると　$\mathrm{OR}=\dfrac{1}{\tan\theta}$

$\triangle$RAO を x 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積は

$$\frac{1}{3}\pi\cdot 1^2\times\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\pi\cos\theta}{3\sin\theta}$$

$\triangle$RAO と $\triangle$RPQ の相似比は $1:(4\sin\theta+1)$ であるから

$$V=\frac{\pi\cos\theta}{3\sin\theta}\{(4\sin\theta+1)^3-1^3\}$$
$$=\boldsymbol{\frac{4\pi}{3}\cos\theta(16\sin^2\theta+12\sin\theta+3)}$$

(5) (4) の結果から

$\dfrac{dV}{d\theta}=\dfrac{4\pi}{3}\left\{-\sin\theta(16\sin^2\theta+12\sin\theta+3)+\cos\theta(32\sin\theta\cos\theta+12\cos\theta)\right\}$

$=\dfrac{4\pi}{3}\left\{-\sin\theta(16\sin^2\theta+12\sin\theta+3)+(1-\sin^2\theta)(32\sin\theta+12)\right\}$

$=-\dfrac{4\pi}{3}(4\sin\theta-3)(12\sin^2\theta+15\sin\theta+4)$

ここで，$\sin\alpha=\dfrac{3}{4}\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$0<\theta<\alpha \text{ のとき } \frac{dV}{d\theta}>0,\qquad \alpha<\theta<\frac{\pi}{2} \text{ のとき } \frac{dV}{d\theta}<0$$

よって　V は $\sin\theta=\dfrac{3}{4}$ で最大となる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\mathrm{Q}_0(1,\ 0)$，$\mathrm{P}_1(p,\ p)$，$\mathrm{Q}_1(p,\ 0)$ より　$\mathrm{Q}_0\mathrm{Q}_1 = 1-p$，$\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1 = p$ であるから

$$S_1 = \frac{1}{2}\mathrm{Q}_0\mathrm{Q}_1 \times \mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}(1-p)p}$$

(2) 2 点 $\mathrm{Q}_0(1,\ 0)$，$\mathrm{P}_1(p,\ p)$ を通る直線の傾きは　$\dfrac{p}{p-1}$

点 $\mathrm{Q}_{n-1}(q,\ 0)$ を通り，これに平行な直線は　$y = \dfrac{p}{p-1}(x-q)$

この直線と直線 $y=x$ との交点 $(pq,\ pq)$ が P_n であるから，

Q_n の x 座標は　$\boldsymbol{pq}$

(3) (2) の結果から，$\mathrm{Q}_{n-1}(p^{n-1},\ 0)$，$\mathrm{Q}_n(p^n,\ 0)$，また，$\mathrm{Q}_n$ の座標から，$\mathrm{P}_n(p^n,\ p^n)$
$\mathrm{Q}_{n-1}\mathrm{Q}_n = p^{n-1}-p^n$，$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n = p^n$ であるから

$$S_n = \frac{1}{2}\mathrm{Q}_{n-1}\mathrm{Q}_n \times \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n = \frac{1}{2}(p^{n-1}-p^n)p^n = \boldsymbol{\frac{1}{2}(1-p)p^{2n-1}}$$

(4) (3) の結果から

$$\frac{dS_n}{dp} = \frac{1}{2}\{(2n-1)p^{2n-2} - 2np^{2n-1}\} = \frac{1}{2}(2n-1-2np)p^{2n-2}$$

ゆえに，$0 < p < \dfrac{2n-1}{2n}$ のとき $\dfrac{dS_n}{dp} > 0$，$\dfrac{2n-1}{2n}$ のとき $\dfrac{dS_n}{dp} < 0$

よって，$\boldsymbol{p = \dfrac{2n-1}{2n}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{4n}\left(\dfrac{2n-1}{2n}\right)^{2n-1}}$ をとる．

補足 $2n$ 個の正数 $(2n-1)(1-p)$, $\overbrace{p, \cdots, p}^{2n-1\text{ 個}}$ の相加・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{2n}\{(2n-1)(1-p) + (2n-1)p\} \geqq \sqrt[2n]{(2n-1)(1-p)p^{2n-1}}$$

$$\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{2n} \geqq (2n-1)(1-p)p^{2n-1}$$

よって　$S_n \leqq \dfrac{1}{4n}\left(\dfrac{2n-1}{2n}\right)^{2n-1}$

上式において，等号が成立するのは

$$(2n-1)(1-p) = p \quad \text{すなわち} \quad p = \frac{2n-1}{2n}$$

(5) (4) で求めた S_n より $nS_n = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2n-1}{2n}\right)^{2n-1}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} nS_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4\left(\dfrac{2n}{2n-1}\right)^{2n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}} = \boldsymbol{\frac{1}{4e}}$$

$\boxed{\textbf{4}}$ (1) p_{n+1}，q_{n+1}，r_{n+1} をそれぞれ p_n，q_n，r_n を用いて表すと

$$p_{n+1} = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{6}q_n + \frac{4}{6}r_n \quad \cdots ①$$
$$q_{n+1} = \frac{4}{6}p_n + \frac{1}{6}q_n + \frac{1}{6}r_n \quad \cdots ②$$
$$r_{n+1} = \frac{1}{6}p_n + \frac{4}{6}q_n + \frac{1}{6}r_n \quad \cdots ③$$

となる．また

$$p_1 = \boldsymbol{\frac{1}{6}},\quad q_1 = \frac{4}{6},\quad r_1 = \frac{1}{6}$$

であるから

$$p_2 = \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{6}q_1 + \frac{4}{6}r_1 = \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{4}{6} + \frac{4}{6}\times\frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(2) (1) と同様に

$$q_2 = \frac{4}{6}p_1 + \frac{1}{6}q_1 + \frac{1}{6}r_1 = \frac{4}{6}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{4}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$
$$r_2 = \frac{1}{6}p_1 + \frac{4}{6}q_1 + \frac{1}{6}r_1 = \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} + \frac{4}{6}\times\frac{4}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(1) と上の結果から

$$p_3 = \frac{1}{6}p_2 + \frac{1}{6}q_2 + \frac{4}{6}r_2 = \frac{1}{6}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{4} + \frac{4}{6}\times\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{5}{12}}$$

(3) ①，②，③ の辺々を加えると

$$p_{n+1} + q_{n+1} + r_{n+1} = p_n + q_n + r_n$$

$p_1 + q_1 + r_1 = 1$ であるから　$p_n + q_n + r_n = 1 \quad \cdots ④$

①，④ により　$\boldsymbol{p_{n+1} = \dfrac{1}{2}r_n + \dfrac{1}{6}}$

(4) (3) と同様に，④ から ②，③ は

$$q_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{6}, \qquad r_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{6}$$

となる．したがって，(3) の結果と上の 2 式から

$$\begin{aligned} p_{n+3} &= \frac{1}{2}r_{n+2} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}q_{n+1} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}p_n + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{1}{8}p_n + \frac{7}{24}} \end{aligned}$$

(5) (4) の結果から　$p_{3n+3} = \frac{1}{8}p_{3n} + \frac{7}{24}$

ゆえに　$p_{3(n+1)} - \frac{1}{3} = \frac{1}{8}\left(p_{3n} - \frac{1}{3}\right)$

したがって　$p_{3n} - \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}\left(p_3 - \frac{1}{3}\right)$

よって　$\boldsymbol{p_{3n} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}}$

解説 (3)，(4) の結果から

$$p_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(r_n - \frac{1}{3}\right), \quad q_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right), \quad r_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(q_n - \frac{1}{3}\right)$$

ここで，$x_n = p_n - \frac{1}{3}$，$y_n = q_n - \frac{1}{3}$，$z_n = r_n - \frac{1}{3}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

また，$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると

$$A^2 = \frac{1}{2^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \frac{1}{2^3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{pmatrix} x_{3n-2} \\ y_{3n-2} \\ z_{3n-2} \end{pmatrix} = A^{3n-3}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = (A^3)^{n-1}\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{3n-3}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{3n-1} \\ y_{3n-1} \\ z_{3n-1} \end{pmatrix} = A^{3n-2}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = (A^3)^{n-1}A\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{3n-2}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{3n} \\ y_{3n} \\ z_{3n} \end{pmatrix} = A^{3n-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = (A^3)^{n-1}A^2\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{3n-1}}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{pmatrix} p_{3n-2} \\ q_{3n-2} \\ r_{3n-2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{3n-3}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_{3n-1} \\ q_{3n-1} \\ r_{3n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{3n-2}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_{3n} \\ q_{3n} \\ r_{3n} \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{3n-1}}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

補足 九大 2012 年一般前期理系数学 $\boxed{\mathbf{5}}$ の解説を参照[2]

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf