

平成 24 年度 九州工業大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

数 I · II · III · A · B · C (120 分)

情報工学部 平成 24 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4

1 関数 $f(x) = kx^3 - 3kx$ ($k > 0$) が表す座標平面上の曲線を $C: y = f(x)$ とする. 曲線 C 上の 2 点 $P(p, f(p))$, $Q(ap, f(ap))$ における接線をそれぞれ l_1, l_2 とする. ただし, $p > 0$, $a \neq 1$ とする. 以下の問いに答えよ.

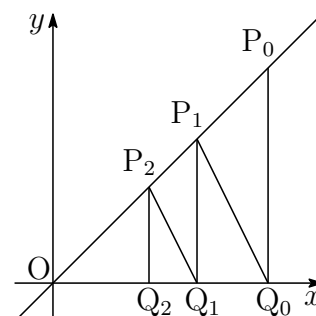
- (1) 点 P における接線 l_1 の方程式を k, p を用いて表せ.
- (2) 点 Q における接線 l_2 が点 P を通るとき, a の値を求めよ.
- (3) ある k に対して 2 つの接線 l_1, l_2 が点 P において垂直に交わっているとき, k を p を用いて表せ. また, そのような k が存在する p の値の範囲を求めよ.
- (4) ある k に対して 2 つの接線 l_1, l_2 が点 P において垂直に交わっているとき, 接線 l_2 と曲線 C によって囲まれた図形の面積 S を p を用いて表せ.

2 O を原点とする座標平面上に点 $A(0, 1)$ があり, 点 A からの距離が 4 である点 $P(x, y)$ が $x > 0, y > 1$ をみたすように動く. 直線 AP が x 軸の正の向きとなす角を θ , 点 P から x 軸に垂線を下ろしたときの交点を Q とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 点 P の座標を θ を用いて表せ.
- (2) 四角形 $OAPQ$ の面積 S を θ を用いて表せ.
- (3) (2) で求めた S が最大となるときの $\sin \theta$ の値を求めよ.
- (4) 四角形 $OAPQ$ を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V を θ を用いて表せ.
- (5) (4) で求めた V が $\sin \theta = \frac{3}{4}$ で最大となることを示せ.

- 3 Oを原点とする座標平面上に点 $P_0(1, 1)$, $Q_0(1, 0)$ がある. ある p ($0 < p < 1$)に対して, 点 $P_1(p, p)$, $Q_1(p, 0)$ を定め, さらに, 自然数 n について点 P_{n+1} , Q_{n+1} を次のように定める.

- 点 Q_n を通り直線 Q_0P_1 と平行な直線と, 直線 OP_0 の交点を P_{n+1} とする.
- 点 P_{n+1} を通り y 軸と平行な直線と, x 軸の交点を Q_{n+1} とする.



また, $\triangle Q_{n-1}P_nQ_n$ の面積を S_n とすると, 以下の問いに答えよ.

- (1) S_1 を p を用いて表せ.
 - (2) 点 Q_{n-1} の x 座標を q とすると, 点 Q_n の x 座標を p, q を用いて表せ.
 - (3) S_n を p, n を用いて表せ.
 - (4) n を定数として, p を $0 < p < 1$ の範囲で動かすとき, S_n を最大にする p とそのときの S_n をそれぞれ n を用いて表せ.
 - (5) (4)で求めた S_n に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n$ を求めよ. 必要であれば, 自然対数の底 e について $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ が成り立つことを用いてよい.
- 4 1辺の長さが1の正三角形の頂点を時計回りに P, Q, R とする. これらの頂点のいずれかにある動点が, 次のように辺上を移動することを1回の試行とする. さいころを1回投げて, 1の目が出れば反時計回りに長さ1だけ移動し, 6の目が出れば移動せず, それ以外の場合は時計回りに長さ1だけ移動する. 動点は最初に点 P にあり, n 回の試行後に動点が点 P, Q, R にある確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n ($n = 1, 2, 3, \dots$)とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) p_1, p_2 をそれぞれ求めよ.
- (2) q_2, r_2 をそれぞれ求め, さらに p_3 を求めよ.
- (3) p_{n+1} を r_n を用いて表せ.
- (4) p_{n+3} を p_n を用いて表せ.
- (5) p_{3n} を n を用いて表せ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad f(x) = kx^3 - 3kx \text{ より } f'(x) = 3kx^2 - 3k$$

P($p, f(p)$) における接線 l_1 の方程式は

$$y - (kp^3 - 3kp) = (3kp^2 - 3k)(x - p)$$

$$\text{ゆえに } \mathbf{y = (3kp^2 - 3k)x - 2kp^3}$$

(2) Q($ap, f(ap)$) における接線 l_2 の方程式は, (1) の結果から ($p \rightarrow ap$)

$$y = (3ka^2p^2 - 3k)x - 2ka^3p^3$$

これが P($p, kp^3 - 3kp$) を通るから

$$kp^3 - 3kp = (3ka^2p^2 - 3k)p - 2ka^3p^3$$

$$\text{整理すると } kp^3(a - 1)^2(2a + 1) = 0$$

$$k > 0, p > 0, a \neq 1 \text{ であるから } \mathbf{a = -\frac{1}{2}}$$

(3) l_2 が P を通るから, (2) の結果から $a = -\frac{1}{2}$

また $l_1 \perp l_2$ より, $f'(p)f'\left(-\frac{1}{2}p\right) = -1$ であるから

$$(3kp^2 - 3k) \cdot \left\{ 3k \left(-\frac{1}{2}p \right)^2 - 3k \right\} = -1$$

$$\text{ゆえに } \frac{9}{4}k^2(p^2 - 1)(p^2 - 4) = -1 \quad \dots \textcircled{1}$$

① をみたす $k > 0$ が存在するとき

$$(p^2 - 1)(p^2 - 4) < 0 \quad \text{ゆえに } 1 < p^2 < 4$$

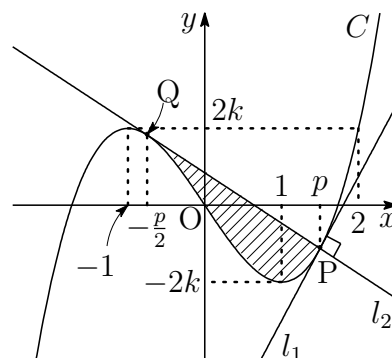
$p > 0$ であるから $\mathbf{1 < p < 2}$

$$\textcircled{1} \text{ より } \mathbf{k = \frac{2}{3\sqrt{(p^2 - 1)(4 - p^2)}}}$$

(4) (2) の結果から, l_2 の方程式は $y = 3k \left(\frac{p^2}{4} - 1 \right) x + \frac{k}{4} p^3$

$$g(x) = 3k \left(\frac{p^2}{4} - 1 \right) x + \frac{k}{4} p^3 \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= 3k \left(\frac{p^2}{4} - 1 \right) x + \frac{k}{4} p^3 \\ &\quad - (kx^3 - 3kx) \\ &= -kx^3 + \frac{3}{4}kp^2x + \frac{k}{4}p^3 \\ &= -k(x-p) \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 \end{aligned}$$



$-\frac{p}{2} \leq x \leq p$ において, $k > 0$ より, $g(x) - f(x) \geq 0$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{p}{2}}^p \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= -k \int_{-\frac{p}{2}}^p (x-p) \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 dx \\ &= -k \int_{-\frac{p}{2}}^p \left\{ \left(x + \frac{p}{2} \right) - \frac{3}{2}p \right\} \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 dx \\ &= -k \int_{-\frac{p}{2}}^p \left\{ \left(x + \frac{p}{2} \right)^3 - \frac{3}{2}p \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 \right\} dx \\ &= -k \left[\frac{1}{4} \left(x + \frac{p}{2} \right)^4 - \frac{p}{2} \left(x + \frac{p}{2} \right)^3 \right]_{-\frac{p}{2}}^p = \frac{27}{64} p^4 k \end{aligned}$$

このとき, (3) の結果から

$$S = \frac{27}{64} p^4 \times \frac{2}{3\sqrt{(p^2-1)(4-p^2)}} = \frac{9p^4}{32\sqrt{(p^2-1)(4-p^2)}}$$

補足 積分公式¹

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

を利用すると

$$S = k \int_{-\frac{p}{2}}^p \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 (p-x) dx = k \cdot \frac{2!1!}{(2+1+1)!} \left(p + \frac{p}{2} \right)^4 = \frac{27}{64} p^4 k$$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf [1] (p.4) を参照。

2 (1) $P(4 \cos \theta, 4 \sin \theta + 1)$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

$$\begin{aligned} (2) \quad S &= \frac{1}{2}(OA + PQ) \times OQ \\ &= \frac{1}{2}\{1 + (4 \sin \theta + 1)\} \times 4 \cos \theta \\ &= 4 \cos \theta(2 \sin \theta + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \frac{dS}{d\theta} &= -4 \sin \theta(2 \sin \theta + 1) + 4 \cos \theta \cdot 2 \cos \theta \\ &= -8 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta + 8(1 - \sin^2 \theta) \\ &= -4(4 \sin^2 \theta + \sin \theta - 2) \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 S}{d\theta^2} = -4(4 \sin 2\theta + \cos \theta)$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ において, $\frac{d^2 S}{d\theta^2} < 0$ であるから

$$\frac{dS}{d\theta} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \sin \theta = \frac{-1 + \sqrt{33}}{8}$$

をみたす θ のとき S は最大となる.

(4) 直線 AP と x 軸との交点を R とすると $OR = \frac{1}{\tan \theta}$
 $\triangle RAO$ を x 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積は

$$\frac{1}{3} \pi \cdot 1^2 \times \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\pi \cos \theta}{3 \sin \theta}$$

$\triangle RAO$ と $\triangle RPQ$ の相似比は $1 : (4 \sin \theta + 1)$ であるから

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi \cos \theta}{3 \sin \theta} \{(4 \sin \theta + 1)^3 - 1^3\} \\ &= \frac{4\pi}{3} \cos \theta (16 \sin^2 \theta + 12 \sin \theta + 3) \end{aligned}$$

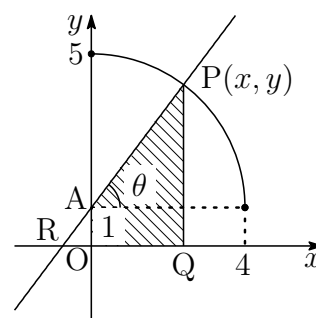
(5) (4) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\theta} &= \frac{4\pi}{3} \{-\sin \theta(16 \sin^2 \theta + 12 \sin \theta + 3) + \cos \theta(32 \sin \theta \cos \theta + 12 \cos \theta)\} \\ &= \frac{4\pi}{3} \{-\sin \theta(16 \sin^2 \theta + 12 \sin \theta + 3) + (1 - \sin^2 \theta)(32 \sin \theta + 12)\} \\ &= -\frac{4\pi}{3} (4 \sin \theta - 3)(12 \sin^2 \theta + 15 \sin \theta + 4) \end{aligned}$$

ここで, $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) とすると

$$0 < \theta < \alpha \text{ のとき } \frac{dV}{d\theta} > 0, \quad \alpha < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \frac{dV}{d\theta} < 0$$

よって V は $\sin \theta = \frac{3}{4}$ で最大となる. ■



- 3** (1) $Q_0(1, 0)$, $P_1(p, p)$, $Q_1(p, 0)$ より $Q_0Q_1 = 1 - p$, $P_1Q_1 = p$ であるから

$$S_1 = \frac{1}{2}Q_0Q_1 \times P_1Q_1 = \frac{1}{2}(1 - p)p$$

- (2) 2点 $Q_0(1, 0)$, $P_1(p, p)$ を通る直線の傾きは $\frac{p}{p-1}$

点 $Q_{n-1}(q, 0)$ を通り, これに平行な直線は $y = \frac{p}{p-1}(x - q)$

この直線と直線 $y = x$ との交点 (pq, pq) が P_n であるから,

Q_n の x 座標は pq

- (3) (2)の結果から, $Q_{n-1}(p^{n-1}, 0)$, $Q_n(p^n, 0)$, また, Q_n の座標から, $P_n(p^n, p^n)$
 $Q_{n-1}Q_n = p^{n-1} - p^n$, $P_nQ_n = p^n$ であるから

$$S_n = \frac{1}{2}Q_{n-1}Q_n \times P_nQ_n = \frac{1}{2}(p^{n-1} - p^n)p^n = \frac{1}{2}(1 - p)p^{2n-1}$$

- (4) (3)の結果から

$$\frac{dS_n}{dp} = \frac{1}{2}\{(2n-1)p^{2n-2} - 2np^{2n-1}\} = \frac{1}{2}(2n-1-2np)p^{2n-2}$$

ゆえに, $0 < p < \frac{2n-1}{2n}$ のとき $\frac{dS_n}{dp} > 0$, $\frac{2n-1}{2n}$ のとき $\frac{dS_n}{dp} < 0$

よって, $p = \frac{2n-1}{2n}$ のとき, 最大値 $\frac{1}{4n} \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{2n-1}$ をとる.

補足 $2n$ 個の正数 $(2n-1)(1-p)$, $\overbrace{p, \dots, p}^{2n-1 \text{ 個}}$ の相加・相乗平均の大小関係により

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n}\{(2n-1)(1-p) + (2n-1)p\} &\geq \sqrt[2n]{(2n-1)(1-p)p^{2n-1}} \\ \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{2n} &\geq (2n-1)(1-p)p^{2n-1} \end{aligned}$$

よって $S_n \leq \frac{1}{4n} \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{2n-1}$

上式において, 等号が成立するのは

$$(2n-1)(1-p) = p \quad \text{すなわち} \quad p = \frac{2n-1}{2n}$$

(5) (4) で求めた S_n より $nS_n = \frac{1}{4} \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^{2n-1}$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} nS_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4 \left(\frac{2n}{2n-1} \right)^{2n-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4 \left(1 + \frac{1}{2n-1} \right)^{2n-1}} = \frac{1}{4e} \end{aligned}$$

■

4 (1) p_{n+1} , q_{n+1} , r_{n+1} をそれぞれ p_n , q_n , r_n を用いて表すと

$$p_{n+1} = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{6}q_n + \frac{4}{6}r_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$q_{n+1} = \frac{4}{6}p_n + \frac{1}{6}q_n + \frac{1}{6}r_n \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{6}p_n + \frac{4}{6}q_n + \frac{1}{6}r_n \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。また

$$p_1 = \frac{1}{6}, \quad q_1 = \frac{4}{6}, \quad r_1 = \frac{1}{6}$$

であるから

$$p_2 = \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{6}q_1 + \frac{4}{6}r_1 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

(2) (1) と同様に

$$q_2 = \frac{4}{6}p_1 + \frac{1}{6}q_1 + \frac{1}{6}r_1 = \frac{4}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

$$r_2 = \frac{1}{6}p_1 + \frac{4}{6}q_1 + \frac{1}{6}r_1 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

(1) と上の結果から

$$p_3 = \frac{1}{6}p_2 + \frac{1}{6}q_2 + \frac{4}{6}r_2 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$$

(3) ①, ②, ③ の辺々を加えると

$$p_{n+1} + q_{n+1} + r_{n+1} = p_n + q_n + r_n$$

$$p_1 + q_1 + r_1 = 1 \text{ であるから } p_n + q_n + r_n = 1 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{4} \text{ により } p_{n+1} = \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{6}$$

(4) (3)と同様に, ④から②, ③は

$$q_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{6}, \quad r_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{6}$$

となる. したがって, (3)の結果と上の2式から

$$\begin{aligned} p_{n+3} &= \frac{1}{2}r_{n+2} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}q_{n+1} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}p_n + \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{8}p_n + \frac{7}{24} \end{aligned}$$

(5) (4)の結果から
$$p_{3n+3} = \frac{1}{8}p_{3n} + \frac{7}{24}$$

ゆえに
$$p_{3(n+1)} - \frac{1}{3} = \frac{1}{8} \left(p_{3n} - \frac{1}{3} \right)$$

したがって
$$p_{3n} - \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{8} \right)^{n-1} \left(p_3 - \frac{1}{3} \right)$$

よって
$$p_{3n} = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{8} \right)^{n-1} + \frac{1}{3}$$

解説 (3), (4)の結果から

$$p_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \left(r_n - \frac{1}{3} \right), \quad q_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \left(p_n - \frac{1}{3} \right), \quad r_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \left(q_n - \frac{1}{3} \right)$$

ここで, $x_n = p_n - \frac{1}{3}$, $y_n = q_n - \frac{1}{3}$, $z_n = r_n - \frac{1}{3}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

また, $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると

$$A^2 = \frac{1}{2^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \frac{1}{2^3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{3n-2} \\ y_{3n-2} \\ z_{3n-2} \end{pmatrix} &= A^{3n-3} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = (A^3)^{n-1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{3n-3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_{3n-1} \\ y_{3n-1} \\ z_{3n-1} \end{pmatrix} &= A^{3n-2} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = (A^3)^{n-1} A \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{3n-2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_{3n} \\ y_{3n} \\ z_{3n} \end{pmatrix} &= A^{3n-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = (A^3)^{n-1} A^2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{3n-1}} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_{3n-2} \\ q_{3n-2} \\ r_{3n-2} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2^{3n-3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_{3n-1} \\ q_{3n-1} \\ r_{3n-1} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2^{3n-2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_{3n} \\ q_{3n} \\ r_{3n} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2^{3n-1}} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

補足 九大 2012 年一般前期理系数学 **5** の解説を参照 ² ■

²http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf